2 42. 1983 sep. F 2557

1
TOMUL 42
Ian. — febr.
1983

1983 SEP 2 2

STUDII ȘI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Consiliul de conducere

Acad. **E. CARAFOLI**, *redactor şef*

Membri:

Acad. **I. ANTON**,
Acad. **ŞT. BĂLAN**,
Acad. **D. DUMITRESCU**,
Acad. **C. IACOB**
Acad. **D. MATEESCU**,
Acad. **O. ONICESCU**,
Acad. **R. VOINEA**,
Prof. **C. AVRAM**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **GH. BUZDUGAN**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Dr. ing. **N. PATRAULEA**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **R. C. BOGDAN**,
Prof. **D. PAVELESCU**,
Prof. **R. PRIŞCU**,
Dr. ing. **V. VISARION**,
Dr. ing. **D. PANTAZOPOL**,
Dr. ing. **I. CRIŞAN**,
Prof. **CR. PELECUDI**,
Prof. **TR. DEMIAN**,
Prof. **T. OROVEANU**, *secretar de redacţie*.

Colegiul de redacţie

Acad. **E. CARAFOLI**, *redactor şef*,

Membri:

Acad. **I. ANTON**,
Acad. **D. MATEESCU**,
Dr. ing. **I. CRIŞAN**,
Dr. ing. **D. PANTAZOPOL**,
Prof. **TR. DEMIAN**,
Prof. **T. OROVEANU**, *secretar de redacţie*.

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor adresa: ILEXIM, Departamentul export-import carte, Departamentul export-import presă (pentru reviste), 70 517, str. 13 Decembrie nr. 3, P. O. Box 136 —137, telex 11226, Bucureşti, România, în ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei, 70 701 str. Const. Mille nr. 15.

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79 717, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

SUMAR

STUDII

GH. ALEXE, Studiul efectului cîmpului magnetic indus într-un generator MHD prin metoda elementului finit 3

ION CREŢU, Drenajul gravitaţional unidimensional nestaţionar al petrolului . . . 12

AL. MARINESCU, Largarea forţată a rezervoarelor acroşate 21

ION ROŞCA, GH. DRĂGĂNOIU, Metoda de calcul numeric al caracteristicilor distribuţiei de masă pentru elemente şi subansamble de maşini 35

MIRCEA D. PASCOVICI, Calculul capacităţii portante hidrodinamice a inelelor de etanşare excentrice sau ovale 41

S. GĂLEŢUŞE, Asupra unor particularităţi privind utilizarea metodei cu element finit în lubrificaţia vîsco-inerţială 48

LUCIAN CĂPITANU, Metoda de calcul al uzurii la cuple superioare de frecare . . 54

V. CÎRTOAJE, GR. BUCUR, N. PARASCHIV, Sisteme automate de avans al sapei de foraj cu dispozitiv de frînare tip pompă volumică rotativă cu plungere axiale 58

NOTE

MIRCEA V. SOARE, O extindere a utilizării funcţiilor fundamentale 73

OAMENII DE ŞTIINŢĂ ŞI PACEA (R. VOINEA) 83

RECENZII 85

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 1, 1983, P. 1–88

1989

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratolvasó
17 11 1985

STUDIUL EFECTULUI CÎMPULUI MAGNETIC INDUS ÎNTR-UN GENERATOR MHD PRIN METODA ELEMENTULUI FINIT

de GH. ALEXE
Institutul agronomic „N. Bălcescu", București

În lucrare se studiază mișcarea fluidelor electroconductoare cu conductivitate tensorială într-un generator MHD cu o pereche de electrozi de lungime finită luîndu-se în considerare și cîmpul magnetic indus. Pentru determinarea funcțiilor ce apar în expresia puterii generatorului se dezvoltă modele discrete bazate pe metoda elementului finit.

1. Studiul mișcării fluidelor electroconductoare într-un generator MHD, cu luarea în considerare a cîmpului magnetic indus, a fost inițiat de profesorul L. Dragoș [1]. În lucrarea citată se consideră electrozii semifiniți, cîmpul magnetic exterior aplicat numai în zona electrozilor și se neglijează efectul Hall.

În lucrarea de față considerăm un canal de conversie de secțiune dreptunghiulară cu dimensiunile $2L_0$, $2lL_0$ cu o pereche de electrozi de lungime $2aL_0$, situați pe pereții $y = -L_0$, $y = L_0$ (fig. 1).

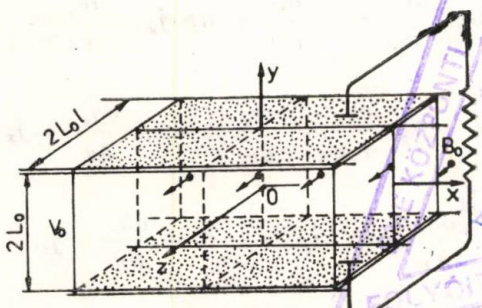


Fig. 1.

Admitem că generatorul este situat într-un cîmp magnetic de inducție $\overline{B}_0$ paralelă cu axa Oz, iar fluidul utilizat este nevîscos, incompresibil și cu conductivitate tensorială. Viteza de injecție a fluidului $\overline{V}_0$ o considerăm paralelă cu axa Ox. Natura diferită a pereților canalului și

prezența cîmpului magnetic vor perturba mișcarea, astfel că, folosind variabilele adimensionale uzuale [2], putem scrie

$$\vec{V} = \vec{i}_1 + \vec{v}\,; \quad \vec{B} = \vec{i}_3 + \vec{b}\,; \quad \vec{E} = \vec{e}_0 + \vec{e}\,; \quad \vec{J} = \vec{j}_0 + \vec{j}, \tag{1}$$

$\vec{v}$, $\vec{b}$, $\vec{e}$, și $\vec{j}$ fiind respectiv perturbațiile vitezei, ale inducției magnetice ale cîmpului electric și ale densității de curent.

Deoarece condițiile problemei nu variază cu timpul, mișcarea va fi staționară. Ecuațiile acestei mișcări sînt

$$\begin{gathered} \operatorname{div} \vec{V} = 0\,; \quad (\vec{V} \cdot \nabla)\,\vec{V} = -\operatorname{grad} p + Rh\,\vec{J} \times \vec{B}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0\,; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0\,; \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{J}, \\ \vec{J} = \overleftrightarrow{Rm}\,(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}), \end{gathered} \tag{2}$$

$\overleftrightarrow{Rm}$ fiind tensorul de conductivitate a fluidului (dat de formula (3.3.4) din [2]). Avînd în vedere reprezentările date de relația (1) și folosind relațiile (2), deducem

$$\vec{j}_0 = 0, \qquad \vec{e}_0 = \vec{i}_2. \tag{3}$$

2. Din geometria problemei rezultă că mișcarea poate fi considerată plană. Folosind această ipoteză și neglijînd produsele mărimilor de perturbație, ecuațiile de mișcare (2) ne conduc la sistemul liniar

$$\begin{gathered} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0\,; \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + Rh \cdot j_y\,; \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} - Rh \cdot j_x, \\ \operatorname{rot} \vec{e} = 0\,; \quad \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} = 0\,; \quad \frac{\partial b_z}{\partial y} = j_x\,; \\ \frac{\partial b_z}{\partial x} = -j_y\,; \quad \frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} = j_z, \\ \vec{j} = Rm\ \overleftrightarrow{\nu}\{\vec{e} + \vec{v} \times \vec{i}_3 + \vec{i}_1 \times \vec{b}\}, \end{gathered} \tag{4}$$

cu

$$\overleftrightarrow{\nu} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & -\sigma_2 & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_1 = \frac{1}{1+\nu^2}\,; \quad \sigma_2 = \frac{\nu}{1+\nu^2}\,; \quad Rm = \sigma\mu L_0 V_0. \tag{5}$$

Relaţiile (4) impun introducerea funcţiei de curent $\psi(x, y)$, a potenţialului electric $\varphi(x, y)$ şi a funcţiei de forţă $\chi(x, y)$ prin relaţiile

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \vec{e} = -\operatorname{grad} \varphi; \quad b_x = \frac{\partial \chi}{\partial y}; \quad b_y = -\frac{\partial \chi}{\partial x}. \tag{6}$$

Eliminînd presiunea din relaţiile (4) şi folosind ecuaţia de continuitate a densităţii de curent, obţinem

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi = 0.$$

Integrînd această ecuaţie pe intervalul $(-\infty, x)$ şi ţinînd seama că la mari distanţe mişcarea este uniformă, se deduce că ψ este funcţie armonică.

$$\Delta \psi = 0 .$$

Pe de altă parte, proiecţiile legii lui Ohm pe axele de coordonare

$$\begin{aligned} j_x &= -Rm\left\{\sigma_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \sigma_2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + b_z\right)\right\}, \\ j_y &= -Rm\left\{\sigma_2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \sigma_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + b_z\right)\right\}, \\ j_z &= Rm\, b_y, \end{aligned} \tag{7}$$

împreună cu penultimile trei ecuaţii din (4) şi ecuaţia de continuitate a densităţii de curent, ne conduc la ecuaţiile

$$\Delta \varphi + \Delta \psi - Rm\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0, \tag{8}$$

$$\Delta b_z - Rm \frac{\partial b_z}{\partial x} = 0 \tag{9}$$

Din (4) şi (6) rezultă imediat

$$\Delta \chi - Rm \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0. \tag{10}$$

3. În variabilele adimensionale utilizate, domeniul mişcării plane este banda $-\infty < x < \infty$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Elctrozii sînt situaţi pe segmentele $-a \leqslant x \leqslant a$ aflate pe dreptele $y = \pm 1$ (fig. 2).

La mari distanţe avem

$$\lim_{x\to-\infty}\psi=0;\ \lim_{|x|\to\infty}\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,$$

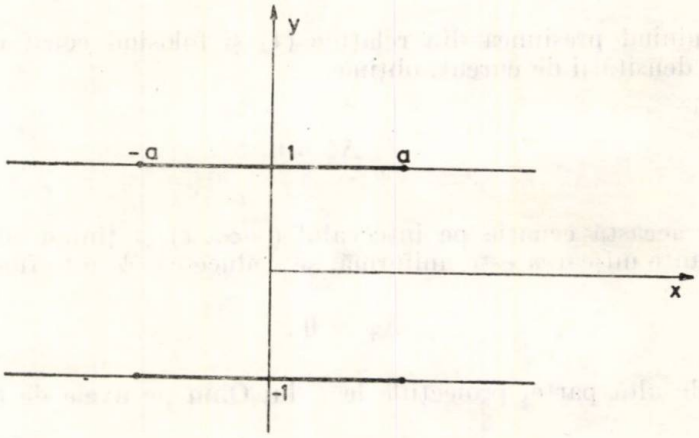


Fig. 2.

iar pe pereţii $y=\pm 1$,

$$\psi(x,\pm 1)=0,\ x\in R,$$

astfel că folosind principiul maximului pentru funcţii armonice, deducem

$$\psi(x,y)\equiv 0,(x,y)\in(-\infty,\infty)\times[-1,1]. \tag{11}$$

Dacă presupunem că la mari distanţe avem

$$\lim_{|x|\to\infty}j_x=0;\ \lim_{|x|\to\infty}b_z=0, \tag{12}$$

din (7) şi (4) rezultă

$$\lim_{|x|\to\infty}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\nu\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=0,\ \lim_{|x|\to\infty}\frac{\partial b_z}{\partial y}=0. \tag{13}$$

Pe pereţii izolatori avem condiţia

$$j_y(x,\pm 1)=0,\ x\notin[-a,\ a],$$

care conduce la

$$b_z(x,\pm 1)=0,\ x\notin[-a,\ a] \tag{14}$$

şi ca urmare rezultă

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, \mp 1) + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \pm 1) = 0, \; x \notin [-a, a]. \tag{15}$$

Din continuitatea componentei tangenţiale a cîmpului electric la traversarea electrozilor, deducem

$$\varphi(x, \mp 1) = \pm \varphi_w, \; x \in [-a, a], \tag{16}$$

φ_w fiind potenţialul exterior al electrozilor. Dacă avem în vedere această condiţie precum şi (4) şi (7), obţinem

$$(1+\nu^2)\frac{\partial b_z(x, \pm 1)}{\partial y} = Rm \cdot \nu \left\{ \frac{\partial \varphi(x, \pm 1)}{\partial y} + b_z(x, \pm 1) \right\}, \; x \in [-a, a]. \tag{17}$$

4. Puterea reală a generatorului este dată [2] de relaţia

$$W_r = \frac{L_0^2 B_0^2 V_0}{\mu} W,$$

cu

$$W = -\int_{-l}^{l} dz \int_{-1}^{1} dy \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E} \, \vec{J} \, dx.$$

Ţinînd seama de ipotezele şi reprezentările introduse mai înainte, obţinem pentru puterea adimensională W expresia

$$W = 2l \int_{-1}^{1} dy \int_{-d}^{d} \operatorname{div} [(\varphi - y)\vec{j}] \, dx.$$

Dacă aplicăm integralei

$$W_d = \int_{-1}^{1} dy \int_{-d}^{d} \operatorname{div} [(\varphi - y)\vec{j}] \, dx$$

formula flux-divergentă pe dreptunghiul $[-d, d] \times [-1,1]$ deducem

$$W = 2l \lim_{d \to \infty} W_d = 2l \left\{ \int_{-a}^{a} [-1 + \varphi(x, 1)] j_y(x, 1) \, dx - \right.$$

$$\left. - \int_{-a}^{a} [1 + \varphi(x, -1)] j_y(x, -1) \, dx \right\}.$$

Avînd în vedere şi relaţiile (7), (16), rezultă în final

$$W = 2l\frac{Rm}{1+\nu^2}(1+\varphi_w)\int_{-a}^{a}\left\{\frac{\partial\varphi(x,1)}{\partial y}+b_z(x,1)\frac{\partial\varphi(x,-1)}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+b_z(x,-1)\,dx\right\}. \tag{18}$$

5. Deoarece puterea generatorului se exprimă numai cu ajutorul lui φ şi b_z, din punct de vedere al teoriei generatoarelor MHD prezintă interes numai determinarea acestor funcţii. Pentru aceasta folosim un procedeu de aproximaţii succesive bazat pe dezvoltarea după parametrul de conductivitate ν

$$\varphi=\sum_{m=0}^{\infty}\nu^m\varphi^{(m)},\quad b_z=\sum_{m=0}^{\infty}\nu^m b^{(m)}.$$

Problema la limită a aproximaţiei de ordinul m a potenţialului electric este

$$\Delta\varphi^{(m)}-Rm\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial x}=0,$$

$$\varphi^{(m)}(x,\pm 1)=\begin{cases}\varphi_w, & m=0\\ 0, & m\geqslant 1\end{cases},\quad x\in[-a,a],$$

$$\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial y}(x,\pm 1)=\begin{cases}0,\ m=0,\\ -\dfrac{\partial\varphi^{(m-1)}}{\partial x}(x,\pm 1),\ m\geqslant 1,\ x\in[-a,a],\end{cases} \tag{19}$$

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial x}=\lim_{|x|\to\infty}\frac{\partial\varphi^{(m-1)}}{\partial y},$$

iar a aproximaţiei de ordinul m a cîmpului magnetic indus

$$\Delta b^{(m)}-Rm\frac{\partial b^{(m)}}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial b^{(m)}}{\partial y}(x,\pm 1)=\begin{cases}0, & m=0\\ Rm\left(\dfrac{\partial\varphi^{(m-1)}}{\partial y}(x,\pm 1)+b^{(m-1)}(x,\pm 1)\right), & m=1,\ x\in[-a,a]\\ Rm\left(\dfrac{\partial\varphi^{(m-1)}}{\partial y}(x,\pm 1)+b^{(m-1)}(x,\pm 1)\right)-\dfrac{\partial b^{(m-2)}}{\partial y}(x,\pm 1), & m\geqslant 2,\end{cases}$$

$$b^{(m)}(x, \pm 1) = 0\ ,\quad x \notin [-a,\ a], \tag{20}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} b^{(m)} = 0,\ \lim_{|x|\to\infty} \frac{\partial b^{(m)}}{\partial y} = 0.$$

Pentru rezolvarea acestor probleme dezvoltăm modele discrete bazate pe metoda elementului finit. Potrivit acestei metode, funcţiile $\varphi^{(m)}$, $b^{(m)}$ le aproximăm prin

$$\varphi^{(m)} = \sum_{k=1}^{NE} \varphi_k^{(m)}\ (x, y)\ ;\quad b^{(m)} = \sum_{k=1}^{NE} b_k^{(m)}(x,\ y)\ , \tag{21}$$

NE fiind numărul de elemente finite al reţelei utilizate, iar $\varphi_k^{(m)}$ şi $b_k^{(m)}$ reprezentări locale de element finit. În continuare folosim elemente finite de formă dreptunghiulară cu laturile paralele cu axele de coordonate şi reprezentările locale

$$\varphi_k^{(m)} = \sum_{j=1}^{4} \varphi_{kj}^{(m)}\ \Phi_j\ (x, y)\ ;\ b_k^{(m)} = \sum_{j=1}^{4} b_{kj}^{(m)}\ \Phi_j\ (x,\ y), \tag{22}$$

funcţiile de interpolare avînd [3] expresiile

$$\Phi_1 = (1 - x)\ (1 - y)\ ;\quad \Phi_2 = x(1 - y)\ ;\quad \Phi_3 = xy\ ;\quad \Phi_4 = (1 - x)y. \tag{23}$$

Aplicînd metoda lui Galerkin elementului finit ce ocupă domeniul D_k, obţinem pentru problema la limită (19) sistemul local de ecuaţii

$$P_{(k)}\ \varphi_{(k)}^{(m)} = Q_{(k)}^{(m)}\ , \tag{24}$$

cu

$$P_{(k)} = \frac{h_k}{6H_k}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & \\ & 2 & 1 & \\ \text{simetric} & & & 2 \end{pmatrix} + \frac{H_k}{6h_k}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ & 2 & -1 & 1 \\ & & 2 & -2 \\ \text{simetric} & & & 2 \end{pmatrix} + Rm\,\frac{h_k}{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{25}$$

$\varphi_{(k)}^{(m)} = (\varphi_{k1}^{(m)},\ \varphi_{k2}^{(m)},\ \varphi_{k3}^{(m)},\ \varphi,_{k4}^{(m)})^T$; $H_k\ h_k$ = dimensiunile elementului. Vectorul $Q_{(k)}^{(m)}$ are componente nenule numai la aproximaţiile de ordin $m > 1$, pentru elementele finite ce au o latură situată pe unul din pereţii

izolatori. De exemplu, pentru elementele finite ce au o latură situată pe unul din pereţii $y = 1$, $x \notin [-a, a]$ avem

$$Q_{(k)}^{(m)} = \frac{1}{2}\left(\varphi_{k3}^{(m-1)} - \varphi_{k4}^{(m-1)}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Din sistemele locale (24) se obţine sistemul global

$$P\,\varphi_{(m)} = \begin{cases} 0\,, & \mathrm{m} = 0, \\ Q\,(\varphi_{(m-1)}), & m > 1, \end{cases} \tag{26}$$

cu

$$P = \sum_{k=1}^{NE} \Omega_{(k)}^{*}\, P_{(k)}\, \Omega_{(k)}\,; \qquad Q\,(\varphi_{(m-1)}) = \sum_{k=1}^{NE} \Omega_{(k)}^{*} Q_{(k)}^{(m)}, \tag{27}$$

$\Omega_{(k)}$ fiind matricea de localizare [4] a elementului finit ce ocupă domeniul D_k, Ω_k^* transpusa sa, iar $\varphi_{(m)}$, vector ale cărui componente sînt valorile aproximaţiei de ordin m a potenţialului electric în nodurile reţelei de elemente finite.

Pentru problema la limită (20) obţinem sistemul local

$$P_{(k)}\, b_{(k)}^{(m)} = Q_{(k)}^{(m)}, \tag{28}$$

cu

$P_{(k)}$ dat de (25), iar $b_{(k)}^{(m)} = (b_{(k1)}^{(m)}, b_{(k2)}^{(m)}, b_{(k3)}^{(m)}, b_{(k4)}^{(m)})^T$.

Vectorul $Q_{(k)}^{(m)}$ are componente nenule numai la aproximaţiile de ordin $m > 1$, pentru elementele finite ce au o latură situată pe unul din electrozi. Astfel, la elementele finite ce au o latură situată pe electrodul superior avem

$$Q_{(k)}^{(1)} = Rm \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{H_k}{h_k}\left(-\dfrac{\varphi_{k1}^{(0)}}{6} - \dfrac{\varphi_{k2}^{(0)}}{3} + \dfrac{\varphi_{k3}^{(0)}}{3} + \dfrac{\varphi_{k4}^{(0)}}{6}\right) + H_k\left(\dfrac{b_{k3}^{(0)}}{3} + \dfrac{b_{k4}^{(0)}}{6}\right) \\ \dfrac{H_k}{h_k}\left(-\dfrac{\varphi_{k1}^{(0)}}{3} - \dfrac{\varphi_{k2}^{(0)}}{6} + \dfrac{\varphi_{k3}^{(0)}}{3} + \dfrac{\varphi_{k4}^{(0)}}{3}\right) + H_k\left(\dfrac{b_{k3}^{(0)}}{6} + \dfrac{b_{k4}^{(0)}}{3}\right) \end{bmatrix},$$

$$Q_{(k)}^{(m)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Rm\left[\dfrac{H_k}{h_k}\left(-\dfrac{\varphi_{k1}^{(m-1)}}{6} - \dfrac{\varphi_{k2}^{(m-1)}}{3} + \dfrac{\varphi_{k3}^{(m-1)}}{3} + \dfrac{\varphi_{k4}^{(m-1)}}{6}\right) + H_k\left(\dfrac{b_{k3}^{(m-1)}}{3} + \dfrac{b_{k4}^{(m-1)}}{6}\right)\right] + \\ Rm\left[\dfrac{H_k}{h_k}\left(-\dfrac{\varphi_{k1}^{(m-1)}}{6} - \dfrac{\varphi_{k2}^{(m-1)}}{3} + \dfrac{\varphi_{k3}^{(m-1)}}{3} + \dfrac{\varphi_{k4}^{(m-1)}}{6}\right) + H_k\left(\dfrac{b_{k3}^{(m-1)}}{3} + \dfrac{b_{k4}^{(m-1)}}{6}\right)\right] + \end{bmatrix}$$

$$+\frac{H_k}{h_k}\left(-\frac{b_{k1}^{(m-2)}}{6}-\frac{b_{k2}^{(m-2)}}{3}+\frac{b_{k3}^{(m-2)}}{3}+\frac{b_{k4}^{(m-2)}}{6}\right)\Bigg]$$

$$+\frac{H_k}{h_k}\left(-\frac{b_{k1}^{(m-2)}}{3}-\frac{b_{k2}^{(m-2)}}{6}+\frac{b_{k3}^{(m-2)}}{6}+\frac{b_{k4}^{(m-2)}}{3}\right)\Bigg].$$

Sistemul global de ecuații al acestei probleme este

$$P\cdot b_{(m)}=\begin{cases}0 & m=0,\\ Q(\varphi_{(m-1)},\ b_{(m-1)}) & m=1,\\ Q(\varphi_{(m-1)},\ b_{(m-1)},\ b_{(m-2)}) & m>1,\end{cases}\tag{29}$$

cu $P, Q\ (\varphi_{(m-1)},\ b_{(m-1)})$ și $Q\ (\varphi_{(m-1)},\ b_{(m-1)},\ b_{(m-2)})$ date de (27), în care $Q_{(k)}^{(1)}$ $Q_{(k)}^{(m)}$ au valorile precizate mai sus.

Relațiile de recurență (26), (29) permit determinarea aproximației de orice ordin a potențialului electric și a cîmpului magnetic indus. Calculele numerice efectuate pentru prima aproximație au condus la puterea

$$W_r\cong 34\ \text{MW}$$

în cazul

$$l=0{,}5;\qquad a=0{,}6;\qquad V_0=1000\ \text{ms}^{-1},\qquad B_0=5\ \text{tesla},\qquad \sigma=5\ mh_0,$$

$$\mu=4\pi\cdot 10^{-7};\quad \varphi_\omega=0{,}3.$$

Primită la redacție la 24 septembrie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. L. DRAGOȘ, *Sur l'influence des extrémités des electrodes sur l'ecoulement magnètohydrodynamique dans les cannaux. II.* C. R. Acad. Sci. Paris, **263 A**, 352 (1966).
2. L. DRAGOȘ, *Magnetofluid dynamics*, Edit. Academiei, București, România and Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent, England 1975.
3. J. J. CONNOR, C. A. BREBBIA, *Finite element Techniques for Fluid Flow*, Butterworths, London, 1976.
4. J. T. ODEN, *Finite elements of nonlinear continua*, McGraw-Hill, New York, 1972.

DRENAJUL GRAVITAȚIONAL UNIDIMENSIONAL NESTAȚIONAR AL PETROLULUI

de ION CREȚU

Institutul de petrol și gaze Ploiești

În lucrare este studiată posibilitatea prevederii producției cumulative de petrol în cazul drenajului gravitațional al acestuia. În acest sens sînt prezentate soluții analitice ale problemei drenajului gravitațional unidimensional obținute fie prin admiterea dezlocuirii de tip piston și neglijarea sau luarea în considerare a efectelor capilare de capăt, fie prin tratarea aspectelor legate de dezlocuirea petrolului în condiții bifazice.
Rezultatele calculelor efectuate cu ajutorul soluțiilor analitice sînt comparate cu valorile producției cumulative obținute pe o coloană de nisip în condiții de laborator.

INTRODUCERE

Cercetări de laborator și de șantier au indicat obținerea unor valori ale factorului final de recuperare surprinzător de mari, în cazul drenajului gravitațional al petrolului din medii poroase cu saturație în apă interstițială, pentru care apa este faza umectantă [1, 2, 5, 7].

Pentru studiul și cercetarea drenajului gravitațional unidimensional se pot face experimente de laborator pe o coloană de mediu poros saturat cu fluide ca în zăcămîntul respectiv.

O sondă dintr-un șir situat paralel cu contactul liniar inactiv apă-petrol al unui strat productiv înclinat generează o mișcare unidimensională (paralelă cu planul de stratificație) în majoritatea zonei ei de acțiune, cu excepția unei regiuni relativ mici din vecinătatea sondei, în care mișcarea converge spre sondă. Această mișcare unidimensională a petrolului devine mișcare gravitațională atunci cînd presiunea pe frontiera superioară a stratului de petrol scade la valori mici, apropiate de valoarea presiunii atmosferice. Presupunînd că frontiera superioară a stratului productiv este impermeabilă constituită, spre exemplu, dintr-o falie etanșă (fig. 1) și ținînd seama că petrolul de regulă conține gaze dizolvate, prin scăderea presiunii (în timpul exploatării) sub valoarea presiunii de saturație, gazele vor ieși din soluție și o parte din ele vor curge în contracurent cu petrolul, formînd un cap de gaze secundar (în ipoteza că nu a existat un cap de gaze primar). Prin deplasarea contactului gaze-petrol, impusă de necesitatea ocupării de către gaze a locului petrolului migrat din această zonă spre sondă, presiunea în capul de gaze va scădea către valoarea presiunii atmosferice și chiar sub aceasta (adică la o presiune de vacuum) datorită faptului că gazele segregate gravitațional nu vor mai fi în măsură să împiedice declinul presiunii în zona de gaze. Suprafața de

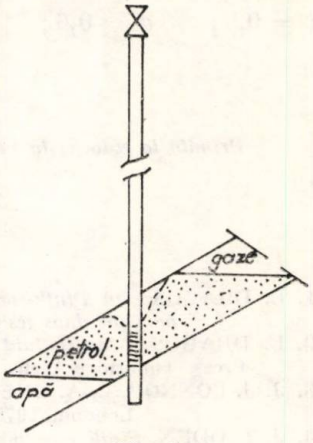


Fig. 1.

contact gaze-petrol va deveni o suprafață liberă atunci cînd presiunea gazelor va fi egală cu presiunea atmosferică. Existența unei sonde în zona capului de gaze care să fie deschisă în atmosferă sau racordată la o conductă de gaze de mică presiune ar asigura cantitatea de gaze necesară înlocuirii petrolului drenat. În absența unei astfel de sonde de alimentare cu gaze, debitul sondei de extracție va scădea rapid de îndată ce presiunea gazelor va începe să coboare sub presiunea atmosferică și ca urmare, nivelul dinamic al petrolului în sonda de extracție, echipată cu pompă de adîncime, va scădea implicînd coborîrea punctului de fixare al pompei pînă cînd nivelul dinamic va coborî sub capul stratului productiv și va determina astfel formarea unei suprafețe libere în zona mediului poros din vecinătatea sondei (fig. 1). În acest caz, grosimea stratului și coeficientul de filtrare trebuie să fie suficient de mari pentru a asigura atît posibilitatea plasării pompei de extracție în zona stratului productiv, cît și o valoare relativ mare a debitului stratului, cerută de valoarea debitului pompei impusă prin lungimea minimă a cursei și prin numărul minim de curse duble pe minut ale pistonului pompei. Este evident că pompa poate fi plasată și sub baza stratului productiv, realizîndu-se în prealabil adîncirea sondei în stratul impermeabil care mărginește inferior stratul de petrol.

Realizînd, printr-o sondă, comunicația zonei superioare a stratului productiv cu atmosfera, după ce presiunea în această zonă a scăzut la o valoare apropiată presiunii atmosferice, se asigură condițiile necesare drenajului gravitațional unidimensional al petrolului spre sondele de extracție. Unei sonde de extracție îi revine o zonă de acțiune de formă paralelipipedică (fig. 2). Drenajul gravitațional unidimensional astfel definit poate fi studiat pe o coloană verticală de mediu poros, rezultatele urmînd a fi corectate relativ la unghiul α de înclinare a stratului productiv.

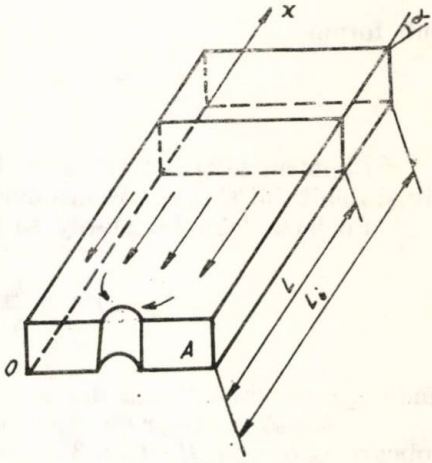


Fig. 2.

Se poate constata că drenajul gravitațional al petrolului este asociat cu un proces de dezlocuire a petrolului de către gaze și este împărțit în două zone: zona inferioară, în care are loc mișcarea monofazică a petrolului în prezența saturației în petrol egală cu saturația inițială a acestuia, și zona superioară, în care se mișcă fluidul bifazic petrol-gaze în condițiile unei saturații în petrol descrescătoare cu înălțimea pînă la o valoare limită inferioară egală cu saturația reziduală în petrol s_{rp}. Zona în care saturația în petrol este egală cu s_{rp} este zona drenată gravitațional și în ea are loc mișcarea monofazică a gazelor de dezlocuire a petrolului.

În cadrul studiului drenajului gravitațional unidimensional al petrolului este utilă stabilirea legilor de variație în timp a producției cumulative și a debitului sondei.

EVOLUȚIA PRODUCȚIEI CUMULATIVE ȘI A DEBITULUI

Fie drenajul gravitațional al petrolului într-o coloană de mediu poros. Admițînd că dezlocuirea petrolului de către gaze este de tip piston, suprafața liberă va coborî în timpul t de la cota inițială h_i (fig. 3) la cota $h(t)$, lăsînd în spatele ei o saturație în petrol rezidual constantă s_{rp}. Producția cumulativă poate fi exprimată ca diferența dintre cantitatea de petrol conținută în cilindrul de înălțime $h_i - h$ în momentul inițial și la timpul t, adică

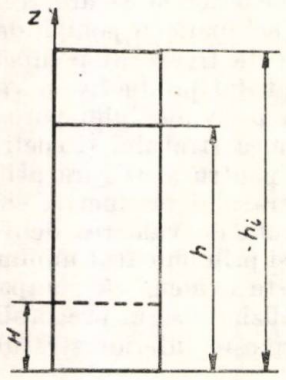


Fig. 3.

$$V = Am(s_{ip} - s_{rp})(h_i - h), \tag{1}$$

unde A este aria secțiunii circulare a coloanei, m — porozitatea mediului poros, iar s_{ip} — saturația inițială în petrol.

Debitul de petrol se poate obține din relația de definiție

$$Q = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}, \tag{2}$$

sub forma

$$Q = -Am(s_{pi} - s_{rp})\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}. \tag{3}$$

Conform relațiilor (1) și (3) legile de variație ale volumului cumulativ și debitului sînt cunoscute dacă se cunoaște funcția $h(t)$.

Pe baza legii lui Darcy se poate scrie

$$Q = A\frac{k_p}{\mu_p}\frac{\partial}{\partial z}(p + \rho_p g z), \tag{4}$$

unde μ este viscozitatea dinamică, iar ρ — densitatea petrolului.

Datorită efectelor de capăt, debitul se anulează cînd suprafața liberă coboară la o cotă H (fig. 3), ceea ce corespunde existenței unei presiuni negative pe suprafața de separație gaze-lichid din poziția de echilibru, dată de relația

$$p_H = -\rho_p g H. \tag{5}$$

Deci relația (4) este definită pentru $h \leqslant z \leqslant H$, iar gradientul de presiune în acest interval poate fi acceptat ca fiind

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\rho_p g H}{h} \tag{6}$$

și formula (4) devine

$$Q = A\frac{gk\,\rho_p}{\mu_p}\left(1 - \frac{H}{h}\right). \tag{7}$$

Pentru H se poate lua ca valoare $0{,}06\ h_i$.

Eliminînd debitul Q între relațiile (3) și (7), se obține ecuația diferențială

$$-\frac{h\,\mathrm{d}h}{h-H} = C\,\mathrm{d}t, \tag{8}$$

care, după integrare între limitele h_i, h, respectiv 0, t, dă formula

$$t = \frac{h_i}{C}\left[1 - \frac{h}{h_i} + \frac{H}{h_i}\ln\frac{\frac{h_i}{H}-1}{\frac{h}{H}-1}\right], \tag{9}$$

unde

$$C = \frac{gk\,\rho_p}{m\mu_p\,(s_{ip} - s_{rp})}. \tag{10}$$

Relația (9) exprimă dependența dintre h și t, fără a exista posibilitatea explicitării lui h.

Dacă se neglijează efectele de capăt, $H = 0$, și din relația (9), rezultă expresia

$$h = h_i - C_t, \tag{11}$$

care, introdusă în formulele (1) și (3), duc la legea de variație liniară a volumului cumulativ cu timpul, respectiv la invariabilitatea debitului, adică

$$V = Bt \tag{12}$$

și

$$Q = B, \tag{13}$$

unde

$$B = A\frac{k\rho_p\,g}{\mu_p}. \tag{14}$$

În cazul luării în considerare a zonei mișcării bifazice petrol-gaze, expresia producției cumulative depinde de invadarea sau neinvadarea

frontierei de ieșire din sistem de către gaze [6]. Înainte de invadare, producția cumulativă este dată de relația

$$V = A\, h_i m^* \bar{t}/N_g, \tag{15}$$

unde

$$N_g = \frac{gk\,(\rho_p - \rho_g)}{\mu_p\, v} \tag{16}$$

este numărul de gravitație (definit ca raportul dintre forța de gravitație și forța de frecare),

$$\bar{t} = \frac{gh\,(S_p - \rho_g)t}{m^*\,\mu_p\, h_i}, \tag{17}$$

$$v = v_p + v_g, \tag{18}$$

$$m^* = m(1 - s_{ai} - s_{rp}), \tag{19}$$

s_{ai} este saturația în apă interstițială, iar indicii p și g se referă la petrol respectiv la gaze.

Dacă se admite că dezlocuirea are loc în condițiile căderii libere ($N_g = 1$), iar $\rho_p - \rho_g \cong \rho_p$, relația (15) îmbracă forma

$$V = \frac{Ag\,k\,\rho_p\,t}{\mu_p}, \tag{20}$$

care este identică cu relația (12).

După invadarea frontierei de ieșire din sistem, producția cumulativă se exprimă astfel

$$V = A\, h_i m^* [1 - s^*_{pe} - \bar{f}_p\,(s^*_p)\bar{t}], \tag{21}$$

unde

$$s^*_p = \frac{s_p - s_{rp}}{1 - s_{ai} - s_{rp}}, \tag{22}$$

$$\bar{f}_p = \frac{\dfrac{1}{N_g}\dfrac{k_{rp}\,\mu_g}{k_{rg}\,\mu_p} + k_{rp} + \dfrac{\sigma\sqrt{m/k}}{gh_i\,\rho_p}\dfrac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}s_p}\dfrac{\partial s^*_p}{\partial \bar{z}}}{1 + \dfrac{k_{rp}\,\mu_g}{k_{rg}\,\mu_p}}, \tag{23}$$

$$\bar{z} = \frac{h_i - z}{h_i}, \tag{24}$$

s^*_{pe} este s^*_p la $\bar{z} = 1$, σ — tensiunea interfacială, $J(s^*_p)$ — funcția Leverett, k_{rp}, k_{rg} — permeabilitățile relative ale petrolului și gazelor.

Cînd fracția de petrol din curent ($f_p = \bar{f}_p N_g$) prezintă un punct de inflexiune, domeniul de variație a saturației prezintă un front de discon-

tinuitate numit front de șoc, care corespunde de fapt unei zone de tranziție capilară. Conform relației (23), efectul forțelor capilare este neglijabil în zona în care gradientul saturației $\partial s_p^*/\partial \bar{z}$ este mic. Această condiție este îndeplinită pentru marea majoritate a domeniului drenajului gravitațional, cu excepția zonei de tranziție capilară, care reprezintă doar o mică fracțiune din zăcământ. De asemenea, în cadrul zonei bifazice a drenajului gravitațional raportul mobilităților petrolului și gazelor este neglijabil. În aceste condiții, relația (23) se reduce la

$$\bar{f}_p = k_{rp} \tag{25}$$

și ecuația (21) devine

$$V = A\, h_i\, m^* \,[1 - s_{pe}^* + k_{rp}\,(s_{pe}^*)\,\bar{t}]. \tag{26}$$

Această ecuație arată că pentru determinarea producției cumulative, după invadare este necesară cunoașterea relației permeabilitate-saturație la frontiera de ieșire din sistem.

Pe de altă parte, ecuația fundamentală a mișcării bifazice are forma

$$\frac{\partial \bar{f}_p}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial s_p}{\partial \bar{t}} = 0 \tag{27}$$

și în baza relației (25) poate fi transcrisă astfel:

$$k'_{rp}\frac{\partial s_p}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial s_p}{\partial \bar{t}} = 0. \tag{28}$$

E i îi corespunde ecuația caracteristică

$$\frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}\bar{t}} = k'_{rp}, \tag{29}$$

care are soluția

$$\bar{z}(s_p^*) = k'_{rp}\,(s_p^*)\,\bar{t}. \tag{30}$$

Dacă se admite că relația permeabilitate-saturație este de forma

$$k_{rp} = b\, s_p^{*n}, \tag{31}$$

și se pune relației (30) condiția la limită $s_p^* = s_{pe}^*$ pentru $\bar{z} = 1$, se obține

$$s_{pe}^* = \left(\frac{1}{nb\bar{t}}\right)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{32}$$

Pe baza relațiilor (31) și (32), ecuația (26) devine

$$V = A\, h_i\, m^* \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{nbt}\right)\right]^{\frac{1}{n-1}} \tag{33}$$

și necesită pentru calculul producției cumulative cunoașterea coeficientului adimensional b și a exponentului n.

REZULTATE EXPERIMENTALE ȘI DE CALCUL

Într-un tub vertical de plastic avînd aria $A = 26{,}878$ cm^2, s-a introdus nisip de porozitate $m = 0{,}396$ și permeabilitate $k = 122{,}59 \cdot 10^{-12}$ m^2, pe înălțimea $h_i = 208{,}8$ m. Coloana de nisip a fost saturată cu petrol în condițiile existenței saturației ireductibile în apă $s_{ai} = 0{,}21$. Petrolul are densitatea $\rho_p = 860$ kg/m^3 și viscozitatea $\mu_p = 27{,}584 \cdot 10^{-3}$ Ns/m^2.

Tabelul 1

Nr. crt.	Δt	t min	ΔG gf	G gf	V cm^3
1.	1′	1	11,2	11,2	13,02
2.	1′	2	8	19,2	22,32
3.	1′	3	7	26,2	30,46
4.	1′	4	6,4	32,6	37,91
5.	1′	5	6	38,6	44,88
6.	3′	8	15,8	54,4	63,25
7.	3′	11	14,7	69,1	80,35
8.	5′	16	22,5	91,6	106,51
9.	5′	21	22	113,6	132,09
10.	15′	36	72	185,6	215,81
11.	15′	51	73,5	259,1	301,28
12.	30′	81	155,4	414,5	481,98
13.	30′	111	104	518,5	602,91
14.	1^h	171	148	666,5	775
15.	2^h	291	227	893,5	1038,95
16.	3^h	471	177	1070,5	1244,77
17.	8^h	951	237,8	1308,3	1521,28
18.	24^h	2391	104	1412,3	1642,21
19.	48^h	5271	72,3	1484,6	1726,28
20.	72^h	9591	45,5	1530,1	1779,19
21.	96^h	15251	29,7	1559,8	1813,72
22.	120^h	22451	25,5	1585,3	1843,37

În tabelul 1 sînt prezentate valorile producției cumulative de petrol, măsurate la diverse momente de timp, în cadrul drenajului gravitațional al petrolului din coloana de nisip, avînd caracteristicile menționate.

Folosind relația (9), pentru diferite valori date lui h s-au calculat valorile timpului și cu ajutorul formulei (1) s-au determinat valorile producției cumulative. Rezultatele obținute obținute sînt prezentate în tabelul 2. În coloana a 4-a a acestui tabel sînt date valorile producției cumulative calculate cu relația (12) la timpii respectivi.

În scopul comparării rezultatelor experimentale cu cele calculate, în figura 4 s-au reprezentat grafic producția cumulativă în funcție de timp pe baza valorilor din tabelele 1 și 2. După cum se observă, în prima

Tabelul 2

$h_i - h$ cm	Timpul t, min	V (9) cm^3	V(12) cm^3
1	1,286	7,45	7,926
2	2,57	14,90	15,841
3	3,86	22,35	23,790
5	6,43	37,25	39,660
10	12,88	74,50	79,389
15	19,33	111,75	119,145
20	25,80	149,01	159,025
50	64,88	372,52	399,90
100	131,69	745,06	811,70
150	203,28	1117,58	1252,97
190	282,60	1415,60	1741,87
195	316,60	1452	1951,44
195,93	386,50	1459,6	2382,28

parte a drenajului gravitațional producția cumulativă obținută experimental variază liniar cu timpul, în concordanță cu soluțiile teoretice stabilite în condițiile neglijării sau luării în considerare a efectelor capilare

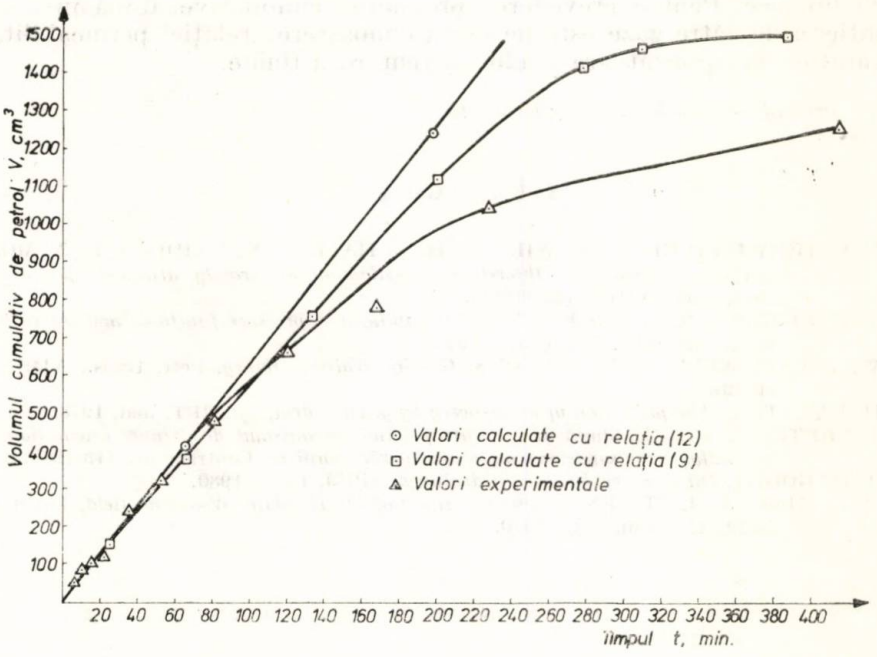


Fig. 4.

de capăt. Începînd de la o anumită valoare a duratei de exploatare, prsoducția cumulativă experimentală evoluează după o curbă (de pantă descrescătoare) asemănătoare celei descrise de soluția (12) care ține seama de efectele capilare.

CONCLUZII

Soluționarea problemei drenajului gravitațional unidimensional prin admiterea dezlocuirii de tip piston oferă un procedeu simplu de prevedere a comportării zăcămîntului respectiv. Neglijarea efectelor de capăt duce la o soluție care exprimă dependența liniară dintre producția cumulativă și timp, dependență ce este confirmată experimental numai în prima parte a exploatării zăcămîntului.

Prin luarea în considerare a efectelor de capăt se obține o soluție îmbunătățită, care, în condițiile determinării cu precizie sporită atît a caracteristicilor sistemului rocă-petrol, cît și a înălțimii capilare ce definește efectele de capăt, poate fi folosită cu succes pentru prevederea evoluției producției cumulative și deci a factorului de recuperare a petrolului în regim gravitațional.

Dacă gazele care iau locul petrolului drenat gravitațional prezintă o presiune suficient de mare pentru a învinge efectele de capăt, va exista un moment în care gazele vor invada frontiera de ieșire a petrolului din mediul poros, după care petrolul va fi dezlocuit de gaze în condițiile mișcării bifazice. Pentru prevederea producției cumulative, după invadarea frontierei de către gaze este necesară cunoașterea relației permeabilitate-saturație corespunzătoare acelui sistem rocă-fluide.

Primită la redacție la 20 ianuarie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. P. L. TERWILLIGER, L. E. WILSEY, H. N. HALL, P. M. BRIDGES, R. A. MORSE *An experimental and theoretical investigation of gravity drainage performance*, Petr. tras., AIME, **192** (1951).
2. J. M. DUMORE, R. S. SCHOLS, *Drainage capillary — pressure functions and the influence of connate water*, SPEJ, oct., 1974.
3. W. T. CARDWELL, R. L. PARSONS, *Gravity drainage theory*, Petr. trans., AIME, **179** (1949).
4. H. DYKSTRA, *The prediction of oil recovery by gravity drainage*, JPT, mai, 1978.
5. I. CREȚU, E. SOARE, *Studii și cercetări privind mecanismul de drenare gravitațională a petrolului prin sonde executate din lucrări miniere*, Contract nr. 113/1979.
6. J. HAGOORT, *Oil recovery by gravity drainage*, SPEJ, iunie, 1980.
7. R. L. KING, J. H. STILES, *A reservoir study of the Hawkins Woodbine field*, Paper SPE 2972, Houston, oct., 1970.

LARGAREA FORȚATĂ A REZERVOARELOR ACROȘATE

de AL. MARINESCU
Institutul național pentru creație științifică și tehnică, București

În lucrare se prezintă o metodă expeditivă de calcul privind aeromecanica largării forțate a rezervoarelor de combustibil acroșate. Calculele numerice efectuate pe baza metodei descrisă în lucrare pentru rezervoare utilizate în serviciu, au fost pe deplin confirmate în urma largării în zbor, atît în ce privește mișcarea centrului de greutate, cît și mișcarea în jurul centrului de greutate.

1. NOTAȚII

l_{AO} — distanța centrului de presiune al ampenajului față de centrul de greutate al rezervorului;
l_C — lungimea carenei rezervorului;
l_v — lungimea ogivei din față;
l_f — lungimea ogivei din spate;
d_{med} — diametrul secțiunii mediane (maxime);
d — distanța între bordul de atac al ampenajului orizontal și extremitatea din spate a rezervorului;
K_y — raza de girație a rezervorului;
A — aria secțiunii frontale maxime;
S_{AO} — suprafața ampenajului;
S_{term} — aria secțiunii terminale a carenei;
G_r — greutatea rezervorului;
N — forța laterală (normală);
F — forța dispozitivului pirotehnic;
w — viteza verticală a rezervorului (după percuție);
V — viteza de zbor a avionului;
m — masa rezervorului;
I_y — momentul de inerție al rezervorului în jurul axei transversale;
ε — unghiul (mic) de înclinare al rezervorului sub acțiunea unei perturbații;
α — incidența;
α_e — incidența efectivă în condițiile mișcării perturbate a rezervorului;
V_{AO} — volumul ampenajului;
C_x — coeficientul de rezistență la înaintare al rezervorului;
C_N — coeficientul forței normale;
C_z — coeficientul de portanță;
C_m — coeficientul de moment al rezervorului în jurul axei transversale;
$M_{aerod\,CG}$ — momentul forțelor aerodinamice pe rezervor în jurul axei transversale.

2. INTRODUCERE

Largarea rezervoarelor suplimentare acroșate prezintă serioase dificultăți în special pentru cazurile de acroșare sub aripă, cînd pilonii de susținere se află în dreptul ampenajului orizontal.

În aceste cazuri există pericolul lovirii ampenajului orizontal de către rezervor. Dispozitive pirotehnice se impun pentru aceste cazuri, și în acest sens s-au imaginat și realizat dispozitive perfecționate.

Metoda descrisă în lucrare permite evaluarea și poziționarea rațională a forței de percuție a dispozitivului pirotehnic în raport cu centrul de greutate al rezervorului și studiul mișcării acestuia sub acțiunea forței de percuție, dînd posibilitatea să se poată aprecia dacă prin largare rezervorul se află într-o poziție care să nu afecteze ampenajul orizontal.

Deoarece dispozitivul pirotehnic nu permite decît largarea verticală a rezervoarelor, este strict necesar ca acestea să păstreze pînă la o distanță egală cu cel puțin lungimea lor o poziție aproximativ paralelă cu axa longitudinală a avionului.

Această cerință poate fi îndeplinită numai dacă în primul rînd dispozitivul pirotehnic va avea o poziție adecvată față de centrul de greutate al rezervorului și în al doilea rînd dacă ampenajul rezervorului asigură o mișcare aperiodic amortizată a acestuia în jurul centrului de greutate.

Pentru o valoare determinată a forței de percuție, dezvoltată de dispozitivul pirotehnic, desigur că există o viteză optimă de zbor a avionului purtător astfel ca timpul de întîlnire dintre rezervor și ampenaj, precum și viteza medie de cădere pe verticală a rezervorului, să fie maxime.

Această viteză este de dorit să fie cît mai aproape de viteza maximă cu acroșaje a avionului (în general subsonică).

3. MIȘCAREA CENTRULUI DE GREUTATE A REZERVORULUI

O evaluare a reacțiunilor aerodinamice pe rezervor în timpul largării este imposibilă fără a avea o indicație cît de vagă asupra mișcării centrului de greutate al acestuia. Deci un studiu asupra mișcării centrului de greutate al rezervorului se impune la primul raționament.

În acest studiu însă este necesară introducerea forțelor aerodinamice longitudinală și laterală (normală) pe care nu le cunoaștem. Deoarece în timpul largării aceste forțe sînt variabile, ele vor intra în ecuațiile de mișcare ca funcții de viteză pe orizontală, respectiv pe verticală, ceea ce într-o schemă simplificată este posibil de exprimat.

În ipoteza că poziția rezervorului în cădere se menține cîtva timp aproximativ paralelă cu axa longitudinală a avionului, considerăm rezervorul în prezența curentului de viteză V (fig. 1*)).

Sub acțiunea forței, dispozitivului pirotehnic care are o variație ca în figura 2, diferența dintre forța normală în zbor de regim pe carena rezervorului N_r și greutatea rezervorului gol G_r, se neglijează față de forța dispozitivului pirotehnic F.

Trebuie subliniat că largarea rezervorului gol ridică mai multe probleme decît aceea a rezervorului plin și în plus fiind cea mai vizată în exploatare o vom avea în centrul atenției în dezvoltarea lucrării de față.

Mișcarea o studiem față de un sistem Oxy cu originea la $t = 0$ în centrul de greutate al rezervorului.

*) Interacțiunile se neglijează.

Deoarece apariția forței aerodinamice laterale ca urmare a acțiunii forței dispozitivului pirotehnic necesită un timp pe care-l apreciem de ordinul de mărime al variației liniare, mișcarea pe verticală a rezervorului o vom considera în trei etape și anume :

$$0 < t < t_1 ; \quad t_1 < t < t_2 ; \quad t_2 < t < t_f,$$

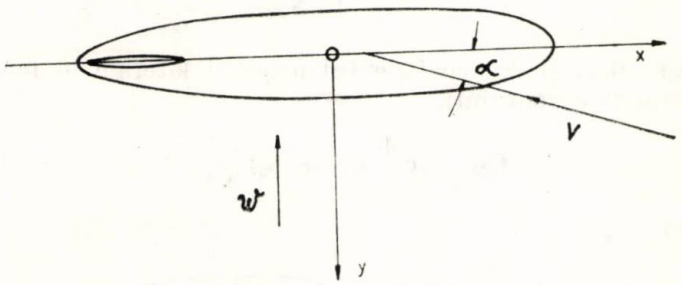


Fig. 1.

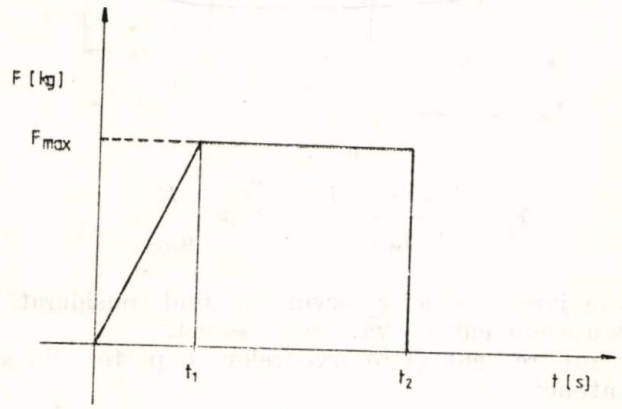


Fig. 2.

marginea superioară t_f a intervalului în care se urmărește mișcarea fiind justificată în cele ce urmează.

În prima etapă, neglijînd forța aerodinamică laterală și pornind de la teorema impulsului, ecuația de mișcare este

$$m \frac{dw}{dt} = F. \tag{1}$$

Scriind că $F = kt$, unde $k = \frac{F_{max}}{t_1}$ și integrînd ecuația (1) cu condiția $w = 0$ la $t = 0$, avem

$$w = \frac{k}{m} t^2. \tag{2}$$

În cea de-a doua etapă ($t_1 < t < t_2$), cu ipotezele de mai sus, vom considera forţa aerodinamică (normală).

În ipoteza corpului subţire, coeficientul forţei laterale (normale) pe carenă, C_{NC}, se compune din coeficientul [1].

$$C_{NCP} = \frac{2w}{V} \frac{S_{term}}{S_{med}},$$

datorat presiunilor, şi din coeficientul mişcării laterale în mediu vîscos (influenţa ruperii curentului),

$$C_{NCf} = c \frac{4}{\pi} (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{w^2}{V^2},$$

unde (vezi fig. 3)

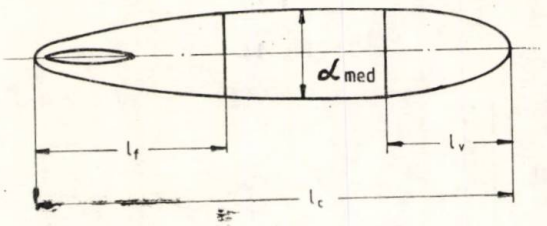


Fig. 3.

$$\lambda_1 = \frac{l_c - l_v - l_f}{d_{med}}, \quad \lambda_2 = \frac{l_f}{d_{med}}.$$

Mişcarea în jurul carenei rezervorului fiind considerată turbulentă, se va lua pentru coeficientul c valoarea $c = 0{,}4$.

Pentru cazul frecvent al rezervoarelor cu partea din spate terminată cu vîrf, atunci

$$\frac{S_{term}}{S_{med}} = \frac{S_{term}}{A} = 0$$

şi deci

$$C_{NCP} = 0.$$

Considerînd şi pe ampenaj curentul transversal de viteză w, se poate lua $C_{NA} = \text{const} = 1{,}15$.

Scriind că pe carenă, respectiv pe ampenaj, forţele laterale (normale) sînt

$$N_c = C_{NC_f} \frac{\rho}{2} A w^2 = \frac{2 \rho A c}{\pi} (\lambda_1 + \lambda_2) w^2,$$

$$N_A = C_{NA} \frac{\rho}{2} S_{AO} w^2,$$

atunci forța normală totală este

$$N = N_c + N_A = \left[2 \frac{\rho A c}{\pi} (\lambda_1 + \lambda_2) + C_{NA} \frac{\rho}{2} S_{AO} \right] w^2.$$

Scriind ecuația de mișcare în acest caz,

$$m \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + N = F, \tag{3}$$

și ținînd seama de cele de mai sus, ecuația (3) se poate scrie sub forma

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + a^* w^2 = b, \tag{4}$$

unde

$$a^* = \frac{\rho A}{m} \left[\frac{2c}{\pi} (\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{C_{NA}}{2} \frac{S_{AO}}{A} \right],$$

$$b = \frac{F}{m}.$$

Punem ecuația (4) sub forma

$$\frac{\mathrm{d}w}{b - a^* w^2} = \mathrm{d}t \tag{5}$$

sau, notînd $\varkappa = \sqrt{\frac{b}{a^*}}$ și $a = a^* \varkappa$,

$$\frac{\mathrm{d}w}{\varkappa - w} + \frac{\mathrm{d}w}{\varkappa + w} = 2a \, \mathrm{d}t, \tag{6}$$

unde prin integrare se obține

$$w = \varkappa \frac{C_1 \mathrm{e}^{2at} - 1}{C_1 \mathrm{e}^{2at} + 1}. \tag{7}$$

Constanta C_1 se determină din condiția ca la $t = t_1$, $w = w_1$ și are expresia

$$C_1 = \frac{\varkappa + w_1}{\mathrm{e}^{2at_1} (\varkappa - w_1)},$$

cu care expresia (7) a vitezei devine

$$w = \varkappa \frac{(\varkappa + w_1)\, e^{2at} - (\varkappa - w_1)\, e^{2at_1}}{(\varkappa + w_1)\, e^{2at} + (\varkappa - w_1)\, e^{2at_1}}. \tag{8}$$

Se poate ușor observa din (8) și calculele au confirmat, că pentru $t > t_1$, creșterea vitezei este destul de mică, ceea ce fizic este legitim din cauza acțiunii forței laterale (normale).

Pentru intervalul $t_2 < t < t_f$ considerăm forța dispozitivului pirotehnic nulă și ecuația de mișcare este

$$\frac{dw}{w^2} = -\tilde{a}\, dt, \tag{9}$$

a cărei soluție, cu condiția $t = t_2$, $w = w_2$, poate fi pusă sub forma

$$w = \frac{w_2}{\tilde{a}(w_2 t - w_2 t_2) + 1}, \tag{10}$$

unde $\tilde{a} \cong 15{,}3$ pentru o gamă largă de carene de rezervor.

Valoarea timpului t_f se alege pe considerente de cinematică, urmărindu-se timpul de întîlnire dintre ampenajul orizontal și partea terminală

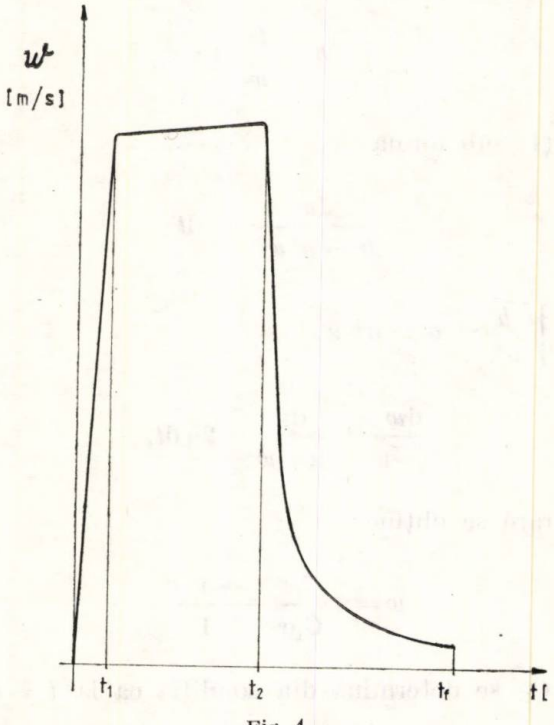


Fig. 4.

a rezervorului, astfel ca pentru o viteză medie w_m acest timp să fie suficient ca rezervorul să se afle la o distanță sub avion care să egaleze sau să întreacă lungimea sa.

Avînd variația completă a vitezei în intervalul $0 - t_f$, care arată ca în figura 4, viteza medie poate fi calculată cu relația

$$w_m = \frac{\int_0^{t_f} w \, dt}{t_f}, \tag{11}$$

integrala efectuîndu-se pe intervale sau mai comod grafic.

În ceea ce privește mișcarea pe orizontală a rezervorului desprins de avion, aceasta are loc sub acțiunea de frînare a forței de rezistență la înaintare. Ecuația de mișcare este

$$m \frac{dV}{dt} = - C_x \frac{\rho}{2} A V^2, \tag{12}$$

de unde

$$dt = - \frac{m}{C_x \frac{\rho}{2} A} \frac{dV}{V^2}.$$

Integrînd, obținem

$$t = \frac{m}{C_x \frac{\rho}{2} A} \frac{1}{V} + C \tag{13}$$

și din condiția ca la $t = 0$, $V = V_{t=0}$, avem

$$C = - \frac{m}{C_x \frac{\rho}{2} A} \frac{1}{V_{t=0}},$$

cu care

$$t = \frac{m}{C_x \frac{\rho}{2} A} \left[\frac{1}{V} - \frac{1}{V_{t=0}} \right] \tag{14}$$

sau

$$V = - \frac{1}{\frac{1}{V_{t=0}} + \frac{C_x \frac{\rho}{2} A}{m} t}. \tag{15}$$

Un aspect important în mișcarea frînată pe orizontală a rezervorului apare în legătură cu timpul în care bordul de atac al ampenajului orizontal ajunge în dreptul extremității din spate a rezervorului.

Cinematic, problema este echivalentă cu întîlnirea a două mobile, A și B, de viteza V_1 și V_2 (fig. 5).

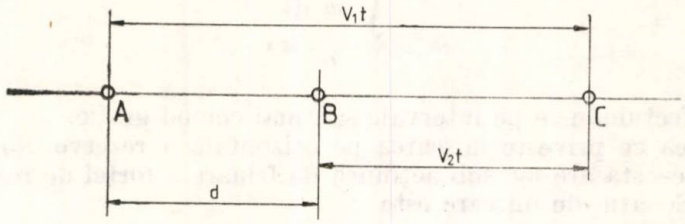


Fig. 5.

Deoarece după largare viteza pe orizontală a rezervorului are o descreștere mică în intervalul de timp interesînd mișcarea, vom considera că acesta are o mișcare cvasiuniformă cu viteza medie

$$V_2 = \frac{1}{2}\left(V_{t=0} + \frac{1}{\dfrac{1}{V_{t=0}} + \dfrac{C_x \frac{\rho}{2} A}{m} t}\right). \tag{16}$$

Viteza $V_1 = V_{t=0}$ fiind viteza constantă a avionului. Distanța între bordul de atac al ampenajului și extremitatea din spate a rezervorului înainte de largare fiind egală cu d, atunci timpul de întîlnire rezultă prin aproximații succesive din ecuația (16) și din ecuația

$$t = \frac{V_1 - V_2}{d}$$

sau, mai direct, din ecuația unică

$$V_{t=0}\, t = \frac{t}{\dfrac{1}{V_{t=0}} + \dfrac{C_x \frac{\rho}{2} A}{m} t} + 2d. \tag{17}$$

În ecuația (17) se va considera, pentru coeficientul de rezistență la înaintare C_x, legea de variație

$$C_x = 0{,}32 + 2\ \alpha^2. \tag{18}$$

Calcule efectuate pentru valori posibile ale unghiului de incidență între $6° - 40°$ în ipoteza că o perturbație ar putea modifica poziția idealizată pe care am presupus-o, au dus la concluzia că o valoare a incidenței $\alpha = 25°$ poate fi apreciată ca sigură în calcule deoarece în poziționarea forței de percuție apar de regulă erori ce pot genera momente perturbatoare.

4. DETERMINAREA POZIȚIEI FORȚEI DE PERCUȚIE A DISPOZITIVULUI PIROTEHNIC

Poziția forței de percuție în raport cu centrul de greutate al rezervorului se determină din condiția ca momentul aerodinamic pe carena cu ampenaj a rezervorului să fie anulat de momentul forței de percuție.

Pentru o anumită viteză de zbor a avionului la care urmează să se facă largarea, se poate determina incidența aripii și cunoscînd poziția axei longitudinale a rezervorului față de coarda aripii, se poate determina incidența carenei acestuia.

Calcule confirmate de experiențe arată că momentul aerodinamic în jurul centrului de greutate al carenei cu ampenaj a rezervorului poate fi considerat cel puțin la incidențe relativ mici, ca avînd o variație liniară cu incidența, adică

$$M_{aerod.\ GC} = M_{\alpha} \cdot \alpha. \tag{19}$$

Cum incidențele de zbor sînt pozitive și momentul aerodinamic este de „vîrf în sus", distanța forței pirotehnice în fața centrului de greutate al rezervorului este

$$x = \frac{M_{aerod.\ CG}}{F_{max}}. \tag{20}$$

Momentul aerodinamic $M_{aerod.\ GC}$ se poate calcula cu metodele clasice dar cea mai precisă determinare s-a obținut cu metoda elementului finit.

Este recomandat ca distanța x să fie majorată cu 10—20% spre a evita rotirea rapidă de vîrf în sus ca urmare a apariției incidenței induse datorită vitezei w pe de o parte. Pe de alta, datorită deformării elastice a rezervorului în regiunea acționării forței de percuție a dispozitivului pirotehnic și a altor imperfecțiuni în construcția dispozitivului pirotehnic este de așteptat ca efectul scontat al forței acestuia să nu fie atins integral și de aceea cotele de acționare a forței să fie de așteptat a fi mai mari.

Observație. O precizare trebuie făcută în legătură cu comportarea avionului purtător la acționarea dispozitivului purtător.

Calculele au arătat și experiența a confirmat că avionul purtător este practic insensibil la acțiunea forței dispozitivului pirotehnic, condițiile de zbor ale avionului putînd fi considerate ca neafectate.

5. MIȘCAREA PERTURBATĂ ÎN JURUL CENTRULUI DE GREUTATE AL REZERVORULUI

Pentru a verifica dacă în urma acționării dispozitivului pirotehnic rezervoarele de sub aripă au mișcări oscilatorii cu amplitudine crescîndă ducînd la pericolul lovirii ampenajului orizontal, vom analiza mișcarea perturbată în jurul centrului de greutate a unuia dintre rezervoarele cu ampenaj.

Considerăm că în urma acțiunii forței de percuție a dispozitivului pirotehnic rezervorul se va deplasa cu viteza verticală w și că o pertur-

baţie îl va înclina cu unghiul*) mic ε astfel încît incidenţa efectivă a rezervorului va fi (vezi fig. 6)

$$\alpha_e = \varepsilon = \frac{w}{V}. \tag{21}$$

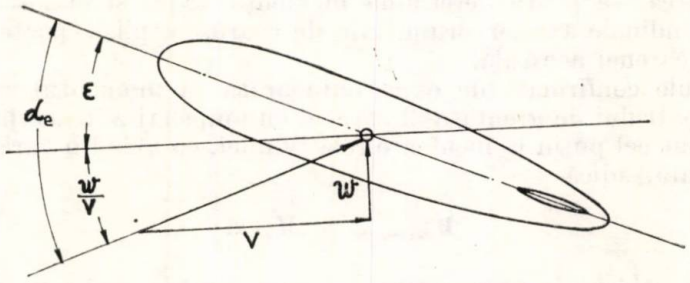


Fig. 6.

Întrucît forţa normală o presupunem ca depinzînd aproximativ liniar de incidenţa α_e, putem scrie

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{m}\frac{\partial N}{\partial \alpha_e}\alpha_e \tag{22}$$

şi cum din (21) rezultă prin derivare

$$\frac{d\alpha_e}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{dw}{dt}\frac{1}{V},$$

obţinem, ţinînd seama de (22),

$$\frac{d\alpha_e}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{mV}\frac{\partial N}{\partial \alpha_e}\alpha_e \tag{23}$$

sau încă

$$\frac{d^2\alpha_e}{dt^2} = \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{1}{mV}\frac{\partial N}{\partial \alpha_e}\frac{\partial \alpha_e}{\partial t}. \tag{24}$$

Din ecuaţiile anterioare scoatem

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\alpha_e}{dt} - \frac{dw}{dt}\frac{1}{V} = \frac{d\alpha_e}{dt} - \frac{1}{mV}\frac{\partial N}{\partial \alpha_e}\alpha_e,$$

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{d^2\alpha_e}{dt^2} - \frac{1}{mV}\frac{\partial N}{\partial \alpha_e}\frac{d\alpha_e}{dt}. \tag{25}$$

*) Se poate stabili o echivalenţă a momentului provocat de perturbaţie cu momentul dat de o suprafaţă de comandă de pe ampenajul rezervorului. Forma funcţiei de timp a deplasării organului de comandă este de acelaşi tip ca şi a momentului provocat de perturbaţie.

Din ecuația mișcării perturbate în jurul centrului de greutate

$$I_y \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = \Delta M_y, \tag{26}$$

unde

$$\Delta M_y = \frac{\partial M_y}{\partial \alpha_e} \alpha_e + \frac{\partial M_y}{\partial \frac{d\alpha_e}{dt}} \frac{d\alpha_e}{dt} + \frac{\partial M_y}{\partial \frac{d\varepsilon}{dt}} \frac{d\varepsilon}{dt} + \Delta M_y(\delta) \tag{27}$$

deducem pe baza celor de mai sus

$$I_y \left(\frac{d^2 \alpha_e}{dt^2} - \frac{1}{mV} \frac{\partial N}{\partial \alpha_e} \frac{\partial \alpha_e}{dt} \right) - \frac{\partial M_y}{\partial \alpha_e} \alpha_e - \frac{\partial M_y}{\partial \frac{d\alpha_e}{dt}} \frac{d\alpha_e}{dt} -$$

$$- \frac{\partial M_y}{\partial \frac{d\varepsilon}{dt}} \left(\frac{d\alpha_e}{dt} - \frac{1}{mV} \frac{\partial N}{\partial \alpha_e} \alpha_e \right) = \Delta M_y(\delta), \tag{28}$$

unde δ este unghiul echivalent de deviere al organului de comandă. Regrupînd termenii, ecuația (28) devine

$$I_y \frac{d^2 \alpha_e}{dt^2} + \left(- \frac{I_y}{mV} \frac{\partial N}{\partial \alpha_e} - \frac{\partial M_y}{\partial \frac{d\alpha_e}{dt}} - \frac{\partial M_y}{\partial \frac{d\varepsilon}{dt}} \right) \frac{d\alpha_e}{dt} +$$

$$+ \left(- \frac{\partial M_y}{\partial \alpha_e} - \frac{1}{mV} \frac{\partial M_y}{\partial \frac{d\varepsilon}{dt}} \frac{\partial N}{\partial \alpha_e} \right) \alpha_e = \Delta M_y(\delta). \tag{29}$$

Punem

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha_e} = \frac{\partial C_z}{\partial \alpha_e} \frac{\rho}{2} V^2,$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial \alpha_e} = \frac{\partial C_m}{\partial \alpha_e} \frac{\rho}{2} V^2 A l_c, \tag{30}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial \frac{d\varepsilon}{dt}} = \frac{\partial C_m}{\partial \frac{d\varepsilon}{dt} \frac{l_c}{2V}} \frac{\frac{\rho}{2} V^2 A l_c^2}{2V},$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial \frac{d\alpha_e}{dt}} = \frac{\partial C_m}{\partial \frac{d\alpha_e}{dt} \frac{l_c}{2V}} \frac{\frac{\rho}{2} V^2 A l_c}{2V}$$

și notînd $I_y = mKy^2$, ecuația (29) devine

$$\frac{d^2\alpha_e}{dt^2} + \left(-\frac{1}{mV}\frac{\partial C_z}{\partial \alpha_e}\frac{\rho}{2}V^2 A - \frac{\partial C_m}{\partial \frac{d\alpha_e}{dt}\frac{l_c}{2V}}\frac{\frac{\rho}{2}V^2 A l_c^2}{2VmK_y^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial C_m}{\partial \frac{d\varepsilon}{dt}}\frac{\frac{\rho}{2}V^2 A l_c^2}{2VmK_y^2} \right)\frac{d\alpha_e}{dt} - \left(\frac{\partial C_m}{\partial \alpha_e}\frac{\frac{\rho}{2}V^2 A l_c}{mK_y^2} + \right. \tag{31}$$

$$\left. + \frac{\partial C_m}{\partial \frac{d\varepsilon}{dt}\frac{l_c}{2V}}\frac{\partial C_z}{\partial \alpha_e}\frac{\frac{\rho^2}{4}V^4 A^2 l_c^2}{m^2 V K_y^2} \right)\alpha_e = \frac{\partial C_m}{\partial \delta}\frac{\frac{\rho}{2}V^2 A l_c}{mK_y^2}\delta(t).$$

Ținînd seama de forma obișnuită a ecuației mișcării în jurul centrului de greutate,

$$\frac{d^2\alpha_e}{dt^2} + 2\zeta\omega_n\frac{d\alpha_e}{dt} + \omega_n^2\alpha_e = f(t), \tag{32}$$

ecuația (31), neglijînd al doilea termen din paranteza care înmulțește α_e se poate scrie

$$\frac{d^2\alpha_e}{dt^2} + 2\xi\frac{d\alpha_e}{dt} + \omega_n^2\alpha_e = \theta^*\omega_n^2\delta(t), \tag{33}$$

unde

$$\omega_n^2 = -\frac{\partial C_m}{\partial \alpha_e}\frac{\frac{\rho}{2}V^2 A l_c}{mK_y^2},$$

$$\xi = \frac{\left[-\frac{1}{V}\frac{\partial C_z}{\partial \alpha_e} - \left(\frac{\partial C_m}{\partial \frac{d\alpha_e}{dt}\frac{l_c}{2V}} + \frac{\partial C_m}{\partial \frac{d\varepsilon}{dt}\frac{l_c}{2V}} \right)\frac{l_c}{2VK_y^2} \right]\frac{\rho}{2}V^2\frac{A}{m}}{2\left(-\frac{\partial C_m}{\partial \alpha_e}\frac{\frac{\rho}{2}V^2 A l_c}{mK_y^2} \right)}, \tag{34}$$

$$\theta^* = -\frac{\frac{\partial C_m}{\partial \delta}}{\frac{\partial C_m}{\partial \alpha_e}}.$$

Se poate demonstra [2] că pentru perturbații (semnale) în treaptă care apar frecvent, mișcarea în jurul centrului de greutate a rezervorului descrisă de ecuația (33) este aperiodică dacă $\xi > 0$ și este atenuată cu atît mai tare cu cît valorile pozitive ale coeficientului ξ sînt mai mari.

În cazul cînd $\xi \leqslant 0$, mișcarea este oscilatorie.

În stabilirea semnului coeficientului ξ trebuie remarcat că pentru configurația rezervor cu ampenaj avem:

$$\frac{\partial C_z}{\partial \alpha_e} \cong \frac{\partial C_{z\bar{AO}}}{\partial \alpha_e} > 0, \quad \frac{\partial C_m}{\partial \alpha_e} < 0. \tag{35}$$

În ceea ce privește celelalte două derivate, după [3] ele au expresiile

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_m}{\partial \dfrac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}\dfrac{l_c}{2V}} &= -2\frac{\partial C_{z\bar{AO}}}{\partial \alpha_e} V_{AO} \frac{l_{\bar{AO}}}{l_c}, \\ \frac{\partial C_m}{\partial \dfrac{\mathrm{d}\alpha_e}{\mathrm{d}t}\dfrac{l_c}{2V}} &= -2\frac{\partial C_{z\bar{AO}}}{\partial \alpha_e} V_{AO} \frac{l_{\bar{AO}}}{l_e}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_e}. \end{aligned} \tag{36}$$

Deoarece toți factorii din părțile drepte ale expresiilor (36) sînt pozitivi, rezultă că

$$\frac{\partial C_m}{\partial \dfrac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}\dfrac{l_c}{2V}} < 0, \quad \frac{\partial C_m}{\partial \dfrac{\mathrm{d}\alpha_e}{\mathrm{d}t}\dfrac{l_c}{2V}} < 0. \tag{37}$$

Cu acestea, condiția

$$\xi > 0$$

este satisfăcută dacă

$$\left| \left(\frac{\partial C_m}{\partial \dfrac{\mathrm{d}\alpha_e}{\mathrm{d}t}\dfrac{l_c}{2V}} + \frac{\partial C_m}{\partial \dfrac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}\dfrac{l_c}{2V}} \right) \frac{l_c^2}{2VK_y^2} \right| > \left| \frac{1}{V}\frac{\partial C_{zAO}}{\partial \alpha_e} \right| \tag{38 a}$$

sau

$$2V_{AO}\frac{l_{AO}}{l_c}\left(1 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_e}\right)\frac{l_c^2}{2K_y^2} > 1. \tag{38 b}$$

Se poate ușor remarca faptul că pentru rezervoare cu ampenaj inegalitățile (38 a), (38 b) sînt satisfăcute și în concluzie $\xi > 0$. Aceasta arată că mișcarea este aperiodică amortizată, ceea ce înseamnă

că mișcarea rezervorului fiind amorsată într-un sens va continua în același sens pînă la stabilizare.

Pentru rezervorul fără ampenaj este evident că deoarece $\frac{\partial C_m}{\partial \alpha_e} > 0$ acesta este static instabil și în mod evident și dinamic. Crearea rezervei de stabilitate statică astfel încît $\frac{\partial C_m}{\partial \alpha_e} < 0$ este posibilă numai prin modificarea părții terminale.

6. CONCLUZII

Largarea a două rezervoare efectuată de pe aripa unui avion de luptă a confirmat pe deplin calculele întocmite pe baza metodei descrise mai sus.

Astfel, în condițiile de zbor programate, pentru timpul de întîlnire între ampenaj și rezervoare de 0,5 s, viteza medie de cădere a rezervoarelor pe verticală W_m calculată a fost 6,9 m/s, iar măsurată 6,84 m/s.

La sfîrșitul intervalului de timp considerat pentru întîlnire rezervoarele s-au aflat la suficientă distanță sub avion (depășind lungimea unui rezervor).

Filmarea în zbor a rezervoarelor după declanșarea dispozitivului pirotehnic a arătat că mișcarea în jurul *CG* a acestora pe distanța parcursă în durata sus-menționată sub avion, este stabilă.

Mișcarea aperiodică amortizată „de vîrf în sus" care a urmat după aceea datorită creșterii momentului aerodinamic (ca urmare a apariției incidenței induse prin viteza w), a încetat într-o poziție aproape verticală a rezervoarelor, după care acestea intrînd în zona perturbată de avion au căzut prin mișcări neregulate.

Primită la redacție la 10 noiembrie 1981

7. BIBLIOGRAFIE

1. N. KRASNOV, *Aerodinamika raket*, Izdatelstvo Nauka Moskva, 1968.
2. AL. MARINESCU, *Introducere în dinamica rachetei*, Edit. Academiei R.S.România, București, 1967.
3. B. ETKIN, *Dynamics of flight stability and control*. John Wiley and Sons. New York, London, 1959.

METODA DE CALCUL NUMERIC AL CARACTERISTICILOR DISTRIBUȚIEI DE MASĂ PENTRU ELEMENTE ȘI SUBANSAMBLE DE MAȘINI

de ION ROȘCA, GH. DRĂGĂNOIU
Institutul politehnic București

Se prezintă o procedură numerică de determinare a poziției centrului de masă și a momentelor de inerție pentru piese și subansamble de mașini. Se pornește de la descrierea topologică a corpului, compus dintr-un număr finit de corpuri elementare, pentru care sînt cunoscute caracteristicile distribuției de masă. Se stabilesc relații generale de calcul al variației tensorului de inerție în raport cu translatarea și rotația axelor. În final se prezintă etapele algoritmului de calcul.

1. INTRODUCERE

În cadrul elaborării modelului dinamic al unui sistem mecanic, o etapă necesară o constituie calculul poziției centrului de masă și al momentelor de inerție, pentru fiecare element mobil.

Un element mobil al sistemului mecanic este deobicei un subansamblu constituit din mai multe piese (desemnate prin termenul de „reper" în cadrul procesului de proiectare), în repaus relativ una față de cealaltă. Se pune astfel problema determinării caracteristicilor distribuției de masă pe baza desenelor de execuție, făcînd observația faptului că, exceptînd categoria pieselor turnate cu forme geometrice complicate, majoritatea pieselor pot fi descompuse într-un număr finit de corpuri geometrice simple.

Metoda prezentată determină caracteristicile distribuției de masă pe baza configurației topologice a piesei, relativă la corpurile geometrice simple componente. Se face observația că setul de bază, de forme geometrice pentru care sînt determinate caracteristicile distribuției de masă (cum ar fi, de exemplu, cel prezentat în [1], poate fi completat cu ușurință, astfel încît aproximarea obținută să fie mai bună decît cea corespunzătoare determinărilor experimentale.

2. STABILIREA RELAȚIILOR DE CALCUL

Se consideră piesa prezentată în figura 1.

În ipoteza în care se neglijează corpul toroidal corespunzător razei de racordare *R2*, corpurile componente sînt:

1. Corpul cilindric cu diametrul Ø 240 mm și înălțime 15 mm, căruia i se atașează reperul $O_1x_1y_1z_1$.

2. Corpul cilindric cu diametrul Ø 60 mm și înălțime 30 mm, căruia i se atașează reperul $O_2x_2y_2z_2$.

3. Corpul cilindric cu diametrul Ø60 mm și înălțime 15 mm, căruia i se atașează reperul $O_3x_3y_3z_3$, corp care este extras.

Pentru fiecare corp component se cunosc caracteristicile distribuției de masă în raport cu reperul atașat, $O_ix_iy_iz_i$. Fie $O_0\ x_0y_0z_0 \equiv O_1x_1y_1z_1$

reperul de referință, în raport cu care se vor calcula caracteristicile distribuției de masă ale piesei. Este necesar deci să se stabilească relațiile de trecere ale vectorului de poziție al centrului de masă și ale matricei

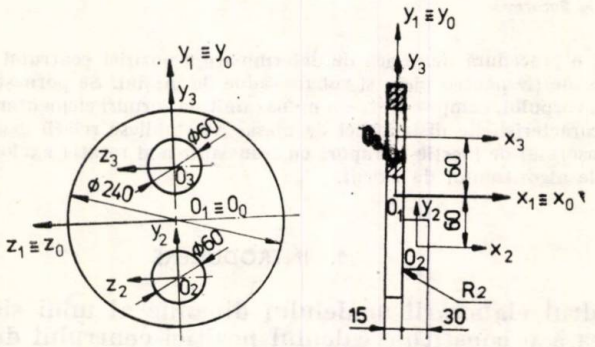


Fig. 1.

momentelor de inerție din reperele (i), $i = 1, 2, 3$, în reperul de referință pe baza parametrilor de poziționare relativă ale reperelor. În general, pentru stabilirea lanțului de repere, care poziționează reperul (i) în raport de reperul de referință (O) este necesar să se determine drumul de la vîrful (i) la vîrful (O) în graful asociat piesei sau subansamblului.

În graful asociat (fig. 2) vîrfurile corespund corpurilor componente, iar arcele corespund poziționărilor (i, j), în sensul: corpul j este poziționat în raport de corpul i.

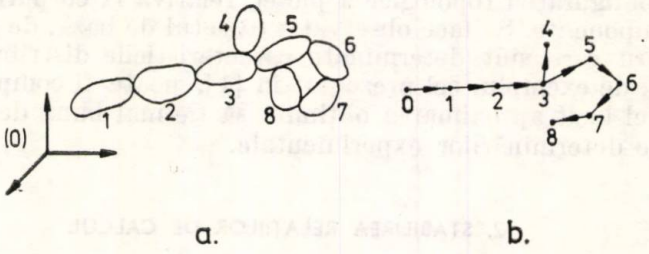


Fig. 2.

Astfel, la corpul compus din figura 2 *a*, corespunde graful sagital din figura 2 *b*. Matricea booleană asimetrică 9×9, corespunzătoare grafului, are elementele nenule:

$$m_{01} = 1; \quad m_{12} = 1; \quad m_{23} = 1; \quad m_{34} = 1; \quad m_{35}\ 1; \quad m_{56} = 1;$$
$$m_{67} = 1; \quad m_{78} = 1.$$

Determinarea lanțurilor de poziționare ale elementelor (i), $i = 1, 2 \ldots, 8$, în raport de reperul (O) de referință, revine la calculul matricei de închidere tranzitivă P, calculată în cazul general cu relația [2]:

$$P = I + M + M^2 + \ldots + M^9, \tag{1}$$

unde I este matricea unitate, iar M este matricea asociată grafului.

Din testele efectuate pe un mare număr de piese și subansamble s-a constatat că lanțul de poziționare poate fi introdus direct fără dificultăți, considerînd că i precede pe j pe lanțul de poziționare.

Din mulțimea

$$(0,1);\ (1,2);\ (2,3);\ (3,4);\ (3,5);\ (5,6);\ (6,7);\ (7,8),$$

se poate forma vectorul predecesorilor

$$V(1)=0;\quad V(2)=1;\quad V(3)=2;\quad V(4)=3;\quad V(5)=3;\quad V(6)=5;$$

$$V(7)=6;\quad V(8)=7.$$

Cu ajutorul vectorilor predecesorilor se poate determina, pentru fiecare element, lanțul de poziționare în raport de sistemul de referință.

Pentru determinarea matricei coloană a coordonatelor centrului de masă față de reperul (O), $\bar{r}_G^0$, se folosește relația cunoscută

$$\bar{r}_G^0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i j_i \bar{r}_{Gi}^0}{M};\quad M = \sum_{i=1}^{n} m_i j_i, \tag{2}$$

unde m_i, $\bar{r}_{Gi}^0$ sînt masa, respectiv vectorul de poziție al centrului de masă ale corpului component i în reperul (O). Variabila j_i are valoarea -1 dacă corpul i este extras, și valoarea 1 dacă corpul i nu se extrage.

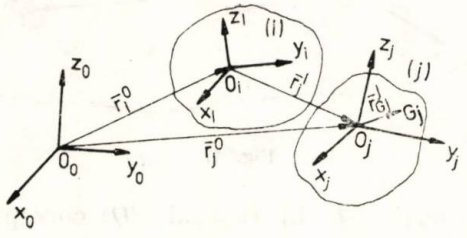


Fig.3.

Pentru determinarea vectorilor de poziție ai centrului de masă în reperul (O) se folosesc (fig. 3) relațiile :

$$\bar{r}_j^0 = \bar{r}_i^0 + R_{i,0}\,\bar{r}_j^i;\quad \bar{r}_{Gj}^0 = \bar{r}_j^0 + R_{j,0}\,\bar{r}_{Gj}^j;\quad R_{j,0} = R_{i,0}\,R_{j,i}, \tag{3}$$

unde i este predecesorul corpului j pe lanțul de poziționare, $R_{j,i}$ este matricea de trecere (matricea cosinusurilor directoare) de la reperul j, la reperul i, $\bar{r}_j^i$ este vectorul de poziție al originii reperului j în reperul i iar $\bar{r}_{Gj}^j$ este vectorul de poziție al centrului de masă în reperul atașat corpului j.

Relațiile (3) se aplică iterativ pe lanțul de poziționare. Mărimile de intrare necesare determinării coordonatelor centrului de masă vor fi:

— mulțimea cuplurilor (i, j) de poziționare;

— pozițiile relative ale originilor reperelor atașate, $\bar{r}_j^i$;

— matricele relative de trecere $R_{j,i}$;

— poziția centrului de masă, $\bar{r}_{Gj}^j$, pentru fiecare corp component.

Tensorul de inerție J_0 al corpului calculat în raport de reperul de referință (O) se va determina cu relația

$$J_0 = \sum_{i=1}^{n} (J_0)_i \; j_i \,, \tag{4}$$

unde $(J_0)_i$ este tensorul de inerție al corpului component i în reperul (O), iar j_i este indicativul de extragere al corpului i.

Pentru aplicarea relației (4) este necesar să se determine o formulă generală de variație a tensorului de inerție.

Fie (fig. 4) reperul $Cxyz$ atașat corpului, cu originea în centrul de masă C.

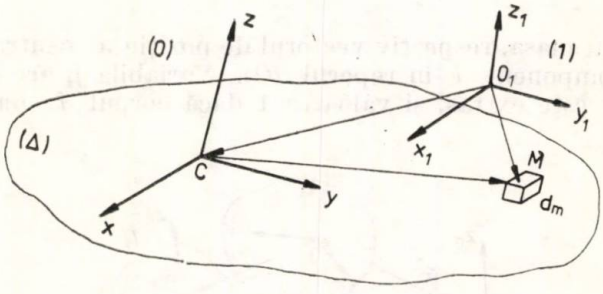


Fig. 4.

Tensorul de inerție J în reperul (O) corespunde momentului cinetic $\bar{K}^0$,

$$\bar{K}^0 = J \; \bar{\omega}^0, \tag{5}$$

calculat cu (fig. 4):

$$\bar{K}^0 = \int_{(D)} \overline{CM}^0 \times (\bar{\omega}^0 \times \overline{CM}^0) \, \mathrm{d}m, \tag{6}$$

unde indicele superior indică reperul (O) în care sînt exprimați vectorii, iar $\bar{\omega}$ este viteza unghiulară a corpului.

Fie R matricea de transformare de la reperul (1) la reperul (O):

$$\overline{CM}^0 = R \; \overline{CM}^1. \tag{7}$$

Deoarece

$$\overline{O_1M^1} = \overline{O_1C^1} + \overline{CM^1},$$

momentul cinetic în raport de reperul (1) este

$$\overline{K}_1^1 = \int_{(D)} \overline{O_1M^1} \times (\overline{\omega}^1 \times \overline{O_1M^1})\, dm =$$

$$= \int_{(D)} (\overline{O_1C^1} + \overline{CM^1}) \times (\overline{\omega}^1 \times \overline{O_1C^1} + \overline{\omega}^1 \times \overline{CM^1})\, dm =$$

$$= \overline{O_1C^1} \times (\overline{\omega}^1 \times \overline{O_1C^1})\, M + \overline{O_1C^1} \times (\overline{\omega}^1 \times \int_{(D)} \overline{CM^1}\, dm) +$$

$$+ \left(\int_{(D)} \overline{CM^1}\, dm\right) \times (\overline{\omega}^1 \times \overline{O_1C^1}) + \int_{(D)} \overline{CM^1} \times (\overline{\omega}^1 \times \overline{CM^1})\, dm\,,$$

unde M este masa corpului.

Întrucît C este centru de masă,

$$\int_{(D)} \overline{CM^1}\, dm = 0,$$

astfel încît

$$\overline{K}_1^1 = \overline{O_1C^1} \times (\overline{\omega}^1 \times \overline{O_1C^1})\, M + \int_{(D)} \overline{CM^1} \times (\overline{\omega}^1 \times \overline{CM^1})\, dm\,. \qquad (8)$$

Primul termen din relația (8) este momentul cinetic în ipoteza în care întreaga masă M a corpului este concentrată în centrul de masă,

$$\overline{O_1C^1} \times (\overline{\omega}^1 \times \overline{O_1C^1})\, M = J_1^c\, \overline{\omega}^1, \qquad (9)$$

$$J_1^c = \begin{bmatrix} M(y_c^2 + z_c^2) & -M\, x_c\, y_c & -M\, x_c\, z_c \\ -M\, x_c\, y_c & M(x_c^2 + z_c^2) & -M\, y_c\, z_c \\ -M\, x_c\, z_c & -M\, y_c\, z_c & M(x_c^2 + y_c^2) \end{bmatrix}, \qquad (10)$$

unde $\overline{O_1C^1} = [x_c\,;\ y_c\,;\ z_c]^T$.

Ținînd cont de relația (6), se observă că al doilea termen din relația (8) este momentul cinetic al corpului, calculat în raport de reperul (O) și exprimat în reperul (1)

$$\int_{(D)} \overline{CM^1} \times (\overline{\omega}^1 \times \overline{CM^1})\, dm = \overline{K}^1 = R^T\, \overline{K}^0 = R^T\, J\, \overline{\omega}^0.$$

Rezultă

$$\overline{K}_1 = J_1^c\,\overline{\omega}^1 + R^T\ JR\ \ \overline{\omega}^1. \tag{11}$$

Întrucît

$$\overline{K}_1 = J_1\,\overline{\omega}^1\,,$$

rezultă

$$J_1 = J_1^c + R^T J\,R\,. \tag{12}$$

Relațiile (10), (12) generalizează teorema Steiner și includ formulele de variație ale momentelor de inerție în raport de axele concurente.

În baza relației (12) se obține

$$(J_0)_i = (J_0^c)_i + R_{i,0}^T (J_i)_i\,R_{i,0}\,. \tag{13}$$

Matricea de transformare $R_{i,0}$ se obține prin aplicarea iterativă a relației

$$R_{k,0} = R_{m,0}\,R_{k,m} \tag{14}$$

pe lanțul de poziționare al reperului (i), (m) fiind predecesorul reperului (k) pe lanțul de poziționare.

3. ALGORITMUL DE CALCUL

În conformitate cu considerațiile efectuate, algoritmul de calcul al caracteristicilor distribuției de mase este următorul:

— Se introduc datele de intrare, respectiv predecesorii corpurilor pe lanțul de poziționare, parametrii relativi de poziționare, indicativii standard ai tipului de corp simplu și datele geometrice aferente.

— Se calculează caracteristicile distribuției de mase pentru fiecare corp tip.

— Se determină matricele relative de trecere.

— Se determină lanțurile de poziționare în raport de reperul (O).

— Se determină vectorul de poziție al centrului de masă față de reperul (O) și matricea de transformare de la reperul (i) la reperul (O).

— Se aplică relația (13) de calcul al tensorului de inerție în reperul de referință.

— Se aplică relațiile (2) și (4) pentru determinarea coordonatelor centrului de masă și tensorului de inerție.

Primită la redacție la 3 martie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. O. DRAGNEA, *Geometria maselor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1972.
2. A. ROȘU, *Teoria grafelor*, Edit. militară, București, 1974.
3. F. BEER, E. RUSSEL, *Vector mechanics for engineers*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1977.

CALCULUL CAPACITĂȚII PORTANTE HIDRODINAMICE A INELELOR DE ETANȘARE EXCENTRICE SAU OVALE

de MIRCEA D. PASCOVICI
Institutul politehnic București

Inelele excentrice sau ovale sînt utilizate în construcția etanșărilor frontale în vederea realizării unei portanțe hidrodinamice.
Utilizînd teoria lubrificației termohidrodinamice se calculează distribuția de presiuni și capacitatea portantă, asimilînd inelul excentric sau oval cu un lagăr „infinit scurt".
Se face evaluarea performanțelor unor asemenea inele de etanșare.

Inelele de etanșare frontale excentrice sau ovale (fig. 1) sînt indicate frecvent în literatura de specialitate [1, 2] drept mijloace de realizare a unui film portant hidrodinamic. Lipsește însă atît explicarea mecanis-

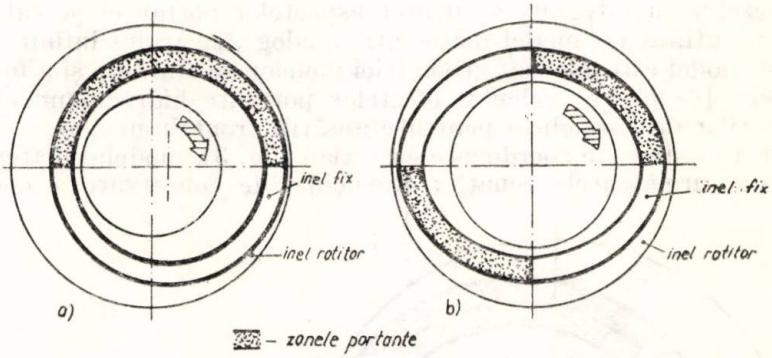


Fig. 1. — Inele de etanșare a) excentrice; b) ovale.

mului de realizare a filmului, cît și calculul capacității portante a unui asemenea film, de grosime constantă. Există tentația de a considera că portanța se realizează pur hidrodinamic, datorită variației circumferențiale a vitezei de alunecare. Incorectitudinea unei asemenea considerații rezultă din analiza ecuației lui Reynolds scrisă în coordonate cilindrice. Pentru cazul unui inel excentric (fig. 2) considerînd un film fluid incom-

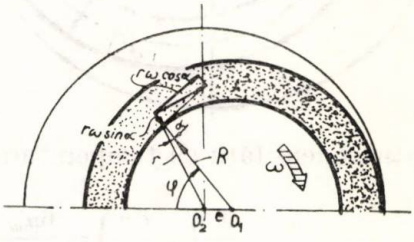


Fig. 2. — Inel de etanșare excentric, elemente geometrice și cinematice.

presibil de grosime, viscozitate și densitate constantă, ecuația lui Reynolds devine

$$R\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial p}{\partial R}\right)+\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2}=\frac{6\mu\omega}{h^2}\left(-\frac{\partial\, Rr\,\sin\,\alpha}{\partial R}+\frac{\partial r\cos\,\alpha}{\partial \varphi}\right). \qquad (1)$$

Din figura 2 rezultă relaţiile

$$r \cos \alpha = R - e \cos \varphi, \quad r \sin \alpha = e \sin \varphi. \tag{2}$$

În consecinţă,

$$R \frac{\partial}{\partial R}\left(R \frac{\partial p}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{3}$$

Deci, în ipotezele de mai sus, portanţa poate avea loc numai hidrostatic şi nu hidrodinamic.

Explicarea mecanismului de realizare a unui film autoportant se poate face printr-o analiză termohidrodinamică. În această lucrare se consideră că portanţa se realizează prin efectul de „pană termică" [3, 4]. Pentru rezolvarea integrală a tuturor aspectelor portanţei pe cale analitică se va utiliza un model matematic analog „lagărului infinit scurt" [5]. Acest model este adecvat geometriei inelelor de etanşare şi a fost utilizat recent [6] pentru calculul efectelor portante hidrodinamice datorate abaterilor de paralelism pentru etanşările frontale uzuale.

Într-un sistem de coordonate cartezian (fig. 3), modelul matematic, alcătuit din următoarele ecuaţii: Reynolds, de conservare a energiei,

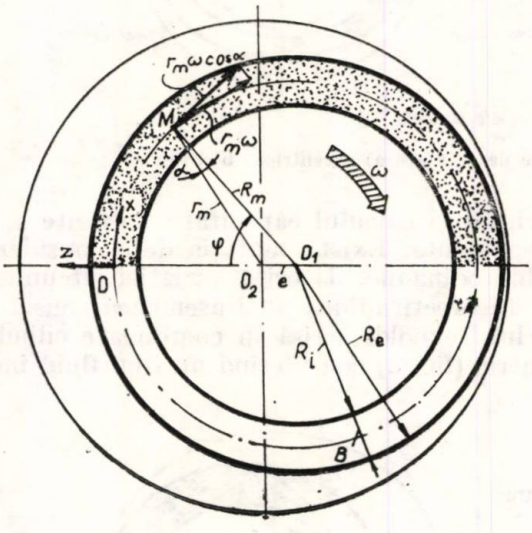


Fig. 3. — Elementele geometrice şi cinematice ale unui inel de etanşare excentric în modelarea propusă.

şi de variaţie a densităţii cu temperatura, este

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{6\mu_m U_m}{h^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x}, \tag{4}$$

$$\frac{\mu_m U^2}{h} = K^*(t - t_0), \tag{5}$$

$$\rho = \rho_0[1 - a(t - t_0)]. \tag{6}$$

În afară de ipotezele considerate, implicit prin acceptarea efectului de „pană termică" și a modelului „lagărului infinit scurt", s-a mai considerat:

— la scrierea ecuației lui Reynolds (4) s-a utilizat viteza periferică medie $U_m = R_m \omega$, constantă pe circumferința inelului pentru a

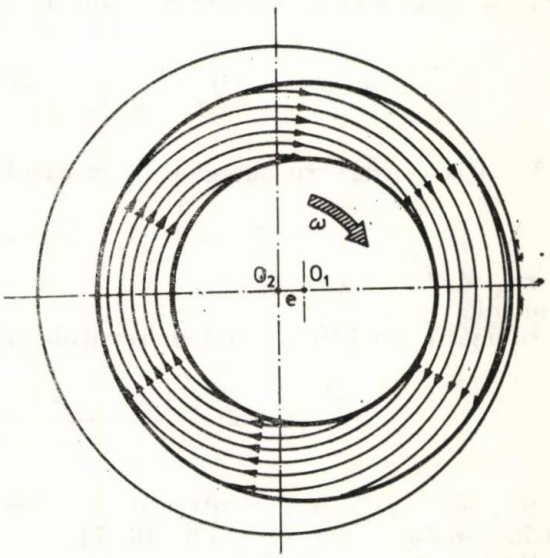


Fig. 4. — Fluxul liniilor de curgere.

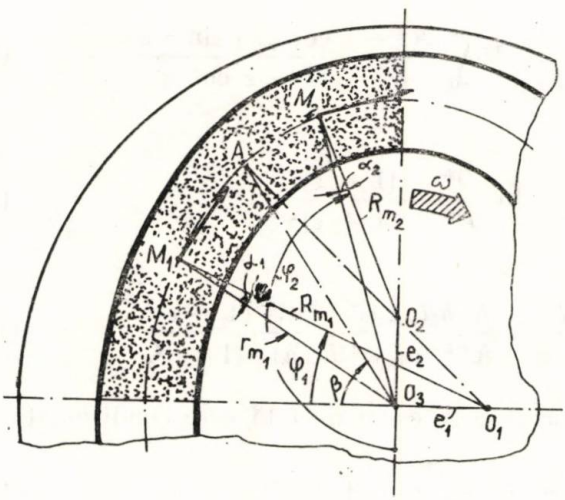


Fig. 5. — Elementele geometrice și cinematice ale unui inel de etanșare oval, în modelarea propusă.

nu introduce artificial prin modelarea făcută efecte de portanță hidrodinamice inexistente;

— ecuația de conservare a energiei (5) este scrisă în alternativa unei cuple de frecare fluidă Couette cu evacuarea căldurii numai prin conductivitate (prin pereții cuplei), lucru justificat de fluxul liniilor de

curgere (fig. 4), debitul radial, convectiv, fiind foarte mic în comparaţie cu cel circumferenţial (recirculat);

— pentru depăşirea unor dificultăţi matematice şi fără a aduce abateri mari [3], viscozitatea fluidului este considerată constantă în film.

Utilizînd condiţiile la limită de presiuni $p = 0$; la $z = \pm B/2$, ecuaţiile (4) şi (6) conduc la ecuaţia presiunii în film

$$\bar{p} = (1 - \bar{z}^2) \frac{\bar{a}}{1 - \bar{a}\,(\bar{t} - 1)} \cdot \frac{\partial(\bar{t} - 1)}{\partial \varphi}. \tag{7}$$

Ecuaţia conservării energiei (5) în cazul cuplei considerate devine

$$\bar{t} - 1 = D\ (1 - \varepsilon \cos \varphi)^2 \tag{8}$$

dacă $r \cong R_m(1 - \varepsilon \cos \varphi)$,
ε fiind mic.

În aceste condiţii, asamblînd ecuaţiile (7) şi (8), rezultă

$$\bar{p} = (1 - \bar{z}^2) \frac{2(1 - \varepsilon \cos \varphi)\varepsilon \sin \varphi}{D^* - (1 - \varepsilon \cos \varphi)^2}. \tag{9}$$

Se vede că $\bar{p} > 0$ pentru $0 < \varphi < \pi$, pentru $\pi < \varphi < 2\pi$ se va utiliza ipoteza uzuală $\bar{p} = 0$ [6, 7].

Ecuaţia forţei portante axiale este

$$\bar{F}_a = \frac{3}{4} \int_{-1}^{1} (1 - \bar{z}^2)\, \mathrm{d}\bar{z} \int_0^{\pi} \frac{2(1 - \varepsilon \cos \varphi)\ \varepsilon \sin \varphi\, \mathrm{d}\varphi}{D^* - (1 - \varepsilon \cos \varphi)^2}. \tag{10}$$

Integrînd, se obţine

$$\bar{F}_a = \ln \frac{D^* - (1 - \varepsilon)^2}{D^* - (1 + \varepsilon)^2} \tag{11}$$

sau, în formă dimensională,

$$F_a = \frac{\mu_m\ \omega\ B^3 R_m}{2h^2} \ln \frac{K^* h/(\mu_m\ \omega^2\ R_m^2 a) - (1 - \varepsilon)^2}{K^* h/(\mu_m\ \omega^2\ R_m^2\ a) - (1 + \varepsilon)^2}. \tag{11'}$$

Apariţia unei forţe portante în cazul de faţă este condiţionată de inegalitatea

$$K^* h/(\mu_m\ \omega^2\ R_m^2\ a) > (1 + \varepsilon)^2. \tag{12}$$

Presiunea medie din zona portantă va fi

$$p_m = \frac{\mu_m\ \omega\ B^2}{2\pi\ h^2} \ln \frac{D^* - (1 - \varepsilon)^2}{D^* - (1 + \varepsilon)^2}, \tag{13}$$

iar presiunea maximă din film, localizată la $\varphi = \pi/2$, este

$$p_{max} = \frac{3\mu_m \omega B^2}{2h^2} \cdot \frac{\varepsilon}{D^* - 1}. \tag{14}$$

În cazul unui inel oval, format din patru zone circulare, schițat în figura 5, relațiile anterioare (7) ... (9) își păstrează valabilitatea pe porțiuni. Astfel, geometria este precizată prin relațiile

$$r_{m_1} \cong R_{m_1}(1 - \varepsilon_1 \cos \varphi_1)$$

pentru $0 < \varphi_1 < \text{arc cos} \dfrac{e_1}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}$,

$$r_{m_2} \cong R_{m_2}(1 - \varepsilon_2 \cos \varphi_2)$$

pentru $\pi - \text{arc cos} \dfrac{e_2}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} < \varphi_2 < \pi$, (15)

$$R_{m_1} - R_{m_2} = \sqrt{e_1^2 + e_2^2},$$

$$\beta = \text{arc tg}\left(\frac{e_2}{R_{m_2}} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_1} + \text{tg } \varphi_1\right).$$

În aceste condiții, forța axială portantă totală va fi

$$F_a = \frac{\mu_m \omega B^3}{h^2}\left[R_{m_1} \ln \frac{D_1^* - (1 - \varepsilon_1)^2}{D_1^* - \left(1 - \varepsilon_1 \dfrac{e_1}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}\right)^2} + \right.$$

$$\left. + R_{m_2} \ln \frac{D_2^* - \left(1 + \varepsilon_2 \dfrac{e_2}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}\right)^2}{D_2^* - (1 - \varepsilon_2)^2}\right]. \tag{16}$$

Presiunea medie din zonele portante se va calcula cu relația

$$p_m = F_a / \left(2 R_{m_1} B \text{ arc cos} \frac{e_1}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} + 2 R_{m_2} B \text{ arc cos} \frac{e_2}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}\right). \tag{17}$$

Presiunea maximă va fi localizată la graniţa dintre cele două zone circulare, respectiv la $\varphi_1 = \arccos \frac{e_1}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}$ şi are expresia

$$p_{max} = \frac{3\mu_m \omega B^2}{2h^2} \cdot \frac{2\left(1 - \varepsilon_1 \frac{e_1}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}\right) \varepsilon_1 \frac{e_2}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}}{D_1^* - \left(1 - \varepsilon_1 \frac{e_1}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}\right)^2}$$

sau (18)

$$p_{max} = \frac{3\mu_m \omega B^2}{2h^2} \cdot \frac{2\left(1 + \varepsilon_2 \frac{e_2}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}\right) \varepsilon_2 \frac{e_1}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}}{D_2^* - \left(1 + \varepsilon_2 \frac{e_2}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}\right)^2}.$$

Eficienţa unor asemenea inele excentrice sau ovale, din punctul de vedere a portanţei hidrodinamice, poate fi evaluată prin presiunea medie convenţională, p_m^*, calculată prin raportarea forţei axiale la întreaga suprafaţă frontală; evident, $p_m^* = 0{,}5\ p_m$.

Astfel, pentru următoarele valori, uzual posibile, ale parametrilor care intervin în cazul unui inel excentric, avem: $\mu_m = 10^{-3}$ N s/m^2; $\omega = 10^2$ s^{-1}; $B = 10^{-2}$ m; $h = 10^{-6}$ m; $K^* = 25$ W/m^2 °K; $R_m = 5 \cdot 10^{-2}$ m; $a = 5 \cdot 10^{-4}$ °K^{-1}; $\varepsilon = 0{,}1$; apelînd la relaţia (13) se obţine $p_m^* = 1{,}3$ N/mm^2, valoare suficient de ridicată.

NOTAŢIILE PRINCIPALE UTILIZATE

B — lăţimea inelelor;
$D = \mu_m \omega^2 R_m^2 / K^* h\, t_0$ — cifra de disipativitate;
$D^* = 1/D\, \bar{a}$ — cifra de portanţă termică;
F_a — forţa portantă axială;
$\bar{F}_a = 2F_a h^2 / \mu_m \omega B^3 R_m$ — forţa portantă axială adimensională;
K^* — coeficientul global de transfer de căldură;
R — raza unui punct oarecare a inelului;
R_e — raza exterioară a inelului;
R_i — raza interioară a inelului;
R_m — raza medie a inelului;
U — viteza periferică pentru raza r_m;
U_m — viteza periferică pentru valoarea medie a razei r_m;
a — coeficientul de variaţie a densităţii cu temperatura;

$\bar{a}$ — $a\ t_0$;

e — excentricitatea;

h — grosimea filmului de fluid;

p — presiunea în filmul de fluid;

p_{med} — presiunea medie;

p_{max} — presiunea maximă;

$\bar{p} = 4ph^2/3\ \mu_m\ \omega\ B^2$ — presiunea adimensională;

r — raza unui punct oarecare a inelului rotitor;

r_m — raza medie a inelului rotitor, corespunzătoare razei R_m;

t — temperatura în filmul de fluid;

t_0 — temperatura mediului ambiant;

$\bar{t} = t/t_0$ — temperatura adimensională;

$\varkappa = R_m\varphi$ — coordonata în direcția curgerii;

z — coordonata în direcția normală curgerii;

$\bar{z} = 2\ z/B$;

$\varepsilon = e/R_m$ — excentricitatea relativă;

μ — viscozitatea dinamică;

μ_m — viscozitatea dinamică medie, constantă în film;

φ — coordonata unghiulară;

ρ — densitatea;

ω — viteza unghiulară;

Primită la redacție la 22 ianuarie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. E. MAYER, *Axiale Gleitringdichtungen*, VDI – Verlag GmbH, 1974.
2. A. G., KOMISSAR, *Uplotnitelinie ustroistva opor kacenia*, Moscova, Mașinostroenie, 1980.
3. J. YOUNG, *Thermal wedge effect in hydrodynamic lubrication*, The Engineering Journal, March, 46–54, (1962).
4. M. D. PASCOVICI, *Asupra efectului de pană termică la lagărele de alunecare*, Construcția de mașini **20**, *10*, 600–603, (1968).
5. O. PINKUS și B. STERNLICHT, *Theory of hydrodynamic lubrication*, New York, McGraw-HILL, 1961.
6. A. SHARONI, I. ETSION, *Performance of end face seals with diametral tilt and coning-hydrodynamic effects*, ASLE Trans., **24**, *1*, 61–70, (1981).

ASUPRA UNOR PARTICULARITĂȚI PRIVIND UTILIZAREA METODEI CU ELEMENT FINIT ÎN LUBRIFICAȚIA VÎSCO-INERȚIALĂ

de S. GĂLETUȘE
Institutul politehnic București

Lucrarea prezintă o metodă numerică pentru determinarea efectului forțelor de inerție în lubrificație. După dezvoltarea ecuației lubrificației vîsco-inerțiale în formă vectorială, se prezintă posibilitatea de utilizare a metodei Galerkin precum și posibilitatea de a scrie o funcțională. În ambele cazuri ecuațiile integrale sînt rezolvate prin metoda elementului finit, determinîndu-se aceeași ecuație finală matriceală.

NOTAȚII

U_m — viteza medie în direcția mișcării suprafeței mobile;
W_m — viteza medie în direcția laterală;
V — viteza suprafeței mobile;
h — grosimea filmului;
ρ — densitatea;
μ — viscozitatea;
p — presiunea;
p_a — presiunea atmosferică;
A — arie;
L_i — funcție de interpolare;
C — jocul lagărului;
L — lățimea lagărului;
R — raza fusului;
$R_e = \rho V h/\mu$ — număr Reynolds:
$\mathcal{R}e = \rho V C/\mu$
$\bar{x} = x/R = \theta$;
$\bar{z} = z/L$;
$\bar{p} = p C^2/\mu V R$;
$\bar{h} = h/C$;
$\bar{U}_m, \bar{W}_m = U_m/V, W_m/V$;
$\{\ \}$ — matrice coloană;
$\langle\ \rangle$ — matrice linie;
$[\ ]$ — matrice pătrată.
$\vec{\bar{I}}^* = \vec{i} G_x \bar{I}_x + \vec{k} G_z \bar{I}_z$;
$\bar{I}_{x,z} = I_{x,z} R/V^2 C$;
$\vec{\nabla} = \vec{i} \dfrac{\partial}{\partial \theta} + \vec{k} \dfrac{R}{L} \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$;
$\vec{\nabla}^* = \vec{i} G_x \dfrac{\partial}{\partial \theta} + \vec{k} G_x \dfrac{R}{L} \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 1, 1983, P. 48–53

1. INTRODUCERE

În cele mai multe aplicații ale lubrificației cu film fluid, forțele de inerție sînt mici în comparație cu forțele de frecare și pot fi neglijate. În anii din urmă, un număr de cercetări au arătat că efectul forțelor de inerție poate fi important în aplicații la numere Reynolds mari sau variații mari a grosimii filmului de lubrifiant [1]—[5].

Ecuațiile de mișcare vîsco-inerțială pentru cazul lagărelor de alungire finită sînt dificil de rezolvat prin tehnici convenționale mai ales cînd apare și curgere de tip turbulent. În această lucrare se vor prezenta particularitățile privind utilizarea metodei de calcul numeric cu element finit pentru curgere laminară și turbulentă în lubrificația vîsco-inerțială.

2. ECUAȚIA LUBRIFICAȚIEI VÎSCO-INERȚIALĂ

După cum s-a arătat în [3], se poate porni de la ecuațiile de impuls după direcțiile x și z, integrate termen cu termen cu y de la 0 la h,

$$\rho I_x + h\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu k_x}{h}\left(U_m - \frac{V}{2}\right) = 0,$$

$$\rho I_z + h\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu k_z}{h} W_m = 0, \tag{1}$$

unde

$$I_x = \frac{\partial I_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial I_{xz}}{\partial z},$$

$$I_z = \frac{\partial I_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial I_{zz}}{\partial z}, \tag{2}$$

iar coeficienții k_x, k_z au expresiile

$$k_x = \frac{1}{G_x} = 12 + 0{,}0136\, R_e^{0{,}9},$$

$$k_z = \frac{1}{G_z} = 12 + 0{,}0043\, R_e^{0{,}96} \tag{3}$$

pentru regim turbulent și $k_x = 12$ pentru regim laminar.

Integralele I_{xx}, I_{xz}, I_{zz} au fost evaluate în [3], considerînd că forma profilelor de viteze nu este afectată mult de forțele de inerție,

$$I_{xx} = \alpha U_m^2 h - 2\,\delta\, U_m\, Vh + \beta\, V^2 h,$$

$$I_{xz} = \alpha\, U_m\, W_m\, h - \delta\, W_m\, Vh\,, \tag{4}$$

$$I_{zz} = \alpha\, W_m^2\, h\,,$$

unde

$$\alpha = 1{,}2\,;\quad \beta = 0{,}133\,;\quad \delta = 0{,}1 - \text{laminar},$$

$$\alpha = 1\,;\ \beta = \frac{0{,}885}{R_e^{0{,}367}}\,;\ \delta = 0 - \text{turbulent}. \tag{5}$$

Din (1) se poate scrie sub formă adimensională

$$\bar{U}_m = \frac{1}{2} - \bar{h}^2 G_x \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} - \mathscr{R}e \frac{C}{R}\, \bar{h}\, G_x\, \bar{I}_x\,,$$

$$W_m = -\,h^2 G_z \frac{R}{L}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} - \mathscr{R}e \frac{C}{R}\, \bar{h}\, G_z\, \bar{I}_z \tag{6}$$

și debitul definit de

$$\vec{q} = \vec{i}\, \bar{U}_m\, \bar{h} + \vec{k}\, \bar{W}_m\, \bar{h}, \tag{7}$$

rezultă

$$\vec{q} = \vec{i}\,\frac{h}{2} - \bar{h}^3 \vec{\nabla}^*\, \bar{p} - \mathscr{R}e \frac{C}{R}\, \bar{h}^2\, \vec{I}^*. \tag{8}$$

Aplicînd divergența ecuației (8), rezultă ecuația de continuitate sub formă integrată,

$$\vec{\nabla}\, \vec{q} = 0 \tag{9}$$

sau

$$\vec{\nabla}\left(\bar{h}^3 \vec{\nabla}^*\, \bar{p} - \vec{i}\,\frac{\bar{h}}{2} + \mathscr{R}e \frac{C}{R}\, \bar{h}^2\, \vec{I}^*\right) = 0\,. \tag{10}$$

De notat că ecuația (10) este neliniară, iar pentru $\vec{I}^* = 0$ se reduce la ecuația Reynolds.

3. METODA NUMERICĂ CU ELEMENT FINIT

Considerînd că aproximaţiile lubrificaţiei sînt valabile pe regiunea $\mathcal{R}$ (fig. 1), ecuaţia (10) este valabilă de asemenea pe regiunea $\mathcal{R}$. Frontiera S a acestei regiuni este considerată din două secţiuni, S_1 şi S_2 cu următoarele condiţii :

$$\bar{p} = 0 \quad \text{pe} \quad S_1 ; \quad \bar{q}_n = 0 \quad \text{pe} \quad S_2 , \tag{11}$$

unde q_n este debitul normal la S_2 .

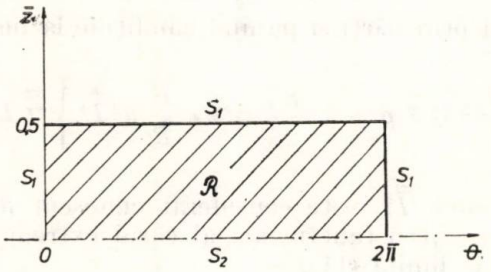


Fig. 1.

Împărţind domeniul într-un număr de elemente finite triunghiulare, se poate considera pe fiecare element variaţii liniare de genul :

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \sum_1^3 L_i \bar{h}_i , \\ G_{x,z} &= \sum_1^3 L_i \, G_{xi,zi} , \\ \bar{I}_{x,z} &= \sum_1^3 L_i \, I_{xi,zi} , \\ \bar{p} &= \sum_1^3 L_i \, \bar{p}_i , \end{aligned} \tag{12}$$

funcţie de valorile parametrilor, respectivi în noduri,

$$L_i = (\bar{a}_i + \bar{b}_i \, \theta + \bar{c}_i \bar{z})/2 \, \bar{A}_e , \tag{13}$$

unde

$$\bar{a}_j = \theta_i \, \bar{z}_k - \theta_k \bar{z}_j ; \quad \bar{b}_i = \bar{z}_i - \bar{z}_k ; \quad \bar{c}_i = \bar{x}_k - \bar{x}_j , \tag{14}$$

iar $\bar{A}_e$ este aria elementului.

Deoarece termenul $\vec{\bar{I}}^*$ este cel care introduce neliniaritatea, se va lucra iterativ considerînd valoarea lui $\vec{\bar{I}}^*$ dintr-o iterație anterioară. În acest caz se va aplica metoda lui Galerkin sub o formă particulară, considerînd pe fiecare element funcțiile de aproximare (13) cu ponderea $\bar{p}_i$. De observat că ponderea este chiar presiunea din nodurile elementului.

Metoda lui Galerkin duce la integrala

$$\chi_1 = \iint \vec{\bar{\nabla}} \cdot \left\{ \bar{h}^3 \vec{\bar{\nabla}}^* \bar{p} - \vec{i} \frac{\bar{h}}{2} + \mathscr{R}e \frac{C}{R} \bar{h}^2 \vec{\bar{I}}^* \right\} \cdot L_i \, d\bar{A} = 0 \qquad (15)$$

sau încă integrînd prin părți și punînd condițiile la limită (11),

$$\chi_1 = \iint \left\{ \bar{h}^3 \vec{\bar{\nabla}}^* \bar{p} - \vec{i} \frac{\bar{h}}{2} + \mathscr{R}e \frac{C}{R} \bar{h}^2 \vec{\bar{I}}^* \right\} \vec{\bar{\nabla}} L_i \, d\bar{A} = 0. \qquad (16)$$

În situația cînd $\vec{\bar{I}}^*$ este considerat cunoscut (din iterația anterioară) se poate scrie și o funcțională al cărui extrem să verifice ecuația (10) cu condițiile la limită (11),

$$\chi_2 = \iint \left\{ \frac{\bar{h}^3}{2} \vec{\bar{\nabla}}^* \bar{p} - \vec{i} \frac{\bar{h}}{2} + \mathscr{R}e \frac{c}{R} \bar{h}^2 \vec{\bar{I}}^* \right\} \cdot \vec{\bar{\nabla}} \bar{p} \, d\bar{A}. \qquad (17)$$

Integrînd pe fiecare element (cu aproximațiile (12)) și asamblînd funcționala χ_2 devine

$$\chi_2 = (\langle \bar{p} \rangle [FL] - \langle H \rangle + \langle FINER \rangle) \{\bar{p}\}. \qquad (18)$$

Dacă se pune condiția de extrem $\partial \chi_2 / \partial \bar{p}_j = 0$, se obține ecuația matriceală

$$2[FL] \cdot \{p\} = \{H\} - \{FINER\}, \qquad (19)$$

unde termenii matricelor $[FL]$, $\{H\}$, $\{FINER\}$ sînt dați de contribuția fiecărui element :

$$FL^e_{ij} = \frac{1}{480 A_e} \Bigg[\bar{b}_i \bar{b}_j \Bigg(\sum_1^3 \bar{h}_k \sum \bar{h}_h^2 \sum G_{xk} + 2\bar{h}_1 \bar{h}_2 \bar{h}_3 \sum G_{xk} +$$

$$+ \sum \bar{h}_k^2 \sum G_{xk} \bar{h}_k + 2 \sum \bar{h}_k \sum G_{xk} \bar{h}_k^2 \Bigg) + \qquad (20)$$

$$+ \bar{c}_i \bar{c}_j \frac{R^2}{L^2} \Big(\sum \bar{h}_k \sum \bar{h}_k^2 \sum G_{zk} + 2\bar{h}_1 \bar{h}_2 \bar{h}_3 \sum G_{zk} +$$

$$+ \sum \bar{h}_k^2 \sum G_{zk}\,\bar{h}_k + 2 \sum G_{zk}\,\bar{h}_k^2) \Big],$$

$$H_i^e = \frac{\bar{b}_i}{12} \sum_1^3 \bar{h}_k,$$

$$FINER_i^e = \mathscr{R}e\,\frac{C}{R}\,\frac{1}{90}\Big\{\bar{b}_i\Big[\sum_1^3 G_{xk}\,\bar{I}_{xk}\,\bar{h}_k \sum \bar{h}_k +$$

$$+ 0{,}5\,(\sum G_{xk}\,\bar{h}_k \sum \bar{I}_{xk}\,\bar{h}_k + \sum \bar{I}_{xk}\,\bar{h}_k^2 \sum G_{xk} +$$
$$+ \sum G_{xk}\,\bar{h}_k^2 \sum \bar{I}_{xk}) + 0{,}25\,(\sum \bar{I}_{xk} \sum G_{xk}\,(\sum \bar{h}_k)^2 +$$

$$+ \sum G_{xk}\,\bar{I}_{xk}\,(\sum \bar{h}_k)^2)\Big] + \bar{c}_i\,\frac{R}{L}\Big[\sum G_{zk}\,\bar{I}_{zk}\,\bar{h}_k \sum \bar{h}_h +$$

$$+ 0{,}5\,(\sum G_{zk}\,\bar{h}_k \sum \bar{I}_{zk}\,\bar{h}_k + \sum \bar{I}_{zk}\,\bar{h}_k^2 \sum G_{zk} +$$
$$+ \sum G_{zk}\,\bar{h}_k^2 \sum \bar{I}_{zk}) + 0{,}25\,(\sum \bar{I}_{zk} \sum G_{zk}(\sum \bar{h}_k)^2 +$$
$$+ \sum G_{zk}\,\bar{I}_{zy}\,(\sum \bar{h}_k)^2)\Big]\Big\}.$$

După calculul integralei χ_1 se obține aceeași ecuație matriceală (19).

Utilizînd această metodă s-au obținut rezultate interesante pentru o scurgere laminară peste o protuberanță cilindrică și sferică [6] și pentru lagăre circulare funcționînd în regim turbulent [7].

Primită la redacție la 10 iulie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. H. A. PUTRE, *Computer Solution on Unsteady Navier Stokes Equations*, NASA TND– 5682, 1970.
2. V. N. CONSTANTINESCU, *On the Influence of the Inertia Forces in Turbulent and Laminar Self Acting Films*, ASME Journal of Lubrication Technology, 92, *3*, 473–481 (1970).
3. V. N. CONSTANTINESCU, S. GĂLEȚUȘE, *On the Possibilities of Improving the Accuracy of the Evaluation of Inertia Forces in Laminar and Turbulent Films*, ASME Journal of Lubrification Technology, 97, *1*, 69–79 (1974).
4. S. GĂLEȚUȘE, *Un tip ipotetic de curgere visco-inerțială*, St. cerc. mec. apl. 32, *6*, 1163–1178 (1973).
5. R. A. BURTON, Y. C. HSU, *The Compressible Turbulent – Thin Film Short Bearing with Inertia Effects*, ASME Journal of Lubrication Technology, 97, *1*, 158–163 (1974).
6. F. E. KENNEDY, V. N. CONSTANTINESCU, S. GĂLEȚUȘE, *A Numerical Method for Studying Inertia Effects in Thin Film Lubrication*, Proceedings of the 2nd Leeds-Lyon Symposium on Tribology, 174–180 (1975).
7. V. N. CONSTANTINESCU, S. GĂLEȚUȘE, *Operating Characteristics of Journal Bearings in Turbulent Inertial Flow*, ASME Journal of Lubrication Technology, 104, *12* (1981).

METODA DE CALCUL AL UZURII LA CUPLE SUPERIOARE DE FRECARE

de LUCIAN CĂPITANU

Institutul de fizica şi tehnologia materialelor, Bucureşti

Lucrarea prezintă dezvoltarea şi generalizarea unei metode analitice de calcul al uzurii elementelor plane [1], la cuple superioare de frecare. Metoda permite calculul foarte precis al volumului de material îndepărtat prin uzare şi al adîncimii stratului uzat, la cuple experimentale, doar pe baza măsurării optice a lăţimii amprentelor de uzare.

I. INTRODUCERE

Funcţionarea cuplelor superioare de frecare (cu contact punctiform sau liniar) evidenţiază apariţia unei amprente de uzare pe suprafaţa semicuplei plane, ca urmare a pătrunderii semicuplei sferice sau cilindrice în materialul semicuplei plane. Neţinînd seamă decît parţial de elasticitatea elementelor cuplei, pe baza ipotezelor contactului hertzian, se pot utiliza, pentru calculul uzurii elementului plan al cuplelor de frecare, relaţii matematice, care însă, introduc erori apreciabile ca urmare a ipotezelor obţinute.

Studiile experimentale efectuate au evidenţiat faptul că raza semicuplei sferice sau cilindrice, r_1, nu poate fi identificată cu raza acestora în zona de contact cu semicupla plană [3]. Aceasta se datoreşte deformaţiei elastice accentuate a semicuplei de revoluţie, ceea ce are ca efect

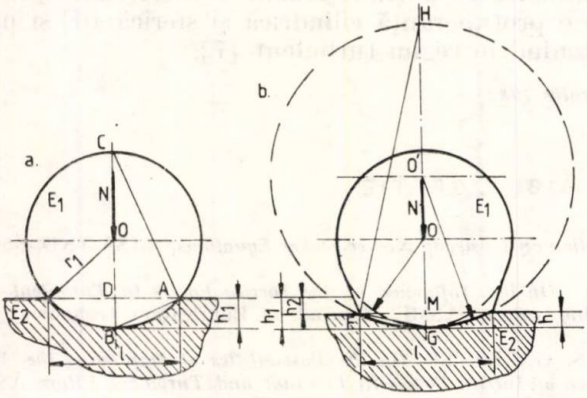


Fig. 1. — Deformarea elastică sub sarcină a semicuplei de revoluţie, la cuple superioare de frecare.

creşterea razei sale de curbură în zona de contact, r_2 [2]. Acest fenomen are ca efect scăderea adîncimii amprentei de uzare de la valoarea h_1, care ar apare în cazul neglijării deformaţiei elastice, la valoarea h, cu cantitatea h_2 (fig. 1), în conformitate cu relaţia

$$h_2 = h_1 - h. \tag{1}$$

II. METODA ANALITICĂ DE CALCUL

Notind cu l lăţimea amprentei de uzare, din $\Delta\ ABC$ şi $\Delta\ FGH$, rezultă

$$h_1 = l^2/8\ r_1, \tag{2}$$

$$h = l^2/8r_2\ . \tag{3}$$

Relaţia (1) devine:

$$h_2 = \frac{l^2}{8}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = l^2\ (r_2 - r_1)/8\ r_1r_2 = l^2/8r, \tag{4}$$

unde r reprezintă raza echivalentă in zona de contact:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 - r_1}{r_1r_2}\ . \tag{5}$$

Considerind cupla superioară de frecare, solicitată in domeniul elastic, cu o distribuţie eliptică de eforturi, relaţiile lui Hertz, pentru calculul lăţimii amprentei de uzare, sînt:

— pentru cupla cilindru/plan

$$l^2/4 = 9\ Nr\ (1 - \nu^2)/3{,}14\ EL\ ; \tag{6}$$

— pentru cupla sferică/plan:

$$l^3/8 = 1{,}5\ Nr(1 - \nu^2)/E. \tag{7}$$

În relaţiile de mai sus, ν reprezintă coeficientul lui Poisson, L — lungimea amprentei de uzare, N — sarcina normală, E — modulul de elasticitate echivalent: $E = 2\ E_1E_2/0{,}91\ (E_1 + E_2)$.

Din relaţiile lui Hertz, introducînd expresiile modulului de elasticitate echivalent, a razei echivalente şi valoarea numerică a coeficientului lui Poisson ($\nu = 0{,}3$), rezultă:

— pentru cupla cilindru/plan:

$$l = 4\left[2N\ \frac{r_1r_2}{r_2 - r_1} \cdot 0{,}91^2 \frac{E_1 + E_2}{3{,}14\ E_1E_2}\right]^{1/2}; \tag{8}$$

— pentru cupla sferă/plan:

$$l = 0{,}621\ \frac{N(E_1 + E_2)}{h_2\ E_1E_2}\ . \tag{9}$$

Rezultă expresia grosimii stratului de material uzat:

— pentru cupla cilindru/plan:

$$h_2 = 0{,}527\ \frac{N(E_1 + E_2)}{LE_1E_2}; \tag{10}$$

— pentru cupla sferă/plan :

$$h_2 = 0{,}621 \frac{N(E_1 + E_2)}{E_1 E_2}. \quad (11)$$

Rezultă expresia grosimii stratului de material uzat :
— la cupla cilindru/plan :

$$h = \frac{l^2}{8\, r_1} - 0{,}527 \frac{N(E_1 + E_2)}{LE_1 E_2}; \quad (12)$$

— la cupla sferă/plan :

$$h = \frac{l^2}{8 r_1} - 0{,}621 \frac{N(E_1 + E_2)}{E_1 \cdot E_2}. \quad (13)$$

Raportînd relaţia (2) la relaţia (3), dezvoltarea analitică prezentată permite şi calculul razei semicuplei de revoluţie, deformate elastic în zona de contact al cuplelor. Se obţine astfel :
— la cupla cilindru/plan :

$$r_2 = \frac{r_1}{1 - 4{,}216\, (r_1/l^2)\, [N(E_1 + E_2)/LE_1E_2]}; \quad (14)$$

— la cupla sferă/plan :

$$r_2 = \frac{r_1}{1 - 4{,}968\, (r_1/l^3)\, [N(E_1 + E_2)/E_1 E_2]}. \quad (15)$$

Pentru determinarea volumului de material uzat, se consideră amprenta de uzare ca fiind formată dintr-o sumă de sectoare de cilindru, de lungime egală (în cazul cuplei cilindru/plan). În această accepţiune, suprafaţa laterală a unui sector de cilindru i, care este un segment de cerc, este dată de relaţia

$$S_i = 0{,}5\, r^2\, [3{,}14\, \varphi_i^0/(180^\circ - \sin \varphi_i)], \quad (16)$$

unde

r — raza arcului de cerc ;
φ_i^0 — unghiul la centru.

Prin dezvoltarea în serie a relaţiei (16), neglijarea puterilor mari şi reducerea termenilor asemenea, rezultă

$$S_i = r^2\, \varphi_i^3/12. \quad (17)$$

Înlocuind unghiul la centru prin raportul l/r şi ţinînd seamă de relaţia (5), rezultă

$$S_i = l^3(r_2 - r_1)/12\, r_1 r_2 = 2/3\, lh_2. \quad (18)$$

Introducînd în relaţia (18) valoarea lui h_2 dată de relaţia (10), se obţine

$$S_i = 0{,}351 \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \cdot \frac{N}{L}. \quad (19)$$

Suprafața transversală medie a amprentei va fi

$$S = 0{,}351 \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \cdot \frac{l_m \cdot N}{L}. \tag{20}$$

Volumul de material îndepărtat, prin uzare din suprafața semicuplei plane al cuplei cilindru/plan, va fi:

$$V_u = \sum_{i=1}^{n} S\, p_i \cong 0{,}351 \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} N \cdot L_m, \tag{21}$$

unde l_m reprezintă lățimea medie a amprentei de uzare.

În cazul cuplei sferă/plan, amprenta de uzare reprezintă de fapt un sector sferic, al cărui volum este

$$V_u = \frac{2\pi}{3} r_2^2 h. \tag{22}$$

Dezvoltînd analitic, pe baza relațiilor anterioare, se obține

$$V_u = \frac{2\pi}{3} r_2 (r_2 h) = \frac{2\pi}{3} r_2 \frac{l^2}{8} = \frac{\pi}{12} r_2 \cdot l^2.$$

Introducînd în relația anterioară valoarea razei semicuplei deformate elastic, din relația (15), rezultă

$$V_u = 0{,}261 \frac{r_1 l^2}{1 - 4{,}968 \dfrac{r_1}{l^3} \dfrac{N(E_1 + E_2)}{E_1 E_2}}. \tag{23}$$

III. CONCLUZII

Relațiile prezentate pentru calculul adîncimii stratului de material uzat, h, a razei corpului de revoluție deformat în zona de contact, r_2, și a volumului de material îndepărtat prin uzare, sînt dependente de constantele elastice ale materialelor în contact, de sarcina normală aplicată cuplei, de dimensiunile corpurilor în contact și de lățimea amprentei de uzare. Singurul element care se cere măsurat, prin această metodă, este lățimea amprentei. Această mărime se poate măsura fără erori apreciabile prin mijloace optice, de performanță medie.

Metoda înlătură necesitatea profilometrării amprentelor și a poziționării cît mai precise a locului în care se face profilometrarea și măsurarea lățimii amprentei.

Primită la redacție la 21 decembrie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. L. CĂPITANU, *Influența deformației elastice a elementului cilindric asupra uzurii elementului plan al unei cuple de frecare de tip Timken*, St. cerc. mec. apl., **38**, 6,907—914, (1979).
2. D. PAVELESCU, *Tribologie*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1977.
3. A. D. SADKAR, *Wear of Metals*, Pergamon Press, 1976.

SISTEME AUTOMATE DE AVANS AL SAPEI DE FORAJ CU DISPOZITIV DE FRÎNARE TIP POMPĂ VOLUMICĂ ROTATIVĂ CU PLUNGERE AXIALE

de V. CÎRTOAJE, CR. BUCUR, N. PARASCHIV

Institutul de petrol și gaze, Ploiești

În condițiile creșterii adîncimii de foraj și extinderii forajului marin, conducerea automată a procesului de avans al sapei de foraj constituie un factor important de creștere a randamentului forajului, prin asigurarea unei viteze mărite de dislocare a rocilor, unei siguranțe sporite în funcționarea instalației de foraj și a unei mai bune verticalități a găurii de sondă.

Lucrarea de față constituie una din primele abordări în concepție sistemică a variantelor de automatizare a avansului sapei de foraj (atît la forajul cu masă rotativă, cît și la cel cu motor submersibil — electric sau hidraulic) cu ajutorul dispozitivului de frînare tip pompă volumică rotativă cu plungere axiale, realizat la întreprinderea „1 Mai" Ploiești.

Un punct important al lucrării îl constituie analiza pe bază de model matematic a unei variante îmbunătățite a dispozitivului de execuție, obținute prin adăugarea la dispozitivul de frînare tip pompă volumică rotativă cu plungere axiale a unei reacții negative, cu rolul de a asigura o proporționalitate bine determinată între mărimea de execuție (viteza de deplasare a garniturii la cîrlig) și mărimea de comandă (generată de regulator), în condițiile acțiunii puternice a perturbației constituite de greutatea garniturii de foraj.

1. PRINCIPIUL DE FUNCȚIONARE AL SISTEMELOR AUTOMATE DE AVANS AL SAPEI DE FORAJ

Automatizarea convențională a procesului de avans al sapei de foraj presupune menținerea constantă, la o valoare considerată optimă, a unei mărimi tehnologice ce condiționează desfășurarea în bune condiții a procesului de dislocare a rocii, pe baza modificării corespunzătoare a vitezei de coborîre a capătului superior al garniturii de prăjini.

În funcție de mărimea reglată, sistemele automate de avans pot fi :

— cu reglare a sarcinii axiale (forței de apăsare a sapei pe rocă);

— cu reglare a vitezei de rotație a sapei;

— cu reglare a momentului rezistent la sapă;

— cu reglare a puterii de rotație la sapă.

Sistemele automate din prima categorie se împart la rîndul lor în două clase : cu reglarea propriu-zisă a sarcinii axiale la sapă și cu reglarea indirectă a sarcinii axiale la sapă, prin intermediul sarcinii la capătul superior al garniturii de foraj. În ipoteza neglijării frecării și eventualelor prinderi ale garniturii de pereții găurii de sondă, variațiile celor două sarcini față de valorile de regim staționar sînt egale. Deși sistemele din prima clasă pot realiza performanțe superioare celor din a doua clasă, ele nu sînt utilizate la scară industrială datorită dificultăților întîmpinate la măsurarea directă a sarcinii axiale pe sapă. Sistemele de reglare automată a sarcinii axiale se pot utiliza atît la forajul cu masă rotativă, cît și la forajul cu motor submersibil.

Sistemele de avans automat cu reglare a vitezei de rotație a sapei se pot utiliza practic numai la forajul cu turbină hidraulică, la care viteza de rotație a sapei scade aproximativ liniar cu creșterea momentului re-

zistent la sapă. Atunci cînd discurile rotoare și statoare ale turbinei au profile speciale, care asigură o variație crescătoare sau descrescătoare a căderii de presiune cu viteza de rotație a sapei, se pot utiliza și sisteme de avans automat cu reglarea căderii de presiune pe turbină.

Sistemele de avans automat cu reglare a momentului rezistent la sapă au, deocamdată, o utilizare restrînsă (numai în cercetare), datorită dificultăților de măsurare și transmitere la suprafață a valorii mărimii reglate.

Sistemele de avans automat cu reglare a puterii de rotație la sapă își găsesc aplicație în cadrul forajului cu motor electric submersibil, la care valoarea curentului absorbit de motor constituie o măsură a puterii consumate în vederea realizării rotirii sapei de foraj.

Orice sistem de avans automat este alcătuit din patru elemente principale (fig. 1): procesul de automatizat, dispozitivul de măsurare a mărimii reglate, dispozitivul de comandă (regulatorul) și dispozitivul de execuție.

La rîndul lui, procesul de automatizat este format din două sau trei subsisteme, cuplate funcțional prin intermediul mărimilor de intrare-ieșire: garnitura de prăjini *GP*, subsistemul sapă-rocă *SR* și motorul de rotație a sapei *MRS* (numai la forajul cu turbină, deoarece la forajul cu masă rotativă sau cu motor electric submersibil, viteza de rotație a sapei n_s este practic constantă în raport cu momentul rezistent la sapă M_s).

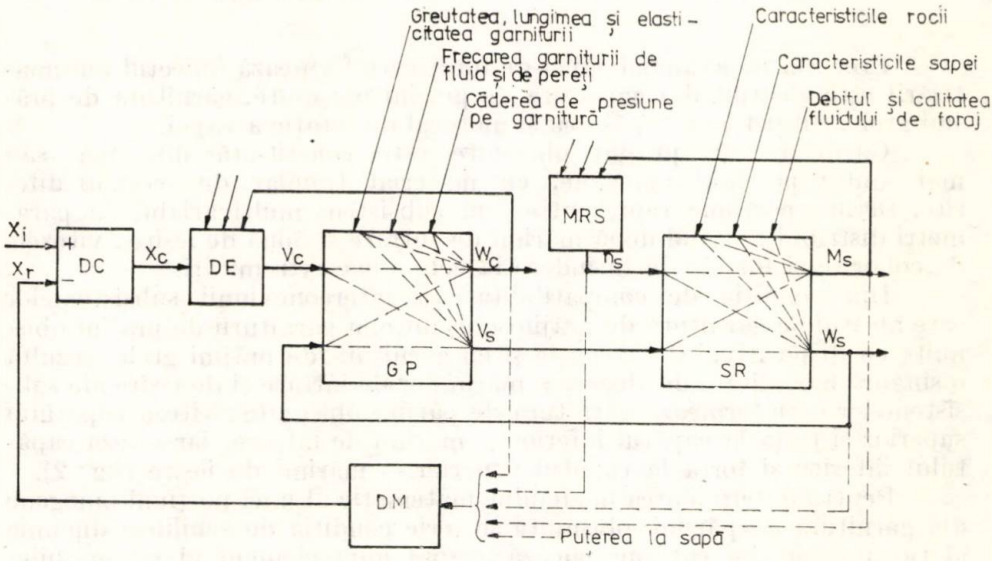


Fig. 1. — Schema generală a sistemului automat de avans al sapei de foraj.

Subsistemul *GP* este alcătuit din una sau mai multe porțiuni de prăjini obișnuite cu secțiuni diferite și din garnitura de prăjini grele; este multivariabil, cu două mărimi de intrare (viteza la cîrlig v_c și sarcina de apăsare pe sapă W_s) și două mărimi de ieșire (viteza de avans a sapei v_s

și sarcina la cîrlig W_c), iar prin neglijarea forțelor de frecare uscată dintre garnitură și pereții găurii de sondă este liniar.

Subsistemul sapă-rocă este multivariabil, lipsit de inerție, în general neliniar.

Motorul de rotație a sapei (turbina hidraulică) constituie un element monovariabil, de tip proporțional.

În cazul cînd mărimea reglată este sarcina la cîrlig, dispozitivul de măsurare DM este un ansamblu traductor-adaptor, iar cînd mărimea reglată este un parametru de fund, dispozitivul de măsurare mai conține și un sistem de teletransmisie la suprafață a valorii parametrului.

Dispozitivul de comandă DC este un regulator clasic, electronic sau pneumatic.

Dispozitivul de execuție, DE, alcătuit din dispozitivul de frînare, toba troliului, cablul de foraj și mecanismul geamblac-macara-cîrlig, are ca mărime de intrare semnalul de comandă x_c generat de dispozitivul de comandă, iar ca mărime de ieșire viteza v_c de deplasare a garniturii la cîrlig. Asupra dispozitivului de execuție acționează puternic, cu caracter perturbator, sarcina W_c de la cîrligul macaralei de foraj. Cele mai cunoscute dispozitive de frînare din componența dispozitivului de execuție al sistemului de avans automat al sapei de foraj sînt frînele cu bandă sau cu saboți, frînele de tip pompă volumică rotativă cu plungere axiale, motoarele electrice și frînele magnetice cu pulbere.

2. ASPECTE ALE DINAMICII PROCESULUI DE AVANS AL SAPEI DE FORAJ

Procesul de avans al sapei de foraj care formează obiectul automatizării este alcătuit din garnitura de prăjini obișnuite, garnitura de prăjini grele, subsistemul sapă-rocă și motorul de rotație a sapei.

Garnitura de prăjini obișnuite este constituită din una sau mai multe porțiuni omogene, cu material tubular de secțiuni diferite, fiecare porțiune reprezentînd un subsistem multivariabil cu parametri distribuiți, avînd două mărimi de intrare și două de ieșire : vitezele de coborîre și forțele de întindere la cele două extremități.

Din condiția de compatibilitate a interconexiunii subsistemelor care alcătuiesc garnitura de prăjini obișnuite, a garniturii de prăjini obișnuite cu dispozitivul de execuție și cu garnitura de prăjini grele, rezultă o singură modalitate de alegere a mărimilor de intrare și de ieșire ale subsistemelor care formează garnitura de părjini obișnuite : viteza capătului superior și forța la capătul inferior — mărimi de intrare, iar viteza capătului inferior și forța la capătul superior — mărimi de ieșire (fig. 2).

Pentru determinarea modelului matematic al unei porțiuni omogene din garnitura de părjini obișnuite se scrie condiția de echilibru dinamic al tuturor forțelor care acționează asupra unui element al materialului tubular cuprins între două secțiuni infinit apropiate, de coordonate x și $x + \mathrm{d}x$ (fig. 3). Aceste forțe sînt :

— forța de inerție :

$$A\,\mathrm{d}x\rho\,\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2}, \tag{1}$$

unde A este aria transversală a garniturii, iar ρ — densitatea materialului garniturii;

— forța rezultantă de natură elasto-disipativă:

$$A[\sigma(t, x + \mathrm{d}x) - \sigma(t, x)] = A \frac{\partial \sigma(t, x)}{\partial x} \mathrm{d}x, \tag{2}$$

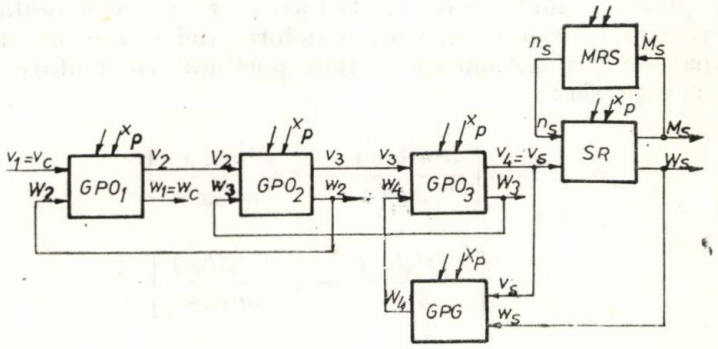


Fig. 2. — Schema funcțională bloc a procesului de avans al sapei de foraj.

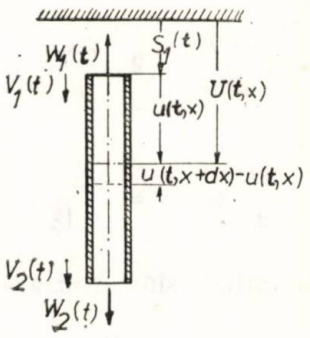


Fig. 3. — Porțiune omogenă a garniturii de prăjini obișnuite.

unde σ este efortul unitar longitudinal de întindere;

— forța de frecare vîscoasă:

$$\varepsilon \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \mathrm{d}x, \tag{3}$$

unde ε este un coeficient de frecare vîscoasă;

— greutatea proprie:

$$A \, \mathrm{d}x \, \rho \, g; \tag{4}$$

— forța de frecare uscată cu pereții găurii de sondă:

$$q(x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{sign} \frac{\partial U(t, x)}{\partial t}, \tag{5}$$

unde $q(x)$ este o funcție de frecare uscată corespunzătoare unei unități de lungime.

În ipoteza că materialul tubular satisface modelul Kelvin al corpurilor elasto-disipative:

$$\sigma(t) = E[\delta(t) + \tau\delta(t)], \tag{6}$$

unde E reprezintă modulul de elasticitate, iar τ — constanta de timp ce caracterizează întîrzierea în timp a deformației δ față de efort, forța elasto-disipativă care acționează asupra porțiunii elementare de garnitură capătă expresia:

$$AE\mathrm{d}x\left[\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \tau\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t\,\partial x^2}\right] \tag{7}$$

sau

$$AE\,\mathrm{d}x\left[\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2} + \tau\frac{\partial^3 U(t,x)}{\partial t\,\partial x^2}\right]. \tag{8}$$

Modelul matematic obținut se prezintă sub forma unei ecuații cu derivate parțiale:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - 2\beta\frac{\partial^3 U}{\partial t\,x^2} + 2\nu\frac{\partial U}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = g - q_1(x)\,\mathrm{sign}\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{9}$$

unde

$$\beta = \frac{\tau E}{2\rho}; \quad \nu = \frac{\varepsilon}{2A\rho}; \quad c^2 = \frac{E}{\rho}; \quad q_1(x) = \frac{q(x)}{A}. \tag{10}$$

Condițiile inițiale sînt arbitrare:

$$U(t,x)\big|_{t=0} = f_1(x), \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = f_2(x), \tag{12}$$

iar condițiile la limită se referă la cele două mărimi de intrare, viteza de coborîre a capătului superior v_1 și forța de întindere a capătului inferior W_2:

$$\left.\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right|_{x=0} = v_1(t), \tag{13}$$

$$AE\left[\frac{\partial U(t,x)}{\partial x} + \tau\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t\,\partial x}\right]\Bigg|_{x=L} = W_2(t) + AE. \tag{14}$$

În ipoteza neglijării forțelor de frecare uscată dintre garnitură și pereții găurii de sondă ($q_1(x) \equiv 0$), modelul matematic al garniturii de prăjini este liniar, iar dependența mărimilor de ieșire în raport de mărimile de intrare se poate exprima prin intermediul funcțiilor de transfer.

Pentru determinarea funcțiilor de transfer, se presupune că la momentul inițial $t = 0$, garnitura de prăjini se găsește într-un regim staționar, caracterizat prin condițiile inițiale:

$$f_1(x) = -\frac{g - 2\nu v_1(0)}{2c^2}\, x^2 + \left[\frac{g - 2\nu v_1(0)}{c^2} L + 1 + \frac{W_2(0)}{AE}\right] x, \tag{15}$$

$$f_2(x) = \nu_1(0). \tag{16}$$

Prin metoda separării variabilelor se găsește expresia dependenței mărimii $U(t, x)$ de mărimile de intrare $v_1(t)$ și $W_2(t)$, apoi cu relațiile:

$$v_2(t) = v(t, x)\,|_{x=L} = \left.\frac{\partial U(t, x)}{\partial t}\right|_{x=L}, \tag{17}$$

$$W_1(t) = W(t, x)\,|_{x=0} = AE\left[\frac{\partial U(t, x)}{\partial x} - 1 + \tau \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t\, \partial x}\right], \tag{18}$$

se află expresiile mărimilor de ieșire $v_2(t)$ și $W_1(t)$ în raport cu mărimile de intrare $v_1(t)$ și $W_2(t)$.

Prin aplicarea transformării Laplace, se obține:

$$\begin{aligned} V_2(s) &= Y_{11}(s)V_1(s) + Y_{12}(s)W_2(s), \\ W_1(s) &= Y_{21}(s)V_1(s) + Y_{22}(s)W_2(s), \end{aligned} \tag{19}$$

unde

$$Y_{11}(s) = Y_{22}(s) = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k - 1} \cdot \frac{s(s + 2\nu)}{(s + \alpha_k)^2 + \omega_k^2}, \tag{20}$$

$$Y_{12}(s) = \frac{L}{AE} \cdot \frac{s}{\tau s + 1}\left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k - 1)^2} \cdot \frac{s(s + 2\nu)}{(s + \alpha_k)^2 + \omega_k^2}\right], \tag{21}$$

$$Y_{21}(s) = -\frac{2AE}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(s + 2\nu)(\tau s + 1)}{(s + \alpha_k)^2 + \omega_k^2}, \tag{22}$$

iar

$$\alpha_k = \nu + \beta\lambda_k, \tag{23}$$

$$\omega_k = \sqrt{c^2\lambda_k^2 - \alpha_k^2}, \tag{24}$$

$$\lambda_k = \frac{(2k - 1)\pi}{2L}. \tag{25}$$

Din expresiile funcţiilor de transfer reiese că dinamica garniturii de prăjini obişnuite se caracterizează prin prezenţa oscilaţiilor amortizate, fapt confirmat în activitatea practică. Gradul de amortizare este determinat de frecarea internă a garniturii şi de frecarea viscoasă dintre garnitură şi fluidul de foraj.

Garnitura de prăjini grele *GPG* (fig. 2) formează un subsistem cu parametri concentraţi, al cărui model matematic se obţine imediat prin aplicarea principiului lui D'Alembert:

$$W_4 = -m_2\dot{v}_s - W_s + m_2 g + W_{\Delta p} - W_h, \tag{26}$$

unde m_2 este suma maselor prăjinilor grele, a sapei de foraj şi a motorului submersibil (dacă există), $W_{\Delta p}$ — forţa determinată de căderea de presiune pe sapă, iar W_h — forţa care se exercită asupra sapei datorită presiunii hidrostatice.

Subsistemul sapă-rocă, aşa cum este reprezentat în figurile 1 şi 2, nu se bucură de cea mai potrivită alegere a mărimilor de intrare şi de ieşire. Din motive de cauzalitate, ar fi fost mai normal ca forţa de apăsare pe sapă W_s să fie mărime de intrare, iar viteza de avans a sapei — mărime de ieşire. De altfel, sub această formă sînt deduse experimental şi cunoscute în literatura de specialitate relaţiile care descriu dependenţa mărimilor de ieşire în raport cu mărimile de intrare.

Dacă sînt cunoscute relaţiile care exprimă dependenţa mărimilor v_s şi M_s în raport cu mărimile W_s şi n_s:

$$v_s = f(W_s, n_s); \quad M_s = g(W_s, n_s), \tag{27}$$

atunci, prin rezolvarea sistemului algebric format de cele două ecuaţii în raport cu necunoscutele W_s şi M_s, se obţin relaţiile de dependenţă a mărimilor W_s şi M_s în raport cu mărimile v_s şi n_s:

$$W_s = f_1(v_s, n_s), \quad M_s = g_1(v_s, n_s). \tag{28}$$

Spre exemplificare, relaţiile de dependenţă cunoscute în literatura de specialitate,

$$v_s = a\, W_s^k f(n_s); \quad M_s = M_{sp}\, W_s, \tag{29}$$

capătă în noua variantă următoarele forme:

$$W_s = \left[\frac{v_s}{af(n_s)}\right]^{\frac{1}{k}}; \quad M_s = M_{sp}\left[\frac{v_s}{af(n_s)}\right]^{\frac{1}{k}}, \tag{30}$$

unde a este un coeficient a cărui valoare depinde de caracteristicile de forabilitate ale rocii, de tipul, de diametrul şi de starea sapei, precum şi de gradul de degajare a tălpii de detritus, M_{sp} este momentul specific (avînd valoarea dependentă de caracteristicile rocii, precum şi de tipul,

de diametrul și de starea sapei), k este un exponent a cărui valoare crește cu duritatea rocii în cazul sapelor cu role (după Galle-Woods, egal cu 0,6 pentru roci slabe și cu 1 pentru celelalte categorii de roci), iar $f(n_s)$ reprezintă o funcție, mai mult sau mai puțin sofisticată, în raport cu n_s.

Observație. Printr-o alegere convenabilă a mărimilor de intrare-ieșire ale subsistemelor care alcătuiesc garnitura de prăjini obișnuite, este posibil ca subsistemul sapă-rocă să aibă ca mărimi de intrare pe W_s și n_s. Inconvenientul unei asemenea alegeri constă în faptul că subsistemele garniturii de prăjini obișnuite nu mai au același tip de mărimi de intrare și de ieșire, deci există cel puțin un subsistem cu alte funcții de transfer decît (20), (21) și (22).

În ceea ce privește motorul de rotație a sapei *MRS*, la forajul cu masă rotativă sau cu motor electric submersibil, mărimea de ieșire n_s este practic constantă în raport cu mărimea de intrare M_s; în schimb, la forajul cu turbină hidraulică, viteza de rotație a sapei n_s scade practic proporțional cu momentul rezistent la sapă M_s:

$$n_s = n_{sg}\left(1 - \frac{M_s}{M_{s0}}\right), \tag{31}$$

unde n_{sg} reprezintă viteza de rotație în gol, iar M_{s0} — momentul rezistent de oprire a sapei.

3. METODE ȘI MIJLOACE DE MĂSURARE A MĂRIMII REGLATE

Sistemul de reglare automată a sarcinii la capătul superior al garniturii de foraj (la cîrlig) este singurul tip de sistem de avans automat al sapei de foraj, bazat pe reglarea unui parametru de suprafață. Datorită dificultăților de măsurare a parametrilor de fund ce caracterizează procesul de avans al sapei, acest sistem este de fapt singurul care a căpătat extindere la scară industrială, cu toate că valoarea sarcinii la cîrlig nu reflectă întotdeauna cu suficientă precizie valoarea sarcinii axiale pe sapă.

În ipoteza neglijării frecării și prinderilor garniturii de pereții găurii de sondă, precum și a reacțiunii dezvoltate prin lovirea jeturilor de fluid care ies din orificiile sapei de talpa sondei, forța de apăsare pe sapă este egală cu variația sarcinii la cîrlig produse la trecerea garniturii din stare liber suspendată (cu sapa deasupra tălpii) în stare curentă de lucru (cu sapa acționînd asupra tălpii).

Pentru măsurarea sarcinii la cîrlig, traductorul se montează fie pe struna capătului fix (mort) al cablului de foraj, fie direct sub blocul geamblac-macara. Traductoarele hidraulice (care transformă sarcina măsurată în presiune hidraulică proporțională) sînt cele mai frecvent utilizate, dar se mai pot folosi și traductoare inductive (cu întrefier variabil, cu înfășurare secundară mobilă ș.a.) sau de tip selsin — care sesizează deformarea elastică a unei bare sau lame metalice, precum și traductoare inductive de tip magneto-elastic.

În pofida caracterului „spectaculos" al rezultatelor obținute pe baza măsurărilor la talpa sondei, o dezvoltare mai importantă în această direcție se constată numai în domeniul investigațiilor geofizice, unde măsurările se execută, de regulă, cu garnitura de foraj extrasă și cu aparatura de măsurat lansată prin cablu conductor. Condițiile deosebit de grele în care trebuie să lucreze traductoarele de fund (presiuni și temperaturi ridicate, șocuri și vibrații permanente, mediu coroziv și abraziv), precum și lipsa unui canal de teletransmisie comod, au împiedicat extinderea măsurărilor la talpa sondei în timpul operației efective de forare. În perspectivă însă, se așteaptă o dezvoltare remarcabilă în această direcție, prin perfecționarea aparaturii electronice introduse în gaura de sondă cu ajutorul unei carcase etanșe și rezistente la temperatură și presiune — urmare a progreselor continue ce se obțin în tehnologia materialelor semiconductoare, atît sub aspect constructiv-funcțional, cît mai ales din punctul de vedere al fiabilității și funcționării în condiții de lucru foarte dificile.

Parametrii tehnologici și geofizici de la talpa sondei sînt transformați cu ajutorul traductoarelor electrice adecvate în semnale proporționale, care sînt amplificate și „imprimate" pe un purtător capabil să se propage prin mediul canalului de comunicație utilizat. Perspectivele cele mai mari în transmisia semnalelor de la talpă la suprafață le au metodele de modulație armonică în frecvență sau fază, precum și cele de modulație în impulsuri, cu variantele în durată, în poziție sau în cod. Pentru transmiterea pe o singură linie a semnalelor de la mai multe traductoare se pot utiliza metodele de multiplexare cu divizare în frecvență sau cu divizare în timp.

În afara metodelor de teletransmisie electrică prin cablu conductor sau fără cablu conductor (bazate pe diferența de conductibilitate electrică dintre garnitura de foraj și straturile de roci), se mai pot utiliza metode acustice (care utilizează drept linie de transmisie coloana de prăjini sau fluidul de foraj) și metode hidraulice (prin intermediul pulsurilor de presiune din fluidul de foraj, emise cu elemente de tip supapă, piston etc.). Ultimele două metode presupun utilizarea unor mijloace tehnice relativ simple, dar au posibilități reduse de a transmite o cantitate mai mare de informație în unitate de timp.

Traductoarele de fund pentru măsurarea sarcinii axiale pe sapă pot fi inductive (bazate pe deformarea unui element metalic elastic de formă cilindrică, montat deasupra sapei sau a motorului submersibil), tensometrice (mărci cu fir sau cu peliculă imprimată, fixate cu un adeziv special pe un element elastic de tipul celui utilizat la traductoarele inductive) sau hidraulice (bazate pe dependența de sarcină a debitului unui lichid special, obligat să circule printr-o rezistență hidraulică, sub acțiunea sarcinii axiale la care este supusă sapa de foraj).

În cazul forajului cu motor submersibil, traductoarele de fund pentru măsurarea vitezei de rotație a sapei pot fi de tip inductiv (caracterizate prin impulsuri ale inductivității unei bobine electrice, avînd frecvența proporțională cu viteza de rotație a sapei), tahogenerator sincron sau hidraulic (caracterizate prin pulsuri hidraulice în fluidul de foraj, avînd frecvența proporțională cu viteza de rotație a sapei).

Măsurarea momentului rezistent la sapă se poate efectua cu traductoare inductive, capacitive sau tensometrice (pe baza deformării elastice a unui element cilindric, supus acțiunii momentului de măsurat), precum și cu traductoare magnetoelastice.

În cazul metodelor electrice de măsurare a parametrilor de fund, trebuie luate măsuri de prevenire sau de compensare a influenței variației în limite destul de largi a temperaturii mediului de la talpa sondei asupra rezultatului măsurării.

4. DISPOZITIVE DE EXECUȚIE CU POMPĂ VOLUMICĂ ROTATIVĂ CU PLUNGERE AXIALE

Dispozitivul de execuție cu pompă volumică rotativă cu plungere axiale din componența sistemului de avans automat al sapei de foraj este alcătuit din dispozitivul de frînare tip pompă cu plungere axiale *PPA*

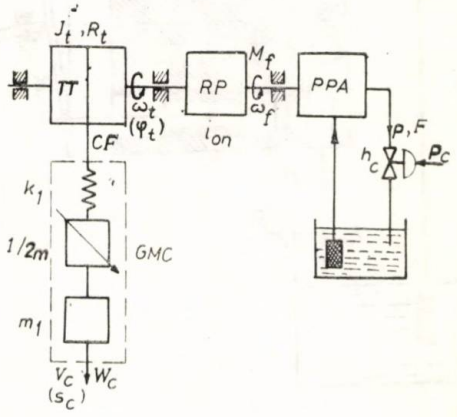


Fig. 4. — Dispozitiv de execuție cu pompă volumică rotativă cu plungere axiale.

reductorul planetar *RP*, toba troliului *TT*, cablul de foraj *CF* și mecanismul geamblac-macara-cîrlig *GMC* (fig. 4).

Rolul dispozitivului de execuție este acela de a asigura, în condițiile unei sarcini la cîrlig W_c de valori diferite, o viteză de deplasare a garniturii la cîrlig v_c în concordanță cu semnalul de comandă generat de dispozitivul de comandă, materializat prin deplasarea h_c a tijei robinetului de reglare montat pe conducta de refulare a pompei.

Debitul mediu F de lichid (ulei special) vehiculat prin pompă este proporțional cu viteza de rotație ω_f a arborelui pompei, iar presiunea p a lichidului la ieșirea din pompă este proporțională cu momentul mediu de frînare M_f la arborele pompei (fig. 5):

$$F = \frac{1}{a_1}\ \omega_f, \tag{32}$$

$$p = a_1 M_f, \tag{33}$$

cu

$$a_1 = \frac{4}{d^2 R z \sin\gamma}, \tag{34}$$

unde d reprezintă diametrul plungerelor, R — raza discului de antrenare a plungerelor, z — numărul de plungere ale pompei, iar γ — unghiul de înclinare a discului față de planul perpendicular pe direcția de deplasare a plungerelor.

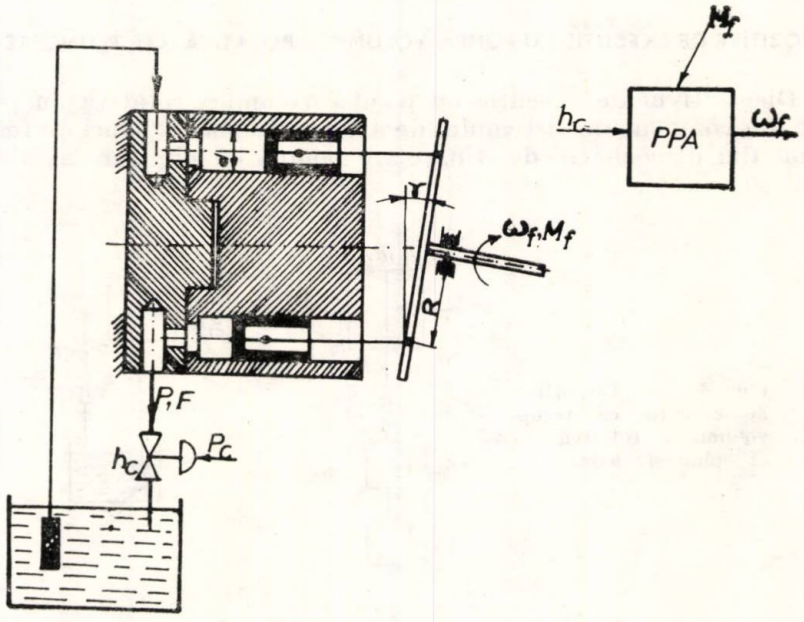


Fig. 5. — Dispozitiv de frînare tip pompă volumică rotativă cu plungere axiale.

Între căderea de presiune p produsă pe robinetul de reglare și debitul de lichid F care trece prin robinet, există relația :

$$F = a_2 K_v(h_c)\sqrt{p}, \tag{35}$$

cu

$$a_2 = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho p_0}}, \tag{36}$$

unde K_v este debitul specific al robinetului de reglare, ρ — densitatea lichidului, $\rho_0 = 1000$ kg/m^3, iar $p_0 = 1$ daN/cm^2.

Prin înlocuirea mărimilor F și p date de relațiile (32) și (33) în (35), se găsește relația de dependență a mărimii de ieșire ω_f în raport cu mărimea de comandă h_c și mărimea perturbatoare M_f :

$$\omega_f = aK_v(h_c)\sqrt{M_f}, \tag{37}$$

unde

$$a = a_1^{\frac{3}{2}} a_2. \tag{38}$$

În scopul diminuării influenței puternice a perturbației M_f asupra mărimii de ieșire ω_f, dispozitivul de frînare trebuie prevăzut cu o reacție negativă în raport cu mărimea de ieșire. Din punct de vedere constructiv-funcțional, reacția poate fi realizată cu ajutorul unui diferențial mecanic DM și a unui convertor deplasare-presiune D/P (fig. 6).

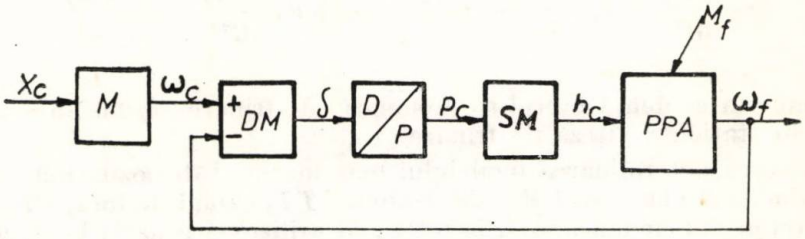


Fig. 6. — Schema bloc a dispozitivului de frînare cu pompă cu plungere axiale și reacție negativă.

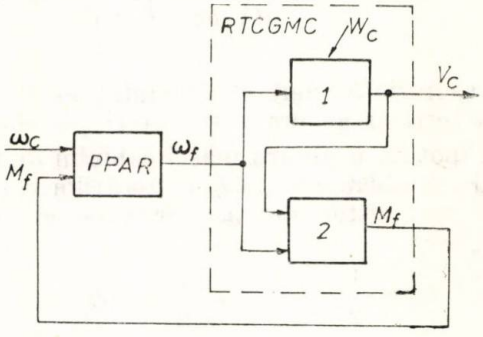


Fig. 7. — Schema de calcul a modelului matematic atașat dispozitivului de execuție.

Diferențialul mecanic este un element de tip integrator

$$\delta = \int_0^t (b_1 \omega_c - b_2 \omega_f)\, dt + \delta_0, \tag{39}$$

iar ansamblul format de convertorul deplasare-presiune și servomotorul pneumatic SM poate fi echivalat din punct de vedere dinamic cu un element de întîrziere de ordinul I:

$$T \frac{dh}{dt} + h_c = k\delta\,. \tag{40}$$

Datorită caracterului integrator al diferențialului mecanic, viteza de rotație a arborelui pompei de frînare va avea în regim staționar o valoare independentă de mărimea momentului de frînare M_f:

$$\omega_f = \frac{b_1}{b_2} \omega_c. \tag{41}$$

Viteza de rotație cu rol de comandă ω_c poate fi generată cu ajutorul motorului M, electric (de preferință, pas cu pas — în cazul cînd regulatorul este cu comandă numerică) sau pneumatic.

Prin liniarizarea relației (37) în jurul unui punct de funcționare, modelul matematic al dispozitivului de frînare cu reacție negativă se prezintă sub forma unei ecuații diferențiale liniare de ordinul II:

$$c_2 \frac{d^2\omega_f}{dt^2} + c_1 \frac{d\omega_f}{dt} + \omega_f = d_0\omega_c + d_2 \frac{d^2 M_f}{dt^2} + d_1 \frac{dM_f}{dt}, \qquad (42)$$

care pune în evidență faptul că momentul de frînare M_f nu influențează în regim staționar viteza de frînare ω_f.

Pentru determinarea modelului matematic al dispozitivului format din reductorul planetar RP, toba troliului TT, cablul de foraj CF și mecanismul geamblac-macara-cîrlig GMC, se utilizează ecuația lui Lagrange în coordonate generalizate q_i:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \qquad (43)$$

unde L reprezintă energia sistemului (cinetică și potențială), iar Q_i — rezultanta forțelor generalizate exterioare corespunzătoare coordonatei q_i.

În ipoteza neglijării masei cablului de foraj, a inerției rolelor mecanismului geamblac-macara și a frecărilor care intervin în transmisia mișcării, energia sistemului are următoarea expresie (fig. 4):

$$L = \frac{1}{2} J(\dot{\varphi}_t)^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{s}_c)^2 - \frac{1}{2} k_1 (2m_{sc} - R_t \varphi_t)^2, \qquad (44)$$

unde φ_t reprezintă unghiul de rotație a tobei, s_c — deplasarea la cîrlig, J — momentul de inerție redus la axul tobei al tuturor pieselor aflate în mișcare de rotație, m_1 — masa cîrligului și a macaralei, k_1 — constanta elastică a cablului de foraj, m — numărul de role ale macaralei, iar R_t — raza de înfășurare a cablului pe tobă.

Prin aplicarea relației lui Lagrange, se obțin ecuațiile:

$$J\ddot{\varphi}_t - R_t k_1 (2ms_c - R_t\varphi_t) = -\frac{1}{i_1} M_f, \qquad (45)$$

$$m_1\ddot{s}_c + 2m\, k_1 (2m\, s_c - R_t\, \varphi_t) = W_c + m_1 g, \qquad (46)$$

unde i_1 este raportul de transmisie al reductorului planetar, egal cu raportul dintre viteza de rotație a tobei ω_t și viteza de rotație a arborelui pompei de frînare ω_f.

Ținînd seama că $\dot{\varphi}_t = \omega_t = i_1 \omega_f$ și $\dot{s}_c = v_c$, prin derivare în raport cu timpul, ecuațiile (45) și (46) devin astfel:

$$\frac{1}{i_1} \dot{M}_f = -i_1 J \ddot{\omega}_f - i_1 k_1 R_t^2 \omega_f + 2mk_1 R_t v_c, \tag{47}$$

$$m_1 \ddot{v}_c + 4m^2 k_1 v_c = 2\, mi_1 k_1 R_t\, \omega_f + \dot{W}_c. \tag{48}$$

Pe baza ecuațiilor (42), (47) și (48), în figura 7 s-a reprezentat schema bloc de calcul a modelului matematic atașat dispozitivului de execuție, alcătuit din pompa de frînare cu plungere axiale și reacție negativă (*PPAR*) și subsistemul reductor-tobă-cablu-geamblac-macara-cîrlig (*RTCGMC*).

Din ecuațiile (42), (47) și (48), prin eliminarea mărimilor intermediare M_f și ω_f, rezultă modelul matematic liniarizat al dispozitivului de execuție, sub forma următoarei ecuații diferențiale de ordinul cinci:

$$e_5 \frac{\mathrm{d}^5 v_c}{\mathrm{d}t^5} + e_4 \frac{\mathrm{d}^4 v_c}{\mathrm{d}t^4} + e_3 \frac{\mathrm{d}^3 v_c}{\mathrm{d}t^3} + e_2 \frac{\mathrm{d}^2 v_c}{\mathrm{d}t^2} + e_1 \frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t} + v_c =$$

$$= f_0 \omega_c + f_4 \frac{\mathrm{d}^4 W_c}{\mathrm{d}t^4} + f_3 \frac{\mathrm{d}^3 W_c}{\mathrm{d}t^3} + f_2 \frac{\mathrm{d}^2 W_c}{\mathrm{d}t^2} + f_1 \frac{\mathrm{d}W_c}{\mathrm{d}t}. \tag{49}$$

Din ecuația (49) se constată că mărimea de ieșire a dispozitivului de execuție (viteza la cîrlig v_c) nu este influențată în regim staționar de valoarea sarcinii la cîrlig W_c.

5. CONCLUZII

Sistemele de avans automat al sapei de foraj pot fi realizate în mai multe variante, funcție de modul în care se efectuează mișcarea de rotație a sapei de foraj (cu masă rotativă, cu turbină hidraulică sau cu motor electric submersibil), precum și de mărimea reglată, prin intermediul căreia se realizează regimul adecvat de foraj. În practică însă, datorită dificultăților majore care apar la măsurarea parametrilor de fund (sarcina axială pe sapă, viteza de rotație a sapei sau momentul de rotație la sapă), singura variantă aplicată la scară industrială este aceea care realizează reglarea sarcinii la cîrligul macaralei de foraj. Majoritatea specialiștilor întrevăd posibilitatea realizării într-un viitor apropiat a unui echipament fiabil de măsurare și transmitere la suprafață a valorii parametrilor de fund, fapt ce ar determina un salt calitativ în conducerea automată a procesului de avans al sapei de foraj, mai ales la sondele de mare adîncime.

Simularea numerică sau analog-numerică a sistemului de avans automat al sapei de foraj, în conformitate cu modelul matematic prezentat în lucrare, este dificil de realizat, atît datorită complexității modelului, cît și faptului că dinamica mai multor elemente componente se ca-

racterizează prin prezența unor componente cu caracter oscilant, amortizat sau neamortizat, de frecvențe diferite.

După părerea autorului, analiza și sinteza optimală a sistemului de avans automat al sapei de foraj trebuie să se efectueze pe baza componentei continue a mărimilor de intrare și de ieșire ale elementelor sistemului, ținîndu-se desigur seama, atunci cînd este cazul, de prezența unei componente oscilante suprapuse, întreținute de interacțiunea cu caracter discontinuu, ciclic, dintre dinții sapei și roca de dislocat.

Oricare ar fi varianta de automatizare a avansului sapei de foraj, dispozitivul de execuție trebuie să asigure în regim staționar o proporționalitate bine determinată între viteza de coborîre a garniturii la cîrlig și semnalul de comandă generat de regulator, în condițiile acțiunii puternice a perturbației constituite de greutatea garniturii de foraj. Acest lucru este realizat numai de varianta îmbunătățită a dispozitivului de frînare (propusă în paragraful precedent), realizată prin adăugarea unei reacții negative la dispozitivul de frînare tip pompă volumică rotativă cu plungere axiale.

Primită la redacție la 10 februarie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. V. S. VLADIMIROV, *Ecuațiile fizicii matematice*, Edit. științ. și enciclopedică, București, 1980.
2. C. PENESCU, *Sisteme*, Edit. tehnică, București, 1975.
3. GR. TATU, *Conducerea optimală a sistemului de forare a sondelor de petrol și gaze*, Edit. tehnică, București, 1978.
4. V. CÎRTOAJE, *Modelarea matematică a garniturii de foraj*, St. cerc. mec. apl., **40**, *4* (1981).
5. GH. GEORGESCU, *Tehnologia forării sondelor*, Institutul de petrol și gaze Ploiești, 1978.
6. Z. KERIMOV, M. SADÎHOV, *Issledovanie prodol'nih kolebanij kolonni buril'nih trub pri burenii*, Neft'i gaz, *9* (1971).
7. D. CONSTANTINESCU, N. MEREANU, *Sape de foraj*, Edit. tehnică, București, 1976.
8. FL. IONESCU, D. CATRINA, AL. DORIN, *Acționări hidraulice și pneumatice*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1980.

NOTE

O EXTINDERE A UTILIZĂRII FUNCȚIILOR FUNDAMENTALE*)

de MIRCEA V. SOARE
Institutul de construcții, București

Se dă o extindere a funcțiilor fundamentale, care intervin la studiul vibrațiilor proprii ale grinzilor drepte ținînd seama de masa proprie, pentru cazul tuburilor cilindrice circulare ortotrope și izotrope. Exprimînd săgețile sub forma unei serii trigonometrice, avînd drept coeficienți funcțiile fundamentale, este posibil să fie impusă condiția de capăt liber, care implică derivate parțiale în ambele variabile.

1. INTRODUCERE

Este cunoscută utilizarea funcțiilor fundamentale în problemele unidimensionale de rezistența materialelor. Ele apar ca soluții ale ecuației diferențiale ordinare liniare și omogene

$$\frac{\mathrm{d}^4 X}{\mathrm{d}x^4} - \frac{\alpha^4}{l^4} X = 0, \tag{1}$$

în care l reprezintă deschiderea grinzii, iar α — o valoare proprie ce rezultă dintr-o ecuație caracteristică.

Soluția generală a ecuației (1) se scrie

$$X(x) = C_1 \operatorname{ch}\alpha\frac{x}{l} + C_2 \cos\alpha\frac{x}{l} + C_3 \operatorname{sh}\alpha\frac{x}{l} + C_4 \sin\alpha\frac{x}{l}. \tag{2}$$

Constantele C_1, C_2, C_3, C_4 se determină din impunerea a patru condiții la limită; datorită faptului că aceste condiții sînt omogene, determinantul coeficienților trebuie să fie nul, pentru ca să existe soluții nebanale. Din dezvoltarea acestui determinant rezultă o ecuație în α, denumită ecuație caracteristică; această ecuație fiind transcendentă are o infinitate de rădăcini α_m ($m = 1, 2, 3, \ldots$).

*) Text revăzut al comunicării „Utilizarea funcțiilor fundamentale într-o problemă neliniară de mecanica construcțiilor" ținută în cadrul consfătuirii de mecanica solidelor,. Aplicații ale mecanicii solidelor în industrie și tehnică", Brașov, 7—8 noiembrie 1980.

Soluția ecuației (1) poate fi scrisă atunci ca o dezvoltare în serie de funcții fundamentale

$$X(x) = \sum_m X_m(x) = \sum_m \left(C_{1m} \operatorname{ch} \alpha_m \frac{x}{l} + C_{2m} \cos \alpha_m \frac{x}{l} + C_{3m} \operatorname{sh} \alpha_m \frac{x}{l} + \right.$$
$$\left. + C_{4m} \sin \alpha_m \frac{x}{l} \right) \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3}$$

Funcțiile fundamentale au fost aplicate și în probleme bidimensionale (plăci plane izotrope [4] și ortotrope [7], rețele de grinzi [5], [8], [11], structuri reticulate planare [6] etc.), generalizînd metoda seriilor duble și simple trigonometrice, pentru domenii dreptunghiulare.

Într-o lucrare anterioară [7] am semnalat faptul că utilizarea funcțiilor fundamentale este posibilă și directă în cazul în care laturile implică condiții de rezemare în raport cu o singură variabilă. De exemplu, pentru latura $x = 0$ simplu rezemată, condițiile $w = 0$ și $\partial^2 w/\partial x^2 = 0$ (săgeată și moment încovoietor nule) conduc la condițiile $X = 0$, $X'' = 0$; în mod asemănător, pentru latura $x = 0$ încastrată perfect, condițiile $w = 0$ și $\partial w/\partial x = 0$ (săgeată și rotire nule) conduc la condițiile $X = 0$ și $X' = 0$.

O margine liberă necesită condiții de moment încovoietor și forță tăietoare generalizată nule, unde condițiile la limită implică ambele variabile, x și y, deci o corelație între funcțiile X, Y și derivatele lor succesive, unde în direcția y sînt introduse funcții fundamentale Y avînd valorile proprii $\beta_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

O extindere a aplicării funcțiilor fundamentale la plăci plane izotrope cu două laturi adiacente libere a fost dată de V. Ille, C. Bia, I. Borș [3] prin aplicarea unei metode variaționale.

În cele ce urmează vom prezenta extinderea aplicării funcțiilor fundamentale la tuburi cilindrice circulare ortotrope și izotrope. Întrucît rezemările simple și încastrările perfecte la capete reprezintă o simplă extindere de la cazul plăcilor plane dreptunghiulare, vom considera că tubul cilindric circular ortotrop este încastrat perfect la bază și liber la capătul superior.

2. ALEGEREA FUNCȚIILOR FUNDAMENTALE

Fie cilindrul circular de rază a, lungimea generatoarelor l; un punct din suprafața mediană este precizat prin cota x (măsurată de la bază spre vîrf) și unghiul φ (măsurat față de un plan meridian de referință) (fig. 1).

Săgețile w pot fi reprezentate sub forma

$$w(x, \varphi) = X_0(x) + X_1(x) \cos \varphi + X_2(x) \cos 2\varphi + \ldots \tag{4a}$$

sau sub o formă condensată

$$w(x, \varphi) = \sum_m X_m(x) \cos m\varphi \quad (m = 0, 1, 2, 3, \ldots), \tag{4b}$$

unde, pentru funcțiile succesive $X_m(x)$, se aleg funcțiile fundamentale

$$X_m(x) = C_{1m} \operatorname{ch} \alpha_m \frac{x}{l} + C_{2m} \cos \alpha_m \frac{x}{l} + C_{3m} \operatorname{sh} \alpha_m \frac{x}{l} + C_{4m} \sin \alpha_m \frac{x}{l}, \tag{5}$$

cu C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m} $(m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ constante arbitrare, α_m valori proprii ce urmează a fi determinate.

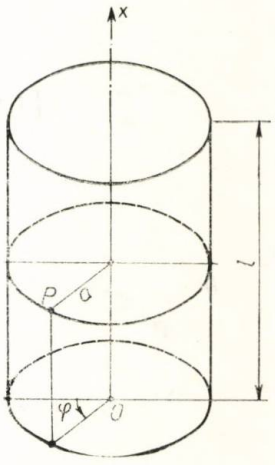


Fig. 1.

Notînd termenul general, de rang m, al seriei (4b)

$$w_m(x, \varphi) = X_m(x) \cos m\varphi, \tag{6}$$

vom putea scrie pentru funcție și primele sale derivate

$$w_m = \left(C_{1m} \operatorname{ch} \alpha_m \frac{x}{l} + C_{2m} \cos \alpha_m \frac{x}{l} + C_{3m} \operatorname{sh} \alpha_m \frac{x}{l} + C_{4m} \sin \alpha_m \frac{x}{l} \right) \cos m\varphi, \tag{7a}$$

$$\frac{\partial w_m}{\partial x} = \frac{\alpha_m}{l} \left(C_{1m} \operatorname{sh} \alpha_m \frac{x}{l} + C_{2m} \sin \alpha_m \frac{x}{l} + C_{3m} \operatorname{ch} \alpha_m \frac{x}{l} + C_{4m} \cos \alpha_m \frac{x}{l} \right) \cos m\varphi, \tag{7b}$$

$$\frac{\partial w_m}{\partial \varphi} = -m \left(C_{1m} \operatorname{ch} \alpha_m \frac{x}{l} + C_{2m} \cos \alpha_m \frac{x}{l} + C_{3m} \operatorname{sh} \alpha_m \frac{x}{l} + C_{4m} \sin \alpha_m \frac{x}{l} \right) \sin m\varphi, \tag{7c}$$

$$\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} = \frac{\alpha_m^2}{l^2} \left(C_{1m} \operatorname{ch} \alpha_m \frac{x}{l} - C_{2m} \cos \alpha_m \frac{x}{l} + C_{3m} \operatorname{sh} \alpha_m \frac{x}{l} - C_{4m} \sin \alpha_m \frac{x}{l} \right) \cos m\varphi, \tag{7d}$$

$$\frac{\partial^2 w_m}{\partial \varphi^2} = -m^2\left(C_{1m}\,\mathrm{ch}\,\alpha_m\frac{x}{l} + C_{2m}\cos\alpha_m\frac{x}{l} + C_{3m}\,\mathrm{sh}\,\alpha_m\frac{x}{l} + \right.$$

$$\left. + C_{4m}\sin\alpha_m\frac{x}{l}\right)\cos m\varphi, \tag{7e}$$

$$\frac{\partial^3 w_m}{\partial x^3} = \frac{\alpha_m^3}{l^3}\left(C_{1m}\,\mathrm{sh}\,\alpha_m\frac{x}{l} + C_{2m}\sin\alpha_m\frac{x}{l} + C_{3m}\,\mathrm{ch}\,\alpha_m\frac{x}{l} - \right.$$

$$\left. - C_{4m}\cos\alpha_m\frac{x}{l}\right)\cos m\varphi, \tag{7f}$$

$$\frac{\partial^3 w_m}{\partial x\,\partial \varphi^2} = -m^2\frac{\alpha_m}{l}\left(C_{1m}\,\mathrm{sh}\,\alpha_m\frac{x}{l} - C_{2m}\sin\alpha_m\frac{x}{l} + C_{3m}\,\mathrm{ch}\,\alpha_m\frac{x}{l} + \right.$$

$$\left. + C_{4m}\cos\alpha_m\frac{x}{l}\right)\cos m\varphi. \tag{7g}$$

Rotirea în lungul generatoarelor este dată de relaţia

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial x} \tag{8a}$$

şi, analog, pentru o placă cilindrică circulară ortotropă, avem :

— momentul încovoietor longitudinal

$$M_x = -K_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{K_{12}}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}, \tag{8b}$$

— forţa tăietoare generalizată longitudinală

$$T_x^* = -K_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{K_{12} + 2K_{33}}{a^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial \varphi^2}. \tag{8c}$$

În relaţiile precedente, K_{11}, K_{12} şi K_{33} reprezintă moduli de rigiditate ortotropă, cu valori constante cunoscute.

Limitîndu-ne la termenul de rang m şi înlocuind derivatele succesive ale lui w prin expresiile (7), din (8) se deduce, după gruparea convenabilă a termenilor,

$$\theta_m = \frac{\alpha_m}{l}\left(C_{1m}\,\mathrm{sh}\,\alpha_m\frac{x}{l} - C_{2m}\sin\alpha_m\frac{x}{l} + C_{3m}\,\mathrm{ch}\,\alpha_m\frac{x}{l} + \right.$$

$$\left. + C_{4m}\cos\alpha_m\frac{x}{l}\right)\cos m\varphi, \tag{9a}$$

$$M_{x,m} = \Big[-K_{11}\frac{\alpha_m^2}{l^2}\Big(C_{1m}\,\mathrm{ch}\;\alpha_m\frac{x}{l} - C_{2m}\cos\alpha_m\frac{x}{l} + C_{3m}\,\mathrm{sh}\;\alpha_m\frac{x}{l} -$$

$$- C_{4m}\sin\alpha_m\frac{x}{l}\Big) + K_{12}\frac{m^2}{a^2}\Big(C_{1m}\,\mathrm{ch}\;\alpha_m\frac{x}{l} + C_{2m}\cos\alpha_m\frac{x}{l} + \tag{9b}$$

$$+ C_{3m}\,\mathrm{sh}\;\alpha_m\frac{x}{l} + C_{4m}\sin\alpha_m\frac{x}{l}\Big)\Big]\cos m\varphi,$$

$$T^*_{x,m} = \Big[-K_{11}\frac{\alpha_m^3}{l^3}\Big(C_{1m}\,\mathrm{sh}\;\alpha_m\frac{x}{l} + C_{2m}\sin\alpha_m\frac{x}{l} + C_{3m}\mathrm{ch}\;\alpha_m\frac{x}{l} -$$

$$- C_{4m}\cos\alpha_m\frac{x}{l}\Big) + (K_{12}+2K_{33})\frac{m^2}{a^2}\frac{\alpha_m}{l}\Big(C_{1m}\,\mathrm{sh}\;\alpha_m\frac{x}{l} - \tag{9c}$$

$$- C_{2m}\sin\alpha_m\frac{x}{l} + C_{3m}\,\mathrm{ch}\;\alpha_m\frac{x}{l} + C_{4m}\cos\alpha_m\frac{x}{l}\Big)\Big]\cos m\varphi.$$

3. DETERMINAREA VALORILOR PROPRII α_m

O dată stabilite expresiile lui w, θ, M_x și T^*_x, putem trece la exprimarea condițiilor la limită necesare determinării familiei de constante C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m}; aceste condiții sînt

— pentru $x = 0 \Rightarrow w_m = 0$,

— pentru $x = 0 \Rightarrow \theta_m = 0$,

— pentru $x = l \Rightarrow M_{x,m} = 0$,

— pentru $x = l \Rightarrow T^*_{x,m} = 0$.

Cele patru condiții se scriu

$$C_{1m} + C_{2m} = 0\,; \quad C_{3m} + C_{4m} = 0\,, \tag{10a}$$

$$-K_{11}\frac{\alpha_m^2}{l^2}(C_{1m}\,\mathrm{ch}\;\alpha_m - C_{2m}\cos\alpha_m + C_{3m}\,\mathrm{sh}\;\alpha_m - C_{4m}\sin\alpha_m) +$$

$$+K_{12}\frac{m^2}{a^2}(C_{1m}\,\mathrm{ch}\;\alpha_m + C_{2m}\cos\alpha_m + C_{3m}\,\mathrm{sh}\;\alpha_m + C_{4m}\sin\alpha_m) = 0, \tag{10b}$$

$$-K_{11}\frac{\alpha_m^3}{l^3}(C_{1m}\,\mathrm{sh}\;\alpha_m + C_{2m}\sin\alpha_m + C_{3m}\,\mathrm{ch}\;\alpha_m - C_{4m}\cos\alpha_m) +$$

$$+(K_{12}+2K_{33})\frac{m^2}{a^2}\frac{\alpha_m}{l}(C_{1m}\,\mathrm{sh}\;\alpha_m - C_{2m}\sin\alpha_m + C_{3m}\,\mathrm{ch}\;\alpha_m + C_{4m}\cos\alpha_m) = 0.$$

Pentru simplificarea scrierii introducem notaţiile

$$\lambda_1 = \frac{K_{12}}{K_{11}} \frac{l^2}{a^2}, \tag{11a}$$

$$\lambda_2 = \frac{K_{12} + 2K_{33}}{K_{11}} \frac{l^2}{a^2}. \tag{11b}$$

Introducînd condiţiile (10a) în (10b) şi ţinînd seama de notaţiile (11), se obţine sistemul

$$\left[\lambda_1 \left(\frac{m}{\alpha_m}\right)^2 (\operatorname{ch} \alpha_m - \cos \alpha_m) - (\operatorname{ch} \alpha_m + \cos \alpha_m)\right] C_{1m} + \tag{12a}$$

$$+ \left[\lambda_1 \left(\frac{m}{\alpha_m}\right)^2 (\operatorname{sh} \alpha_m - \sin \alpha_m) - (\operatorname{sh} \alpha_m + \sin \alpha_m)\right] C_{3m} = 0,$$

$$\left[\lambda_2 \left(\frac{m}{\alpha_m}\right)^2 (\operatorname{sh} \alpha_m + \sin \alpha_m) - (\operatorname{sh} \alpha_m - \sin \alpha_m)\right] C_{1m} + \tag{12b}$$

$$+ \left[\lambda_2 \left(\frac{m}{\alpha_m}\right)^2 (\operatorname{ch} \alpha_m - \cos \alpha_m) - (\operatorname{ch} \alpha_m + \cos \alpha_m)\right] C_{3m} = 0.$$

Din anularea determinantului principal al sistemului (12) rezultă ecuaţia caracteristică

$$m^4 \lambda_1 \lambda_2 (1 - \operatorname{ch} \alpha_m \cos \alpha_m) - m^2 \alpha_m^2 (\lambda_1 - \lambda_2) \operatorname{sh} \alpha_m \sin \alpha_m + \tag{13}$$

$$+ \alpha_m^4 (1 + \operatorname{ch} \alpha_m \cos \alpha_m) = 0.$$

Pentru $m = 0$, ecuaţia (13) se reduce la

$$\operatorname{ch} \alpha \cos \alpha = -1,$$

cunoscută anterior [1], [2], [7], [9], [10].

Se constată că, pentru $m \geqslant 1$, valorile proprii depind de doi parametri λ_1 şi λ_2.

De asemenea, trebuie observat că ecuaţiile (13) au cîte o singură rădăcină reală. Rădăcinile sînt astfel decuplate, pentru fiecare valoare întreagă a lui $m \geqslant 1$, spre deosebire de cazul $m = 0$, cînd ecuaţia caracteristică are o infinitate de rădăcini, caracterizînd diferitele moduri.

În cazul particular al *cilindrului izotrop* avem

$$K_{11} = K; \quad K_{12} = \mu K; \quad K_{33} = (1 - \mu) K,$$

unde

$$K = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$$

reprezintă rigiditatea la încovoiere a plăcii, de grosime constantă δ, iar E și μ sînt constantele elastice ale materialului.

Relațiile (11) se reduc la următoarele:

$$\lambda_1 = \mu\frac{l^2}{a^2}; \quad \lambda_2 = (2-\mu)\frac{l^2}{a^2},$$

ceea ce arată că valorile proprii depind, pentru un material dat, doar de pătratul raportului l/a:

$$\mu(2-\mu)\left(\frac{l}{a}\right)^4 m^4 (1 - \operatorname{ch}\alpha_m \cos\alpha_m) + 2(1-\mu)\left(\frac{l}{a}\right)^2 \alpha_m^2 \operatorname{sh}\alpha_m \sin\alpha_m + \\ + \alpha_m^4 (1 + \operatorname{ch}\alpha_m \cos\alpha_m) = 0. \tag{14}$$

4. PRECIZAREA FUNCȚIILOR $X_m(x)$

Presupunînd cunoscute valorile proprii α_m și ținînd seama de relațiile (10a), expresia (5) pentru funcțiile $X_m(x)$ poate fi scrisă sub forma

$$X_m(x) = C_{1m}\left[\operatorname{ch}\alpha_m\frac{x}{l} - \cos\alpha_m\frac{x}{l} + \frac{C_{3m}}{C_{1m}}\left(\operatorname{sh}\alpha_m\frac{x}{l} - \sin\alpha_m\frac{x}{l}\right)\right]. \tag{15}$$

Raportul $C_{3m}/C_{1m} = \varkappa_m$ poate fi scos din (12a) sau (12b)

$$-\frac{C_{3m}}{C_{1m}} = \varkappa_m = \frac{\lambda_1 m^2 (\operatorname{ch}\alpha_m - \cos\alpha_m) - \alpha_m^2 (\operatorname{ch}\alpha_m + \cos\alpha_m)}{\lambda_1 m^2 (\operatorname{sh}\alpha_m - \sin\alpha_m) - \alpha_m^2 (\operatorname{sh}\alpha_m + \sin\alpha_m)} = \\ = \frac{\lambda_2 m^2 (\operatorname{sh}\alpha_m + \sin\alpha_m) - \alpha_m^2 (\operatorname{sh}\alpha_m - \sin\alpha_m)}{\lambda_2 m^2 (\operatorname{ch}\alpha_m - \cos\alpha_m) - \alpha_m^2 (\operatorname{ch}\alpha_m + \cos\alpha_m)}. \tag{16}$$

În sfîrșit valoarea constantei C_{1m} poate fi aleasă, pentru simplitate

$$C_{1m} = 1.$$

Funcțiile fundamentale corespunzătoare cazului de rezemare considerat se scriu sub forma finală

$$X_m(x) = \operatorname{ch}\alpha_m\frac{x}{l} - \cos\alpha_m\frac{x}{l} - \varkappa_m\left(\operatorname{sh}\alpha_m\frac{x}{l} - \sin\alpha_m\frac{x}{l}\right) \\ (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{17}$$

Aplicație numerică. Să se determine funcțiile $X_1(x)$ și $X_2(x)$ pentru următoarele date numerice: $K_{11} = 1057{,}38\,K$; $K_{12} = 0{,}3\,K$; $K_{33} = 0{,}7\,K$, $l/a = 20$.

Rezultă

$$\lambda_1 = \frac{0{,}3\,K}{1057{,}38\,K} \cdot 20^2 = 0{,}1135\,; \qquad \lambda_2 = \frac{0{,}3K + 2\times 0{,}7\,K}{1057{,}38\,K} \cdot 20^2 = 0{,}6431,$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = 0{,}5296, \qquad \lambda_1\,\lambda_2 = 0{,}072984.$$

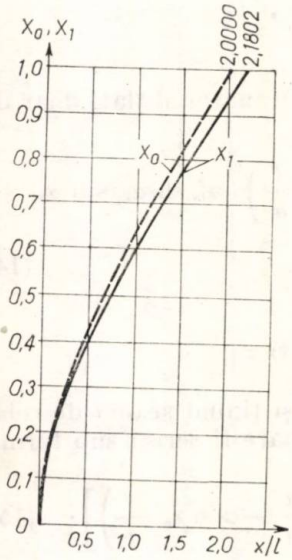


Fig. 2

Ecuația caracteristică (13) devine

— pentru $m = 1$

$$\alpha_1^4(1 + \operatorname{ch}\alpha_1 \cos\alpha_1) + 0{,}5296\,\alpha_1^2 \operatorname{sh}\alpha_1 \sin\alpha_1 + 0{,}072984(1 - \operatorname{ch}\alpha_1 \cos\alpha_1) = 0,$$

— pentru $m = 2$

$$\alpha_2^4(1 + \operatorname{ch}\alpha_2 \cos\alpha_2) + 2{,}1184\,\alpha_2^2 \operatorname{sh}\alpha_2 \sin\alpha_2 + 1{,}167744(1 - \operatorname{ch}\alpha_2 \cos\alpha_2) = 0.$$

Prin încercări se găsesc rădăcinile

$$\alpha_1 = 1{,}976706\,; \qquad \alpha_2 = 2{,}209922,$$

iar din (16) rezultă

$$\varkappa_1 = +\,0{,}722264\,; \quad \varkappa_2 = 0{,}711834.$$

Variația funcției $X_1(x)$ pentru valori $x/l \in (0,1)$ este redată în figura 2; cu linie întreruptă a fost reprezentată variația funcției

$$X_0(x) = \operatorname{ch}\alpha_0\frac{x}{l} - \cos\alpha_0\frac{x}{l} - \varkappa_0\left(\operatorname{sh}\alpha_0\frac{x}{l} - \sin\alpha_0\frac{x}{l}\right),$$

cu $\alpha_0 = 1{,}875104$; $\varkappa_0 = 0{,}734096$, care intervine în cazul monoaxial.

Funcțiile fundamentale precizate în acest studiu constituie o alternativă la soluția directă, în problemele liniare; ele vor fi folosite cu succes deosebit în probleme de ordinul al 2-lea și al 3-lea.

Primită la redacție la 29 octombrie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. A. A. BELEȘ, M. SOARE, *Elliptic and Hyperbolic Paraboloidal Shells Used in Constructions*, Ed. Academiei, București, 1976.
2. R. P. FELGAR Jr., *Formulas for Integrals Containing Characteristic Functions of a Vibrating Beam*, Bureau of Engineering Research, Circular No. 14, The University of Texas, 1950.
3. V. ILLE, C. BIA, I. BORȘ, *Placa plană dreptunghiulară avînd două laturi adiacente încastrate, iar celelalte două libere*, St. cerc. mec. apl., **40**, 4, 553—562 (1981).
4. P. LARDY, *Sur une méthode nouvelle de résolution du problème des dalles rectangulaires encastrées*, Association Internationale des Ponts et Charpentes. Mémoires, **XIII**, Zürich, 1953, p. 197—220.

5. S. A. RAMU, D. T. WRIGHT, *Space frameworks of interconnected Vierendeel girders.* In : Space Structures (edited by R. M. Davies), Blackwell Scientific Publications, Oxford and Edinburgh, 1967, p. 59—70.
6. M. V. SOARE, *Statica și dinamica rețelelor spațiale planar pătrate simple prin aplicarea mediului continuu echivalent.* St. cerc. mec. apl., **31**, *3*, 673—702 (1972).
7. — *O metodă generală de rezolvare a plăcilor ortotrope dreptunghiulare.* St. cerc. mec. apl., **39**, *2*, 203—219 (1980).
8. K. SZMODITS, *Investigation of Rectangular Plates and Gridworks on the Basis of Different Boundary Conditions*, Acta Techn. Acad. Sci. Hungaricae, **48**, *1—2*, 23—28 (1964).
9. W. S. WLASSOW, *Allgemeine Schalentheorie und Ihre Anwendung in der Technik*, Akademie-Verlag, Berlin, 1958.
10. D. H. YOUNG, R. P. FELGAR Jr., *Tables of Characteristic Functions Representing Normal Modes of Vibration of a Beam*, Engineering Research Bulletin No. 4913, Bureau of Engineering Research, The University of Texas, July, 1949.
11. O. ZANABONI, *Reticoli di travi a grande numero di maglie.* Giornale del Genio Civile, *5* (1947).

SEMINARUL REGIONAL AL NAŢIUNILOR UNITE PE PROBLEME DE DEZARMARE

Mamaia (România) 31 august — 3 septembrie 1982

Între 31 august şi 3 septembrie 1982 a avut loc la Mamaia (România), sub egida Naţiunilor Unite, un seminar al organizaţiilor neguvernamentale din ţările regiunii europene, pe probleme de dezarmare.

Simpozionul a fost deschis de Ion Martenson, subsecretar general al Centrului pentru dezarmare, care a arătat între altele că în timp ce prima sesiune specială pentru dezarmare a ONU s-a încheiat cu un document final conţinînd o cuprinzătoare strategie de dezarmare care constituia o bază solidă pentru acţiuni multilaterale viitoare, cea de-a doua sesiune specială, care a avut loc anul acesta în luna iunie, a dezamăgit aşteptările pe care milioane de oameni le puseseră în ea. Cu toate acestea, ONU şi oamenii din lumea întreagă trebuie să persevereze în eforturile lor de a opri cursa înarmărilor, pentru ca omenirea să nu dispară.

În continuare, Ştefan Andrei, ministrul afacerilor externe al României, vorbind despre importanţa deosebită a opririi cursei înarmărilor şi a dezarmării generale şi complete, a arătat că după cea de-a doua sesiune specială pentru dezarmare a ONU este mai necesar şi mai urgent ca oricînd să se sporească eforturile de iniţiere a unor negocieri serioase pentru dezarmare care să conducă la măsuri concrete şi substanţiale în această direcţie, pentru a apăra dreptul fundamental al oamenilor, al naţiunilor la viaţă, la pace, la o existenţă liberă şi demnă.

La şedinţa de deschidere a simpozionului a luat de asemenea cuvîntul Nicu Ceauşescu, secretar al Comitetului Central al Uniunii Tineretului Comunist, preşedintele Comitetului Consultativ al Naţiunilor Unite pentru Anul Internaţional al Tineretului, care a arătat, între altele, că, de multe ori, din nenorocire, soarta tinerei generaţii n-a constituit, cum era natural, obiectul propriei sale decizii, ci că această soartă a fost decisă de alţii în flagrantă contradicţie cu interesele sale fundamentale. Referindu-se în continuare la apelul adresat de tineretul din România, tineretului din întreaga lume a arătat că stă în puterea tinerei generaţii, a tuturor celor care iubesc viaţa şi libertatea, de a apăra dreptul omului de a munci, de a trăi şi crea fără a fi sub ameninţarea armelor, a teroarei monstruoase a războiului.

Principalele probleme care au fost discutate în cele patru zile cît au durat lucrările simpozionului au fost: 1) Rolul Organizației Națiunilor Unite în domeniul dezarmării după cea de-a doua sesiune extraordinară consacrată dezarmării; 2) Programul global de dezarmare; 3) Campania mondială pentru dezarmare; 4) Cercetări asupra dezarmării; 5) Securitatea regională și dezarmarea în Europa.

Pe marginea celor cinci rapoarte prezentate pe această tematică au participat la discuții 31 reprezentanți ai unor organizații neguvernamentale: Fielding din Anglia, P. Galand din Belgia, Y. Vekilov din Bulgaria, D. van Praagh și K. Wallace-Deering din Canada, M. Medek și J. Mrazek din Cehoslovacia, P. Bouvier din Elveția, G. von Bonsdorff din Finlanda, A. Joxe din Franța, G. Zazworka din R. D. Germană, L. Koppe din R. F. Germania, C. Calligas din Grecia, D. Seserinac și M. Vilfan din Iugoslavia, B. Brock-Utne din Norvegia, R. Rego din Portugalia, F. Noguero din Spania, I. Segerstedt-Wiberg din Suedia, V. Duculescu, N. Ignat, N. Udroiu, C. Vlad și R. Voinea din România, H. Gerger din Turcia, B. Kaloșa, L. Leșenko și A. Zinin din U.R.S.S., T. Norvill din U.S.A., A. Csiszer și E. Gömbös din Ungaria.

În cadrul acestor discuții, a fost prezentată o intervenție și din partea Comitetului național român „Oamenii de știință și pacea". După ce s-au arătat împrejurările în care a luat ființă, în 1981, acest comitet, al cărui președinte este Acad. Elena Ceaușescu, președinte al Consiliului Național pentru Știință și Tehnologie, în intervenție s-a menționat prestigiul de care se bucură oamenii de știință în România, ca de altfel oamenii de știință din întreaga lume și s-a apreciat potențialul important pe care aceștia îl reprezintă în lupta pentru pace, pentru dezarmare generală și completă. S-a menționat de asemenea obligația morală a omului de știință de a nu rămîne indiferent la modul cum sînt folosite rezultatele cercetărilor sale, pentru bunăstarea omenirii sau pentru distrugerea ei, de a milita activ pentru salvgardarea omenirii de la un cataclism apocaliptic.

Discuțiile purtate au constituit un foarte util schimb de opinii cu privire la problemele deosebit de complexe ale dezarmării, exprimîndu-se în general speranța că organizațiile neguvernamentale pot contribui la formarea unei opinii publice puternice împotriva cursei înarmărilor, pentru dezarmare, pentru pace.

Acad. RADU P. VOINEA

RECENZII

GOURI DHATT, GILBERT TOUZOT, Une présentation de la méthode des élements finis. Maloine S. A., Editeur, Paris, 1981. 544 pagini, numeroase figuri, tabele și programe.

Științele inginerești (mecanica solidelor și a fluidelor, termotehnica și acustica) permit modelarea matematică a comportării sistemelor fizice prin ecuații cu derivate parțiale. Aceste ecuații se rezolvă astăzi din ce în ce mai mult cu metoda elementelor finite, care este foarte generală putindu-se aplica majorității problemelor indiferent dacă sînt staționare sau nestaționare, liniare sau neliniare, definite pe domenii geometrice simple sau complexe; în plus, se adaptează ușor mediilor eterogene, greu de studiat cu alte metode.

Metoda elementelor finite constă în utilizarea unei aproximări simple a necunoscutelor în vederea transformării ecuațiilor cu derivate parțiale în ecuații algebrice, apelînd la următoarele trei domenii:

— științele inginerești, pentru construirea ecuațiilor cu derivate parțiale (sau a principiilor variaționale corespunzătoare),

— metodele numerice, pentru scrierea și rezolvarea ecuațiilor algebrice,

— programarea și informatica, pentru executarea eficientă a calculelor, metoda elementelor finite nefiind realizabilă fără mijloace de calcul electronic.

Cartea de față este scrisă de un inginer civil și un informatician, avînd 15 ani de experiență în rezolvarea problemelor de mecanica solidelor și a fluidelor. Diferitele concepte ale metodei cit și tehnicile numerice și informatice corespunzătoare sînt prezentate în șase capitole.

Primul capitol (80 pagini) se referă la aproximarea prin elemente finite, expunînd tehnica aproximării nodale, funcțiile de interpolare și erorile de aproximare. În capitolul doi (58 pagini) se prezintă detaliat funcțiile de interpolare pentru diferite tipuri de elemente finite cu una, două și trei dimensiuni. Cîteva paragrafe tratează modificări de elemente, elemente cu număr variabil de noduri, superparametrice și infinite.

După o clasificare în probleme de echilibru, de valori proprii și de propagare, în capitolul trei (45 pagini) se descrie aplicarea metodei reziduurilor ponderate la formularea integrală a problemelor de echilibru, pornind de la ecuațiile cu derivate parțiale. Capitolul patru (77 pagini) cuprinde prezentarea matriceală a metodei elementelor finite pe baza discretizării formulării integrale din capitolul trei și utilizînd aproximările din primele două capitole. Se introduc matricele elementelor finite și se descrie asamblarea lor în matricele sistemului global.

Capitolul cinci (133 pagini) se ocupă de metodele numerice necesare pentru construcția și rezolvarea sistemelor de ecuații formate în capitolul anterior, cuprinzînd: metode de integrare numerică, de rezolvare a sistemelor de ecuații algebrice liniare și neliniare, metode de integrare în timp și de determinare a valorilor și vectorilor proprii. În ultimul capitol (128 pagini) sînt expuse tehnicile informatice caracteristice metodei elementelor finite, asamblîndu-se două programe, unul simplu și celălalt de complexitate medie. Aplicarea programelor se exemplifică prin două probleme rezolvate, una de transfer de căldură, cealaltă de elasticitate plană.

Privite în ansamblu, capitolele 1, 3 și 4 prezintă conceptele fundamentale ale metodei elementelor finite, capitolele 2 și 5 fiind ajutătoare; subprogramele din capitolele 1, 3, 4 și 5 sînt asamblate în capitolul 6.

Prezentarea metodei este foarte clară și sistematică, utilizînd atît tabele și scheme intuitive, cît și algoritmi și subprograme. Conceptele tratate sînt ilustrate prin aplicații simple, la sfîrșitul capitolelor principale fiind rezumate cele mai importante rezultate. Spre deosebire de alte cărți în acest domeniu, realizarea de față canado-franceză pune pregnant în evidență caracterul general al metodei elementelor finite, prezentînd-o independent de domeniul concret de aplicare inginerească. Acest caracter este evidențiat și prin faptul că deducerile se bazează pe ecuațiile diferențiale ale problemei și nu pe principii variaționale.

Cartea se adresează celor ce doresc să înțeleagă metoda cît și celor ce o utilizează direct: studenți, cercetători în științe aplicate, cît și ingineri practicieni ce nu se mulțumesc cu utilizarea programelor existente ca simple „cutii negre". Se consultă cu plăcere și datorită condițiilor grafice excelente în care se prezintă.

R. Friedrich

G. MILOIU, F. DUDIȚĂ, D. V. DIACONESCU, Transmisii mecanice moderne. Editura tehnică, București, 1980.

Lucrarea — a doua ediție a lucrării precedente (din 1971) — este de referință în literatura tehnică românească și pe plan mondial datorită importanței domeniului de sisteme, tratat în contextul cerințelor modernizării construcției de mașini și a particularităților problematicii studiate, dezvoltată atît teoretic, la un înalt nivel științific, cu numeroase aspecte originale, cît și aplicativ, de un real folos în proiectare.

Domeniul de sisteme analizat în lucrare îl constituie grupa de transmisii mecanice moderne, care se disting de cele clasice prin: *performanțele sub aspectul portanței* (angrenajele cilindrice, conice și melcate de înaltă portanță) și *preciziei cinematice* (angrenajele duplex); *scopurile funcționale particulare* pentru care sînt construite (transmisii cu roți de fricțiune pentru turații înalte, transmisii cu roți de fricțiune pentru inversarea rapidă a sensului de rotație); *noutatea tipului de transmisie* (transmisii armonice, variatoare cu roți dințate reductoare suspendate cu roți dințate, reductoare biplanetare cu roți dințate, transmisii cu bandă metalică, variatoare cu curele trapezoidale asimetrice etc.); *soluțiile constructive noi* ale unor variante mai vechi (reductoare planetare cu bolțuri, transmisii cu galeți, transmisii cu lanțuri, variatoare cu curele trapezoidale late simetrice etc.). În contextul utilizării largi a transmisiilor mecanice în cele mai diverse ramuri ale construcției de mașini, domeniul de sisteme tehnice abordat joacă un rol important în *modernizarea industriei constructoare* de mașini. Ca urmare, lucrarea răspunde pe deplin cerințelor care se impun în dezvoltarea construcției de mașini, de realizare a unor produse de înaltă tehnicitate, performanță și competitivitate.

Problematica este axată în special pe dezvoltarea bazelor de calcul și prezentare a soluțiilor constructive celor mai importante. *Bazele de calcul* (de geometrie, cinematică, control, rezistență etc.) cuprind numeroase contribuții originale, atît ale autorilor, cît și ale școlii românești, mai ales în domeniul teoriei angrenării; expunerea acestor elemente de calcul se face — spre deosebire de ediția anterioară — cu indicarea soluționării pe cale numerică și, deci, a utilizării calculatoarelor electronice. *Tipurile constructive de transmisii* prezentate sînt judicios selectate, ținînd seama de tendința de utilizare pe scară largă a variantelor noi indicate în prima ediție și de previziunea autorilor asupra afirmării viitoare a ultimelor noutăți. Problematica depășește în numeroase cazuri acest cadru, cuprinzînd, de exemplu, indicații tehnologice și metodici de proiectare.

Lucrarea este structurată pe 12 capitole.

După considerațiile introductive din *capitolul 1*, în *capitolul 2* sînt analizate transmisiile cu roți de fricțiune cu utilizări speciale și variatoarele cu roți de fricțiune.

Următoarele două capitole — noi față de ediția întîi — dezvoltă aspecte noi privind teoria și practica angrenajelor cilindrice, conice și melcate de înaltă portanță; se fac particularizări originale la angrenajele cilindrice antepostpolare (Novikov) și polare, conice cu dinți curbe și melcate (cavex, duplex, globoidale).

Capitolul 5, referitor la transmisiile cu roți dințate, prezintă noțiunile de bază privind structura, cinematica și dinamica transmisiilor planetare cu roți dințate, variantele constructive ale unor asemenea transmisii și aspectele noi privind transmisiile cu roți dințate cu axe fixe (reductoare, motoreductoare, variatoare).

În *capitolul 6* se prezintă noțiuni privind geometria angrenajelor cicloidale, tipurile de angrenaje cicloidale cu bolțuri și aspecte referitoare la reductoarele planetare cu astfel de angrenaje.

Transmisiile (reductoare și diferențiale) cu galeți reprezintă obiectul *capitolului 7*.

În *următorul capitol* asupra transmisiilor armonice — o clasă de sisteme care prezintă un interes sporit — se face un amplu studiu, care constă din bazele de calcul (geometric, cinematic, de rezistență, randamentul), aspectele constructive privind transmisiile armonice dințate și variatoarele armonice.

Următoarele două capitole tratează aspecte referitoare la transmisiile cu curele cu capacitate de tracțiune înaltă, variatoarele cu curele, transmisiile și variatoarele cu lanțuri.

Capitolul 11 prezintă bazele teoretice și exemple de variante industriale de variatoare cu impulsuri cu mare răspîndire în industrie.

În *ultimul capitol*, despre transmisiile planetare cu variatoare, se analizează dinamica mecanismelor planetare complexe și se studiază mecanismele planetare cu mobilități de reglare.

Materialul este redactat pe cuprinsul a 550 pagini și este însoțit de 494 de figuri și de 60 de tabele. *Bibliografia*, prezentată la fiecare capitol, este bogată și diversificată, cuprinzînd în afara cercetărilor autorilor: articole, cărți, brevete, documentația firmelor specializate.

Stilul de redactare este unitar, deși colectivul cuprinde trei autori. *Expunerea* este concisă și la obiect și, de asemenea, riguros sistematizată.

Pe de altă parte, este de relevat *înaltul nivel științific al bazelor teoretice* și *caracterul aplicativ* al conținutului.

Ca urmare, lucrarea *este deosebit de utilă unui cerc larg de cititori*, de exemplu personalului didactic și studenților din învățămîntul superior, specialiștilor din institutele de cercetări și de proiectări, cadrelor tehnice din întreprinderile constructoare de mașini etc.

Dan Pavelescu

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 42, nr. 2 martie—aprilie 1983

SUMAR

STUDII

CORNELIU CRĂCIUN, DOREL HOMENTCOVSCHI, Soluţii ale problemei la limită cu racordări pentru viteze în curgerea stratificată prin conducta circulară. II 91

HORIA I. ENE, ELENA UNGUREANU-DAVID, Asupra mişcării cu suprafaţa liberă într-un mediu poros 104

IULIAN POPESCU, Legi de mişcare realizabile de mecanismul manivelă-piston. . . 109

FLORIN GROSU, Element finit dreptunghiular de placă plană structural ortotropă 121

MIRCEA V. SOARE, D. IORDACHE, Aplicarea metodei parametrilor iniţiali la calculul plăcilor plane dreptunghiulare. 130

G. ONU, Includerea efectului forţelor tăietoare în matricele elementului de placă rectangulară 143

B. R. IRIMESCU, Stabilirea pragului de nepropagare a fisurilor de oboseală . . . 160

ADELINA GEORGESCU, Stabilitatea şi ramificarea în contextul sinergeticei . . . 174

GH. BUZDUGAN şi colab., Vibratorul mecanic VMME—250 kN 181

DECEBAL VLĂDĂIANU, MARIA GIUŞCĂ, Cîteva observaţii asupra funcţionării unor pompe de apă de răcire de tip MV—1002 (radial-axiale) 192

OAMENII DE ŞTIINŢĂ ŞI PACEA

Reglementarea paşnică a diferendelor internaţionale (RADU P. VOINEA) 203

RECENZII 205

MECANICA APLICATA
DE
STUDII ŞI CERCETĂRI

SOLUȚII ALE PROBLEMEI LA LIMITĂ CU RACORDĂRI PENTRU VITEZE ÎN CURGEREA STRATIFICATĂ PRIN CONDUCTA CIRCULARĂ. II *)

de CORNELIU CRĂCIUN și DOREL HOMENTCOVSCHI

Institutul politehnic București

În prima parte a articolului s-a prezentat problema fizică, s-a formulat problema matematică și ipotezele suplimentare în care se încearcă rezolvarea. S-a dezvoltat o metodă de determinare a vitezei pe linia de separare, metodă ilustrată cu aplicații numerice, și s-au interpretat critic rezultatele. În partea a doua se propune o altă metodă de determinare a vitezei pe linia de separare. Pornind de la forma soluției găsite prin cele două metode, se rezolvă problema distribuției de viteze în întreg domeniul curgerii.

B. DETERMINAREA FUNCȚIEI CORECȚIE PE LINIA DE SEPARARE PRIN METODA INTERPOLĂRII

X. O METODĂ DE INTERPOLARE PENTRU DETERMINAREA FUNCȚIEI CORECȚIE PE LINIA DE SEPARARE

Funcția corecție pe linia de separare a lichidelor trebuie determinată în perspectiva unui dublu scop : 1° Calculul funcțiilor corecție în domeniile D_j $(j = 1,2)$ și în baza relației (10) a vitezelor din curgerea stratificată și 2° Calculul debitelor cu formulele (21) și (22).

Metoda propusă de Bentroich [5] permite calculul exact al valorilor corecției vitezei în diferite puncte dar nu se pretează la calculul debitelor. Prin „metoda δ mic" se obține funcția corecție pe linia de separare sub forma (83) și pornind de la ea se pot calcula debitele. Dar pe de o parte coeficienții polinominali se obțin destul de greoi, iar pe de altă parte valorile corecției au abateri față de cele reale peste tot, inclusiv în zona centrală, zonă cu contribuția cea mai importantă în integrala debitului. Deoarece la extremități funcția corecție descrește, ca și contribuția sa în integrala debitului, ar fi de dorit ca aproximarea să fie cît mai bună în zona centrală a segmentului de separare. Pentru considerentele expuse s-a căutat o nouă metodă de determinare a funcției corecție. „Metoda interpolării" pe care o propunem utilizează o parte din rezultatele metodelor anterioare dar este mai directă și înlătură dezavantajele semnalate.

*) Partea I în st. cer. mec. apl., nr. 6, 1982, p. 635

Să considerăm domeniul D_2 ocupat de fluidul de viscozitate μ_2 în secţiunea normală a conductei. Funcţia

$$Z = \frac{\left(\dfrac{\sin\alpha + i\cos\alpha + \zeta}{\sin\alpha - i\cos\alpha - \zeta}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}} - 1}{\left(\dfrac{\sin\alpha + i\cos\alpha + \zeta}{\sin\alpha - i\cos\alpha - \zeta}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}} + 1} \tag{88}$$

reprezintă conform domeniul D_2 din planul complex $\zeta = x + i\,y$ pe semiplanul superior $Y > 0$ din planul complex $Z = X + i\,Y$ (fig. 6).

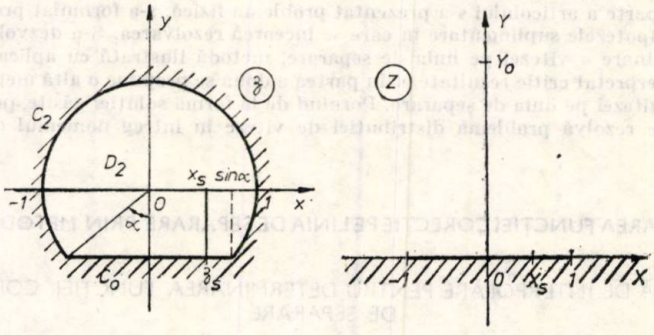


Fig. 6

Funcţia de transformare inversă este

$$\zeta = \frac{\left(\dfrac{1+Z}{1-Z}\right)^{\frac{\pi-\alpha}{\pi}} - 1}{\left(\dfrac{1+Z}{1-Z}\right)^{\frac{\pi-\alpha}{\pi}} + 1} \sin\alpha - i\cos\alpha. \tag{89}$$

Corespondenţa între punctele liniei de separare a lichidelor C_0 şi punctele segmentului $[-1, 1]$ al axei OX este dată de (86) sau de inversa ei

$$x = \frac{\left(\dfrac{1+X}{1-X}\right)^{\frac{\pi-\alpha}{\pi}} - 1}{\left(\dfrac{1+X}{1-X}\right)^{\frac{\pi-\alpha}{\pi}} + 1} \sin\alpha, \quad |X| \leqslant 1. \tag{90}$$

Conform celor demonstrate în „metoda δ mic", funcţia corecţie pe segmentul $[-1,1]$ are forma

$$\mathcal{V}_2(X) = \sqrt{1 - X^2} \cdot P_{2(J-1)}(X), \tag{91}$$

unde $P_{2(J-1)}(X)$ este un polinom par de grad $2(J-1)$ avînd J coeficienţi $B_{2(j-1)}$ $(j = 1, 2 \ldots J)$:

$$P_{2(J-1)}(X) = \sum_{j=1}^{J} B_{2(j-1)} X^{2(j-1)}. \tag{92}$$

Spre deosebire de „metoda δ mic" vom determina coeficienţii polinomiali $B_{2(j-1)}$ folosind valorile funcţiei $\mathcal{V}_2(X)$ în J puncte distincte X_s $(s = 1, 2 \ldots J)$. Aceste valori pot fi calculate cu ajutorul formulei stabilite în metoda integralelor Fourier [2], formulă scrisă de noi sub forma

$$V_2(x) = (m-1)\sin^2\alpha \int_0^\infty \frac{u}{\operatorname{sh}\pi u} \frac{\operatorname{th}(\pi - \alpha)u}{m \operatorname{th} \alpha u + \operatorname{th}(\pi - \alpha)u} \times$$

$$\times \cos\left(u \ln \frac{\sin \alpha - x}{\sin \alpha + x} \right) du \tag{93}$$

sau în baza corespondenţei (90),

$$\mathcal{V}_2(X) = (m-1)\sin^2\alpha \cdot \int_0^\infty \frac{u}{\operatorname{sh}\pi u} \frac{\operatorname{th}(\pi - \alpha)u}{m \operatorname{th} \alpha u + \operatorname{th}(\pi - \alpha)u} \times$$

$$\times \cos\left(u \frac{\pi - \alpha}{\pi} \ln \frac{1 - X}{1 + X} \right) du. \tag{94}$$

Metodologia de calcul. Se alege un număr J de puncte X_s în intervalul $[0, 1)$ aşa încît $X_1 = 0$. Se calculează valorile $\mathcal{V}_2(X_s)$ din (94) pe calculator şi apoi valorile polinomului în aceste puncte:

$$P^{(s)} = P_{2(J-1)}(X_s) = \frac{\mathcal{V}_2(X_s)}{\sqrt{1 - X_s^2}} \qquad (s = 1, 2 \ldots J).$$

Din condiţiile ca polinomul (92) să treacă prin fiecare din cele J puncte $(X_s, P^{(s)})$ rezultă un sistem liniar care determină cei J coeficienţi $B_{2(j-1)}$ deci corecţia vitezei de forma (91). Algoritmul poate fi programat pentru calculator. Mărimea erorii în aproximarea corecţiei $\mathcal{V}_2(X)$ prin produsul dintre radical şi polinom depinde de gradul polinomului şi de alegerea punctelor X_s în intervalul $[0,1)$.

Pentru scurtarea drumului spre rezultat și economie în utilizarea calculatorului, s-au folosit ca puncte de interpolare nodurile din diviziunea în opt intervale egale a liniei de separare C_0, scrise la (87). Pentru un δ ales, punctele X_s corespunzătoare nodurilor au abscisele din tabelul 2, iar valorile $\mathcal{V}_2(X_s)$ deja calculate în lucrarea [2] se găsesc notate V_2^B în tabelul 3. Prezentăm mai jos rezultatele pentru un caz test: $m = 20$, $\delta = 0{,}2$.

S-a considerat $J = 2$ și folosind punctele X_1 și X_3 s-a determinat corecția vitezei,

$$\mathcal{V}_2(X) = \sqrt{1 - X^2}[0{,}207323 + 0{,}018964\, X^2].$$

Din această expresie s-au calculat valorile aproximative în punctele X_2 și X_4 ca și abaterile lor față de valorile exacte. Rezultatele au fost înscrise în tabelul 4, linia a doua și a treia.

În același caz, $J = 2$, folosind pentru interpolare punctele X_1 și X_4, corecția vitezei a rezultat

$$\mathcal{V}_2(X) = \sqrt{1 - X^2}\,[0{,}207323 + 0{,}020899\, X^2].$$

Valorile aproximative calculate din această formulă în punctele X_2 și X_3 ca și abaterile lor față de valorile exacte se găsesc în tabelul 4, linia a patra și a cincea.

Gradul de aproximare depinde de alegerea punctelor în care se impune condiția ca abaterea să fie nulă, dar în ambele cazuri rezultatele sînt foarte bune.

În cazul $J = 3$ s-au folosit pentru interpolare punctele X_1 X_2 și X_3. A rezultat

$$\mathcal{V}_2(X) = \sqrt{1 - X^2}\,[0{,}207323 + 0{,}016928\, X^2 + 0{,}005684\, X^4]. \quad (95)$$

Abaterea în punctul X_4 este extrem de mică (tabelul 4 linia a șasea și a șaptea), ceea ce face inutilă încercarea unui polinom de grad superior.

Tabelul 4

Valori ale corecției vitezei calculate cu metoda interpolării și abaterile lor procentuale în puncte de control [$m = 20$, $\delta = 0{,}2$]

	X	$X_1 = 0$	$X_2 = 0{,}31060$	$X_3 = 0{,}59850$	$X_4 = 0{,}84071$	$X_5 = 1$
$J=2$	$\mathcal{V}_2(X)$	0,207323	0,198808	0,171533	0,119524	0
	$\Delta\mathcal{V}_2(X)\%$	0	0,06	0	−0,61	0
$J=2$	$\mathcal{V}_2(X)$	0,207323	0,198985	0,172088	0,120264	0
	$\Delta\mathcal{V}_2(X)\%$	0	0,16	0,32	0	0
$J=3$	$\mathcal{V}_2(X)$	0,207323	0,198672	0,171533	0,120282	0
	$\Delta\mathcal{V}_2(X)\%$	0	0	0	0,015	0

Exemplul prezentat vine să confirme viabilitatea metodei. Corecția vitezei pe linia de separare se poate aproxima repede, relativ simplu și cu abatere foarte mică printr-o funcție de forma (91). În mijlocul liniei de separare ca și într-un alt număr de puncte, abaterea față de valoarea exactă este nulă, așa cum ne-am propus.

C. DETERMINAREA FUNCȚIEI CORECȚIE ÎN ÎNTREG DOMENIUL FLUID

X. FORMULAREA PROBLEMEI LA LIMITĂ PENTRU SEMIPLAN

Să admitem că, prin una din metodele propuse, am reușit să determinăm pe segmentul $[-1, 1]$ al axei OX funcția corecție $\mathcal{V}_2(X)$ de forma (91). Cum punctele acestui segment se află în corespondența (86) cu punctele liniei C_0 de separare a lichidelor, cunoaștem funcția corecție $V_2(x)$ pe linia de separare:

$$V_2(x) = \mathcal{V}_2[X(x)]. \tag{96}$$

Ne propunem să determinăm corecția $V_2(x, y)$ în întreg domeniul D_2 ca funcție armonică în domeniu, cu condițiile la limită

$$V_2(x, y)|_{C_2} = 0, \quad V_2(x, y)|_{C_0} = V_2(x). \tag{97}$$

Dacă se consideră și conjugata armonică $V_2^*(x, y)$ a funcției $V_2(x, y)$ problema revine la a determina funcția $\Phi_2(\zeta)$ definită la (20), olomorfă în D_2, a cărei parte reală ia valorile (97) pe frontieră.

Vom recurge la aceeași reprezentare conformă a domeniului D_2 din planul complex $\zeta = x + iy$ pe semiplanul superior din planul complex $Z = X + iY$ realizată de funcția (88) cu inversa ei (89).

Remarcăm că centrul cercului $\zeta_0 = 0$ corespunde în semiplan punctului Z_0 de coordonate

$$X_0 = 0, \qquad Y_0 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\,\frac{\pi - 2\alpha}{\pi - \alpha}, \tag{98}$$

așa încît pentru valori ale parametrului de stratificare $\delta < 0{,}5\left(\alpha < \frac{\pi}{3}\right)$ avem $Y_0 > 1$ (figura 6).

Prin reprezentarea conformă funcția olomorfă $\Phi_2(\zeta)$ se transformă într-o funcție $\mathcal{F}_2(Z)$ olomorfă în semiplanul superior $Y > 0$, astfel încît

$$\Phi_2(\zeta) = \Phi_2[\zeta(Z)] = \mathcal{F}_2(Z).$$

Avem

$$\mathcal{F}_2(Z) = \mathcal{V}_2(X, Y) + i\mathcal{V}_2^*(X, Y). \tag{99}$$

Condițiile la limită (97) devin condiții la limită pentru funcția $\mathcal{V}_2(X, Y)$, armonică în semiplanul superior

$$\mathcal{V}_2(X, Y)\Big|_{\substack{Y=0 \\ |X|\geqslant 1}} = 0, \qquad \mathcal{V}_2(X, Y)\Big|_{\substack{Y=0 \\ |X|<1}} = \mathcal{V}_2(X). \tag{100}$$

Dar funcția $\mathcal{V}_2(X)$ pe segmentul $[-1, 1]$ este cunoscută și are forma (91). Pentru problema lui Dirichlet cu condiții de forma (91) vom putea scrie explicit soluția în baza unor rezultate ale lui C. Iacob [11].

XI. TEOREMA LUI C. IACOB PRIVIND REZOLVAREA DIRECTĂ A PROBLEMEI LUI DIRICHLET PENTRU SEMIPLAN

În planul de variabila complexă $Z = X + i\,Y$ se consideră semiplanul Ω definit de $Y > 0$, a cărui frontieră este axa reală OX. Fie A și B punctele de abscisă a, respectiv b, ale axei reale. Se notează I_1, intervalul (a, b) și I_2 ceea ce rămîne din frontiera OX dacă se extrage segmentul $\bar{I}_1 = [a, b]$.

Problema lui Dirichlet care se rezolvă direct este următoarea: să se determine funcția $\mathcal{F}(Z) = \mathcal{V}(X, Y) + i\mathcal{V}^*(X, Y)$, olomorfă în Ω, cu datele

$$\mathcal{V}(X)\,|_{I_2} = 0, \qquad \mathcal{V}(X)\,|_{I_1} = \frac{g(X)}{\sqrt{(X-a)(b-X)}}, \tag{101}$$

unde $g(X)$ este o funcție rațională fără singularități pe $[a, b]$. Ea poate avea singularități polare în punctele lui I_2, inclusiv $Z = \infty$. Fie E mulțimea polilor lui $g(X)$ situați pe I_2.

Soluția $\mathcal{F}(Z)$ a problemei cu datele (101), olomorfă în Ω, cu partea reală continuă pe $\Omega + I_1 + I_2$, afară poate de punctele $X = a$ și $X = b$ ale axei reale unde rămîne totuși integrabilă, este dată de

$$\mathcal{F}(Z) = L(Z) - [\mathcal{M}(Z) - \overline{\mathcal{M}(\bar{Z})}] - \frac{1}{2}[\mathcal{M}_0(Z) - \overline{\mathcal{M}_0(Z)}] + ik. \tag{102}$$

În această formulă

$$L(Z) = \frac{i\,g(Z)}{\sqrt{(Z-a)\,(Z-b)}}. \tag{103}$$

Radicalul, luat cu determinația pozitivă pentru $Z = X > b$, se urmărește prin continuitate în planul complex prevăzut cu tăietura AB pe axa OX.

$\mathcal{M}(Z)$ este partea principală a lui $L(Z)$ relativă la acei poli, provenind din $g(Z)$, care se găsesc în Ω; $\mathcal{M}_0(Z)$ este partea principală a lui $L(Z)$ relativă la polii aflați pe OX, care aparțin mulțimii E; k este o constantă reală arbitrară.

În particular, dacă

$$g(X) = X^n \tag{104}$$

cu n număr natural $(n > 1)$, atunci

$$L_n(Z) = \frac{\mathrm{i}\, Z^n}{\sqrt{(Z-a)(Z-b)}}. \tag{105}$$

Funcţia admite punctul $Z = \infty$ ca pol de ordinul $n-1$. La mari distanţe avem

$$L_n(Z) = \mathrm{i}\, Z^{n-1}\left\{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{Z^j}\right\},$$

cu

$$c_1 = \frac{1}{2}(a+b),$$

$$c_j = \frac{1}{2j}\left\{\frac{1.3 \ldots (2j-1)}{j!}(a^j + b^j) + \right.$$

$$\left. \sum_{t=1}^{j-1} \frac{[1.3\ldots(2t-1)][1.3\ldots(2j-2t-1)]}{t!(j-t)!}\, a^t\, b^{j-t} \right\} \tag{106}$$

$$j = 2,3 \ldots .$$

Rezultă expresia lui $\mathcal{M}_{0n}(Z)$ de forma

$$\mathcal{M}_{0n} = \mathrm{i}[Z^{n-1} + c_1 Z^{n-2} + \ldots + c_{n-1}]. \tag{107}$$

Coeficienţii c_j fiind reali, avem

$$\overline{\mathcal{M}_{0n}(\bar{Z})} = -\mathcal{M}_{0n}(Z).$$

Funcţia (104) nu are poli în Ω, deci

$$\mathcal{M}_n(Z) = 0.$$

Formula (102) se reduce la

$$\mathcal{F}_n(Z) = L_n(Z) - \mathcal{M}_{0n}(Z), \tag{108}$$

în care $L_n(Z)$ şi $\mathcal{M}_{on}(Z)$ au expresiile (105), respectiv (107).

XII. APLICAREA TEOREMEI ŞI OBŢINEREA FUNCŢIEI CORECŢIE ÎN SEMIPLAN

Vom aplica rezultatele de mai sus la rezolvarea problemei lui Dirichlet cu condiţiile (100).

Intervalul I_1 este segmentul $(-1, 1)$, deci

$$a = -1, \qquad b = 1. \tag{109}$$

Dacă în (100) ţinem seama de distribuţia (91) condiţiile la limită se scriu

$$\mathcal{V}_2(X)|_{|X|>1} = 0, \qquad \mathcal{V}_2(X)|_{|X|<1} = \sqrt{1 - X^2}P_{2(J-1)}(X). \tag{110}$$

Condiţia pe intervalul $(-1, 1)$ poate fi adusă la forma (101) din teoremă prin înmulţire şi împărţire cu $\sqrt{1 - X^2}$,

$$\mathcal{V}_2(X) = \frac{(1 - X^2)P_{2(J-1)}(X)}{\sqrt{1 - X^2}}. \tag{111}$$

Să notăm $\mathcal{P}_{2J}(X)$ polinomul de grad $2J$ de la numărător

$$(1 - X^2)P_{2(J-1)}(X) = \mathcal{P}_{2J}(X). \tag{112}$$

Dacă ţinem seama de (92), avem

$$\mathcal{P}_{2J}(X) = B_0 + (B_2 - B_0)X^2 + (B_4 - B_2)X^4 + (B_6 - B_4)X_6 +$$

$$+ \ldots + (B_{2(J-1)} - B_{2(J-2)})X^{2(J-1)} - B_{2(J-1)}X^{2J}. \tag{113}$$

Cei $J + 1$ coeficienţi se exprimă în funcţie de coeficienţii polinomului iniţial.

Condiţiile la limită se scriu în definitiv

$$\mathcal{V}_2(X)\,|_{|X|>1} = 0, \qquad \mathcal{V}_2(X)\,|_{|X|<1} = \frac{\mathcal{P}_{2J}(X)}{\sqrt{1 - X^2}}. \tag{114}$$

Ne situăm astfel în condiţiile teoremei.

Vom pune corespunzător lui (103):

$$L(Z) = \frac{i\mathcal{P}_{2J}(Z)}{\sqrt{Z^2 - 1}}, \tag{115}$$

care însă poate fi modificată. Să amplificăm fracţia cu radicalul de la numitor

$$L(Z) = i\sqrt{Z^2 - 1}\,\frac{\mathcal{P}_{2J}(Z)}{Z^2 - 1}.$$

În baza egalităţii (112) avem

$$L(Z) = -\mathrm{i}\sqrt{Z^2-1}\,P_{2(J-1)}(Z)$$

sau (116)

$$L(Z) = \sqrt{1-Z^2}\;P_{2(J-1)}(Z).$$

Radicalul se ia cu determinaţia pozitivă pe latura superioară a tăieturii $[-1, 1]$ de pe axa OX şi se urmăreşte prin continuitate.

Sub forma (116), $L(Z)$ este tocmai funcţia de aproximare a corecţiei vitezei (110) pe linia de separare, în care s-a înlocuit X cu Z.

Funcţia $g(X)$ este în cazul de faţă polinomul $P_{2J}(X)$. Acesta nu are singularităţi în Ω, deci

$$\mathcal{M}(Z) = 0. \tag{117}$$

Rămîne să calculăm $\mathcal{M}_0(Z)$ corespunzător lui $L(Z)$ din (115), care se descompune într-o sumă de funcţii de tipul

$$L_{2s}(Z) = \frac{\mathrm{i}\,Z^{2s}}{\sqrt{Z^2-1}}, \qquad s = 1, 2 \ldots J. \tag{118}$$

Vom scrie partea principală $\mathcal{M}_{0,2s}(Z)$ relativă la polul $Z = \infty$ pentru fiecare putere pară a lui Z pînă la $2J$ după formula (107) cu coeficienţii (106). Deoarece capetele intervalului sînt (109), coeficienţii de rang impar sînt nuli. Coeficienţii de rang par sînt diferiţi de zero.
Iată valorile primilor coeficienţi:

$$c_1 = 0; \qquad c_2 = \frac{1}{2}; \qquad c_3 = 0; \qquad c_4 = \frac{3}{8};$$

$$c_5 = 0; \qquad c_6 = \frac{5}{16}; \qquad c_7 = 0. \tag{119}$$

În (107) vor interveni numai puteri impare ale lui Z:

$$\begin{aligned}
s &= 1, & \mathcal{M}_{0,2} &= \mathrm{i}\,Z,\\
s &= 2, & \mathcal{M}_{0,4} &= \mathrm{i}(Z^3 + c_2 Z),\\
s &= 3, & \mathcal{M}_{0,6} &= \mathrm{i}(Z^5 + c_2 Z^3 + c_4 Z),\\
s &= 4, & \mathcal{M}_{0,8} &= \mathrm{i}(Z^7 + c_2 Z^5 + c_4 Z^3 + c_6 Z),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
s &= J, & \mathcal{M}_{0,2J} &= \mathrm{i}(Z^{2J-1} + c_2 Z^{2J-3} + c_4 Z^{2J-5} + \ldots + c_{2J-2} Z).
\end{aligned} \tag{120}$$

Înmulțim fiecare egalitate cu coeficientul lui X^{2s} din polinomul (113) și însumăm. Obținem $\mathcal{M}_0(Z)$ sub forma unui produs între i și un polinom de grad $2J-1$ care conține numai puteri impare ale lui Z:

$$\mathcal{M}_0(Z) = \mathrm{i} \sum_{j=1}^{J} b^*_{2j-1} Z^{2j-1}. \tag{121}$$

Coeficienții b^*_{2j-1} se exprimă în funcție de coeficienții $B_{2(j-1)}$ și c_j. Deoarece ei sînt reali, avem

$$\overline{\mathcal{M}_0(\bar{Z})} = -\mathcal{M}_0(Z). \tag{122}$$

Dacă ținem seama de (116), (117), (122) și (121) în formula (102) obținem

$$\mathcal{F}_2(Z) = \sqrt{1-Z^2}P_{2(J-1)}(Z) + \mathrm{i}\, P^*_{2J-1}(Z) + \mathrm{i}\, k. \tag{123}$$

S-a notat

$$P^*_{2J-1}(Z) = \sum_{j=1}^{J} B^*_{2j-1} Z^{2j-1}, \tag{124}$$

unde

$$B^*_{2j-1} = -b^*_{2j-1}. \tag{125}$$

Prin separarea părții reale și imaginare din $\mathcal{F}_2(Z)$, obținem

$$\mathcal{V}_2(X, Y) = \mathrm{Re}\{\mathcal{F}_2(Z)\},$$

$$\mathcal{V}^*_2(X, Y) = \mathrm{Im}\,\{\mathcal{F}_2(Z)\}. \tag{126}$$

În mod deosebit interesează cele două funcții pe segmentul $[-1,1]$ al axei reale. Vom face deci în (123) $Y = 0$, ceea ce revine la a înlocui pe Z cu X și vom separa partea reală și cea imaginară în conformitate cu (126):

$$\mathcal{V}_2(X) = \sqrt{1-X^2}\, P_{2(J-1)}(X), \tag{127}$$

$$\mathcal{V}^*_1(X) = P^*_{2J-1}(X) + k. \tag{128}$$

Ultima formulă reprezintă o justificare pentru notația cu asterisc atît a polinomului de la (124), cît și a coeficienților săi reali.

Pentru a concretiza am ales cazul $J = 4$, cînd polinomul de aproximare $P_{2(J-1)}(X)$ din (110) este de gradul 6 și deci $P_{2J}(X)$ de gradul 8. Coeficienții $B_{2(j-1)}$ pentru $j > 4$ trebuie considerați nuli.

În conformitate cu (116) avem

$$L(Z) = \sqrt{1-Z^2}[B_0 + B_2Z^2 + B_4Z^4 + B_6Z^6]. \tag{129}$$

Pentru a calcula $\mathcal{M}_0(Z)$ înmulțim prima egalitate (120) cu $B_2 - B_0$, a doua cu $B_4 - B_2$, a treia cu $B_6 - B_4$, a patra cu $-B_6$, însumăm și ordonăm după puterile lui Z:

$$\mathcal{M}_0(Z) = \mathrm{i}\left\{\left(-B_0 + \frac{1}{2}B_2 + \frac{1}{8}B_4 + \frac{1}{16}B_6\right)Z + \right.$$

$$\left. + \left(-B_2 + \frac{1}{2}B_4 + \frac{1}{8}B_6\right)Z^3 + \left(-B_4 + \frac{1}{2}B_6\right)Z^5 - B_6 Z^7\right\}. \quad (130)$$

Soluția problemei la limită pentru $J=4$ se scrie cu (129) și (130):

$$\mathcal{F}_2(Z) = \sqrt{1-Z^2}[B_0 + B_2 Z^2 + B_4 Z^4 + B_6 Z^6] + \mathrm{i}\{B_1^* Z + B_3^* Z^3 + B_5^* Z^5 + B_7^* Z^7\} + \mathrm{i}k. \quad (131)$$

Între croșete se află polinomul $P_6(Z)$, iar între acolade polinomul $P_7^*(Z)$ ai cărui coeficienți B_{2j-1}^* sînt parantezele rotunde din (130) cu semn schimbat, adică

$$B_1^* = B_0 - \frac{1}{2}B_2 - \frac{1}{8}B_4 - \frac{1}{16}B_6,$$

$$B_3^* = B_2 - \frac{1}{2}B_4 - \frac{1}{8}B_6,$$

$$B_5^* = B_4 - \frac{1}{2}B_6, \quad (132)$$

$$B_7^* = B_6.$$

Pe segmentul $[-1, 1]$ avem:

$$\mathcal{V}_2(X) = \sqrt{1-X^2}[B_0 + B_2 X^2 + B_4 X^4 + B_6 X^6], \quad (133)$$

$$\mathcal{V}_2^*(X) = B_1^* X + B_3^* X^3 + B_5^* X^5 + B_7^* X^7 + k. \quad (134)$$

Funcția $\mathcal{V}_2^*$ conține constanta k nedeterminată. Deoarece contribuția constantei în integrala pentru calculul debitului este nulă, se poate adopta valoarea $k = 0$.

Cunoscînd coeficienții B_{2j} ai funcției corecție pe linia de separare, coeficienți determinați prin una din metodele prezentate anterior, am reușit să stabilim formula funcției corecție a vitezei în tot domeniul exprimată numai cu acești coeficienți, deoarece B_{2j-1}^* sînt dați de (132),

$$\mathcal{V}_2(X, Y) = \mathrm{Re}\{\sqrt{1-Z^2}[B_0 + B_2 Z^2 + B_4 Z^4 + B_6 Z^6] +$$

$$+ \mathrm{i}\{B_1^* Z + B_3^* Z^3 + B_5^* Z^5 + B_7^* Z^7\}). \quad (135)$$

În baza reprezentării conforme se cunoaşte acum funcţia $V_2(x, y)$, deci din (10) viteza de curgere $v_2(x, y)$ în orice punct din D_2.

Funcţiile $\mathcal{V}_2(X)$ şi $\mathcal{V}_2^*(X)$ pe linia de separare se exprimă cu ajutorul coeficienţilor B_{2j} relativ simplu şi într-o formă care permite calculul debitului.

XIII. CORECŢIA VITEZEI PE DIAMETRUL VERTICAL ŞI ÎN CENTRUL CONDUCTEI

Pe diametrul vertical $x = 0$, $-\cos\alpha \leqslant y \leqslant 1$, corecţia vitezei se obţine din (135) cu $Z = 0 + \mathrm{i}\,Y$,

$$\mathcal{V}_2(0, Y) = \sqrt{1 - Y^2}\,[B_0 - B_2Y^2 + B_4Y^4 - B_6Y^6] - B_1^*Y + \\ + B_3^*Y^3 - B_5^*Y^5 + B_7^*Y^7. \qquad (135')$$

Pentru $Y = 0$ se regăseşte valoarea corecţiei în centrul liniei de separare

$$\mathcal{V}_2(0, 0) = B_0.$$

Se verifică de asemenea că la intersecţia diametrului vertical cu frontiera C_2, în punctul $x = 0$, $y = 1$, care corespunde la $Y \to \infty$, avem

$$\lim_{Y\to\infty} \mathcal{V}_2(0, Y) = 0.$$

Valoarea corecţiei în centrul conductei se obţine înlocuind în (135') pe Y cu valoarea Y_0 din (98).

Observaţie. Funcţia corecţie pe linia de separare a fost determinată cu aproximare prin „metoda δ mic" sau metoda interpolării. Abaterea ei faţă de valorile reale poate fi în diferite puncte pozitivă, negativă sau nulă, mai mică sau mai mare, aşa cum s-a văzut în paragrafele respective. Aceasta atrage abateri faţă de valorile reale în toate punctele domeniului. Abaterea în centrul conductei poate constitui un indicator global al gradului de aproximare.

Pentru ilustrare să reluăm cazul test $m = 20$ $\delta = 0{,}2$ de la paragraful IX. La coeficienţii B_0, B_2 şi B_4 din formula (95) adăugăm $B_6 = 0$, din (132) calculăm coeficienţii B_{2j-1}^* şi din (98) valoarea Y_0:

$B_0 = 0{,}207323$, $B_1^* = 0{,}198148$, $Y_0 = 2{,}335005$,

$B_2 = 0{,}016928$, $B_3^* = 0{,}014086$,

$B_4 = 0{,}005684$, $B_5^* = 0{,}005684$,

$B_6 = 0$, $B_7^* = 0$,

Înlocuim în (135′) și obținem pentru funcția corecție în centrul conductei

$$V_2(0,\ 0) = \mathcal{V}_2(0,\ Y_0) = 0{,}043495.$$

Valoarea dată de calculator prin metoda integralelor Fourier, considerată ca exactă, se găsește în tabelul 5 din lucrarea [2]:

$$V_2^B(0,\ 0) = 0{,}043415.$$

Abaterea este de 0,184%

Rezultatele numerice ne îndreptățesc să afirmăm că funcția corecție obținută prin metoda interpolării reprezintă cu foarte bună aproximare funcția corecție a vitezei în întreg domeniul.

Într-o lucrare viitoare vom folosi soluțiile obținute pentru viteze la calculul efectiv al debitelor și vom evalua creșterea debitului transportat, ca urmare a injecției, în funcție de parametrii curgerii.

Primită la redacție la 25 aprilie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. CORNELIU CRĂCIUN, *Creșterea capacității de transport a conductei dreptunghiulare prin injecția unui al doilea fluid de viscozitate mai mică*, St. cerc. mec. apl., **35**, *1*, 27—50 (1976).
2. C. CRĂCIUN, D. HOMENTCOVSCHI, V. MASGRAS, *Studiu comparativ al vitezelor și debitelor din conducta pătrată și circulară pentru mișcarea stratificată*, St. cerc. mec. apl., **35**, *4*, 485—496 (1976).
3. CORNELIU CRĂCIUN, *Relații între viteze și debite pentru mișcarea stratificată în conducte geometric asemenea*, St. cerc. mec. apl., **36**, *1*, 9—17 (1977).
4. CR. STĂNESCU, L. DUMITRESCU, *Mișcarea unidimensională a două fluide vîscoase grele separate printr-o suprafață plană*, St. cerc. mec. apl., **7**, *4*, 891—900 (1956).
5. MICHAEL BENTWICH, *Two-Phase Viscous Axial Flow in a Pipe*, Journal of Basic Engineering Transaction of A.S.M.E., 669 —672, december (1964).
6. CORNELIU CRĂCIUN, *Contribuții la studiul mișcării fluidelor viscoase. Mișcări fluide stratificate și cu suprafață liberă*, Teză de doctorat, Institutul politehnic București (1970).
7. CORNELIU CRĂCIUN, DOREL HOMENTCOVSCHI, *Formule de debit pentru curgerea stratificată a lichidelor viscoase în conducta circulară*, St. cerc. mat., **28**, *4*, 395—409 (1976).
8. CORNELIU CRĂCIUN, *Creșterea debitului în mișcarea Poiseuille plană prin injecția unui alt fluid viscos*, St. cerc. mec. apl., **32**, *6*, 1191—1208 (1973).
9. J. K. KNOWLES, *The Dirichlet Problem for a thin rectangle*. Proc. of Edinburgh Math. Soc., **15**, 315—320 (1967).
10. CAIUS IACOB, *Introducere matematică în mecanica fluidelor*, Editura Academiei, 1952.
11. CAIUS IACOB, *Sur la resolution explicite du problème plan de Dirichlet pour certains canoniques*. Bull. math. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. de Roumainie, **10** (**58**) *1—2*, 13—26 (1966).

ASUPRA MIŞCĂRII CU SUPRAFAŢA LIBERĂ ÎNTR-UN MEDIU POROS

de HORIA I. ENE şi ELENA UNGUREANU-DAVID

INCREST, Secţia de matematică, Bucureşti
Institutul de matematică, Bucureşti

În prezenta lucrare se deduce ecuaţia pentru mişcarea cu suprafaţă liberă într-un mediu poros situat pe un plan impermeabil înclinat cu un unghi α faţă de orizontală, în ipoteza că acest unghi este mic. În final se sugerează o metodă de construire a soluţiei ecuaţiei neliniare obţinută, soluţie sub formă de serie asimptotică.

1. FORMULAREA PROBLEMEI

Mişcarea cu suprafaţă liberă într-un mediu poros care se află deasupra unui plan orizontal impermeabil este descrisă, în anumite ipoteze simplificatoare, de ecuaţia lui Boussinesq [1].

Presupunînd că mediul poros este omogen, $k = \text{const.}$ şi $m = \text{const.}$ [1], [2], vom considera mişcarea cu suprafaţă liberă într-un plan vertical. Axa Ox este luată după direcţia orizontală, iar Oy după verticala ascendentă, ea constituind în acelaşi timp frontiera de contact cu un bazin de alimentare. În acelaşi timp vom considera şi un sistem de axe XOY astfel încît axa OX să fie dirijată după direcţia planului impermeabil, originea O fiind comună în cele două sisteme de coordonate. Unghiul α de înclinare al patului impermeabil este măsurat faţă de axa Ox şi este pozitiv cînd acesta se află sub orizontală, deci cînd OX este rotită faţă de Ox în sens invers trigonometric.

Legătura între cele două sisteme de coordonate este dată de:

$$\begin{aligned} x &= X\cos\alpha + Y\sin\alpha, \\ y &= -X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

Notînd cu u şi v componentele vitezei de filtraţie $\vec{v}$ după axele Ox, respectiv Oy, şi cu U, V componentele aceleiaşi viteze după axele OX şi OY, legătura între ele este

$$\begin{aligned} u &= U\cos\alpha + V\sin\alpha, \\ v &= -u\sin\alpha + V\cos\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

Mişcarea în mediul poros este guvernată de legea lui Darcy [1], [2],

$$\vec{v} = \operatorname{grad}\varphi; \qquad \varphi = -k\left(\frac{p}{\rho g} + y\right), \tag{3}$$

ρ fiind densitatea fluidului, iar g acceleraţia gravitaţională. Componentele vitezei de filtraţie faţă de cele două sisteme de axe se scriu

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial\varphi}{\partial u} = -\frac{k}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial u}; & U &= \frac{\partial\varphi}{\partial X} = -\frac{k}{\rho g}\left(\frac{\partial p}{\partial X} - \rho g\sin\alpha\right), \\ v &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{k}{\rho g}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g\right), & V &= \frac{\partial\varphi}{\partial Y} = -\frac{k}{\rho g}\left(\frac{\partial p}{\partial Y} + \rho g\cos\alpha\right). \end{aligned} \tag{4}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 2 1983, P. 104–108

Ecuația suprafeței libere se poate scrie

$$y = h(x, t) \quad \text{sau} \quad Y = H(X, t) \tag{5}$$

după cum ea este raportată la sistemul xOy sau XOY, legătura între aceste funcții fiind scoasă din (1)

$$h = \frac{H - x \sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{sau} \quad H = \frac{h + X \sin \alpha}{\cos \alpha}, \tag{6}$$

Pe suprafața liberă presiunea este constantă, iar componenta după normală a vitezei este nulă. Aceste condiții se scriu

$$\varphi + hy = \text{const.}, \quad \psi = \text{const.}, \tag{7}$$

unde ψ este funcția de curent.

Problema care se pune este de a găsi ecuația suprafeței libere în domeniul $0 \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$, cu condițiile inițială și la limită

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= h_0(x), \\ h(0, t) &= h_1(t), \\ h(l, t) &= h_2(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Se pot distinge mai multe cazuri, de exemplu $h_1 < h_0$ sau $h_1 > h_0$, deci nivelul în bazinul de alimentare scade sau crește față de cel inițial. De asemenea putem avea $h_2 = h_0 = \text{const.}$, la dreapta lui $x = l$ fiind un bazin în care nivelul rămîne același cu cel inițial. Se poate considera și cazul $h_0 = 0$, iar mediul poros nelimitat la dreapta.

2. ECUAȚIA SUPRAFEȚEI LIBERE

Vom deduce o ecuație de tip Boussinesq, făcînd aceleași ipoteze [1]: suprafața liberă variază puțin față de un plan orizontal și componenta orizontală a vitezei nu depinde de cota punctului respectiv. Am presupus că unghiul α este mic și deci vom admite că nici u nu depinde de Y.

Ecuația (5) a suprafeței libere față de sistemul XOY se derivează total în raport cu timpul

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial X} \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{9}$$

Se știe că viteza de filtrație se poate scrie

$$U = m \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}, \quad V = m \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}.$$

Ecuaţia de continuitate $\partial U/\partial X + \partial U/\partial Y = 0$, integrată în raport cu Y, conduce la

$$V = -\frac{\partial U}{\partial X} Y - V_0,$$

unde V_0 este o constantă de integrare.

Din legea lui Darcy (3), datorită condiţiei (7) pe frontiera liberă şi avînd în vedere (1), obţinem

$$U = \frac{\partial \varphi}{\partial X} = -k\left[\cos\alpha \frac{\partial H}{\partial X} - \sin\alpha\right].$$

Înlocuind toate acestea în (9), rezultă

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{k}{m}\frac{\partial}{\partial X}\left[H\left(\cos\alpha \frac{\partial H}{\partial X} - \sin\alpha\right)\right] = 0. \tag{10}$$

Această ecuaţie o generalizează pe cea a lui Boussinesq.
Pentru $\alpha = 0$ se obţine chiar ecuaţia lui Boussinesq. Ecuaţia (10) este neliniară.

Unghiul α fiind mic, condiţiile la limită (8) se pot scrie aproximativ, cu ajutorul lui (6)

$$H(X, 0) = \frac{h_0 + X\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$H(0, t) = \frac{h_1}{\cos\alpha}, \tag{11}$$

$$H(L, t) = \frac{h_2 + L\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Problema la limită este de a rezolva ecuaţia (10) cu condiţiile (11).

3. O METODĂ DE REZOLVARE

Se trece la mărimile adimensionale

$$\frac{X}{L} = Z, \quad \frac{t}{t_0} = T, \quad \frac{H\cos\alpha}{L} = G, \tag{12}$$

unde L şi t_0 sînt o lungime caracteristică şi un timp caracteristic.

Ecuaţia (10) se transformă pentru funcţia necunoscută $G(Z, T)$

$$\frac{\partial G}{\partial T} - \frac{kt_0}{mL}\frac{\partial}{\partial Z}\left[G\left(\frac{\partial G}{\partial Z} - \sin\alpha\right)\right] = 0, \tag{13}$$

cu condiţiile

$$G(Z, 0) = \frac{h_0}{L} + Z\sin\alpha,$$

$$G(0, T) = \frac{h_1}{L}, \tag{14}$$

$$G(1, T) = \frac{h_2}{L} + \sin\alpha.$$

Unghiul α fiind mic, putem considera $\varepsilon = \sin\alpha$ ca un parametru mic. Atunci, pentru funcţia necunoscută $G(Z, T)$ se ia o dezvoltare asimptotică de forma:

$$G(Z, T) = G_0(Z, T) + \varepsilon G_1(Z, T) + \varepsilon^2 G_2(Z, T) + \ldots \tag{15}$$

Prin înlocuire în (13) şi identificarea termenilor avînd aceeaşi putere în ε, obţinem şirul de ecuaţii

$$\frac{\partial G_0}{\partial T} - \frac{kt_0}{mL}\frac{\partial}{\partial Z}\left(G_0\frac{\partial G_0}{\partial Z}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial T} - \frac{kt_0}{mL}\frac{\partial}{\partial Z}\left[\frac{\partial}{\partial Z}(G_0G_1) - G_0\right] = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial T} - \frac{kt_0}{mL}\frac{\partial}{\partial Z}\left[\frac{\partial}{\partial Z}(G_0G_2) + G_1\frac{\partial G_1}{\partial Z} - G_1\right] = 0,$$

. . . . . .

Condiţiile la limită devin:

$$G_0(Z, 0) = \frac{h_0}{L}, \quad G_0(0, T) = \frac{h_1}{L}, \quad G_0(1, T) = \frac{h_2}{L},$$

$$G_1(Z, 0) = Z, \quad G_1(0, T) = 0, \quad G_1(1, T) = 1, \tag{17}$$

$$G_2(Z, 0) = 0, \quad G_2(0, T) = 0, \quad G_2(1, T) = 0.$$

Pentru G_0 s-a obținut chiar ecuația lui Boussinesq. În literatura de specialitate se găsesc multe metode de rezolvare a acestei ecuații pentru diferite condiții la limită și inițiale. De aceea aici nu ne mai ocupăm de ea.

Vom căuta acum o soluție pentru $G_1(Z, T)$ sub forma

$$G_1(Z, T) = Z + G^*(Z, T). \tag{18}$$

Pentru $G^*(Z, T)$ se obține din (16) ecuația

$$\frac{\partial G^*}{\partial T} - \frac{kt_0}{mL}\frac{\partial}{\partial Z}\left[\frac{\partial}{\partial Z}(G_0 G^*) + Z\frac{\partial G_0}{\partial Z}\right] = 0, \tag{19}$$

cu condițiile la limită și inițială

$$G^*(Z, 0) = 0, \quad G^*(0, T) = 0, \quad G^*(1, T) = 0. \tag{20}$$

Funcția G^* satisface o ecuație liniară cu derivate parțiale. Soluția însă depinde de G_0, cunoscută deja din rezolvarea problemei de ordin zero. Dacă presupunem că primul termen din (19), care conține derivata în raport cu timpul, poate fi neglijat în raport cu ceilalți termeni, atunci prin integrare de două ori în raport cu Z și ținînd cont de (20), se găsește în final pentru G_1 soluția

$$G_1 = \frac{1}{G_0}\left[\int_0^Z G_0 \mathrm{d}Z - Z\int_0^1 G_0 \mathrm{d}Z + Z\frac{h_2}{L}\right], \tag{21}$$

Ecuația pentru $G_2(Z, T)$ din (16) se poate și ea rezolva în mod analog, dacă se neglijează primul termen și se găsește

$$G_2 = \frac{1}{G_0}\left[\int_0^Z G_1\left(1 - \frac{\partial G_1}{\partial Z}\right)\mathrm{d}Z - Z\int_0^1 G_1\left(1 - \frac{\partial G_1}{\partial Z}\right)\mathrm{d}Z\right]. \tag{22}$$

După obținerea acestor soluții, se revine la funcția $h(x, t)$ prin transformările (6) și (12).

Primită la redacție la 24 iulie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. ȘT. I. GHEORGHIȚĂ, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*, Edit. Academiei R. S. România, 1966.
2. HORIA I. ENE, SORIN GOGONEA, *Probleme în teoria filtrației*, Edit. Academiei R. S. România, 1973.

LEGI DE MIȘCARE REALIZABILE DE MECANISMUL MANIVELĂ-PISTON

de IULIAN POPESCU

Universitatea din Craiova

Se studiază legile de mișcare realizabile de mecanismele manivelă-piston uzuale. Se corelează aceste legi cu diagramele cinematice, în scopul simplificării sintezei acestor mecanisme.

1. INTRODUCERE

Sînt cunoscute o serie de metode de sinteză a mecanismului manivelă-piston, pentru realizarea unor traiectorii impuse, a unor poziții asociate, sau a unor rapoarte între vitezele medii din cursele de sensuri opuse.

Toate aceste metode oferă doar o mică parte din posibilitățile acestui mecanism, restricțiile fiind date de numărul de ecuații ce se pot scrie, respectiv de numărul de necunoscute ce definesc mecanismul.

La proiectare este însă adeseori necesar să se cunoască legea completă de mișcare realizabilă de asemenea mecanisme, urmînd a se alege cel mai convenabil mecanism pentru condițiile impuse.

2. MIȘCAREA MECANISMULUI MANIVELĂ-PISTON

Metoda utilizată în continuare fiind o metodă iterativă de calcul, impune alegerea convenabilă a sistemului de axe. Astfel, pentru mecanismul din figura *1* se adoptă originea axelor în $A(x_0 = 0;\ y_0 = 0$, iar direc-

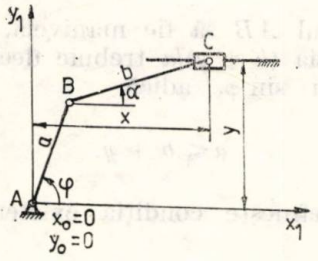


Fig. 1

ția axei x se alege paralelă cu ghidajul culisei C.

Pe baza figurii *1* se scriu relațiile:

$$\begin{aligned} a\cos\varphi + b\cos\alpha &= x, \\ a\sin\varphi + b\sin\alpha &= y, \end{aligned} \tag{1}$$

iar după eliminarea unghiului α rezultă

$$(x - a\cos\varphi)^2 + (y - a\sin\varphi)^2 - b^2 = 0. \tag{2}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 2, 1983, P. 109–120

În ecuația (2), x și φ sînt variabile, iar a, b, y sînt constante.
Din (2) se obține:

$$x = a\cos\varphi \pm \sqrt{a^2\cos^2\varphi - y^2 + b^2 - a^2 + 2ay\sin\varphi}. \tag{3}$$

Relația (3) permite să se calculeze poziția culisei C (abscisa x), în funcție de coordonata generalizată φ, adică de poziția elementului conducător, deci se pot determina pozițiile asociate.

Mișcarea mecanismului este limitată de considerente geometrice. Astfel, din (3) rezultă că se poate determina x dacă

$$a^2\cos^2\varphi - y^2 + b^2 - a^2 + 2ay\sin\varphi \geqslant 0, \tag{4}$$

adică

$$b^2 - (a\sin\varphi - y) \geqslant 0,$$

respectiv

$$b \geqslant a\sin\varphi - y. \tag{5}$$

Inegalitatea (5) definește condițiile în care există $x(\varphi)$.
Din (5) se poate scrie:

$$\frac{b+y}{a} \geqslant \sin\varphi.$$

Pentru ca elementul AB să fie manivelă, deci $\sin\varphi$ să ia valori între -1 și $+1$; expresia $(b+y)/a$ trebuie deci să fie mai mare decît valoarea maximă a lui $\sin\varphi$, adică

$$a \leqslant b + y. \tag{6}$$

Inegalitatea (5) definește condiția existenței manivelei la acest mecanism.

3. LEGI DE MIȘCARE

În scopul găsirii a cît mai multe din legile de mișcare ale mecanismului manivelă-piston, s-au calculat seturi de valori pentru x, din relația (3), pentru valori ale lui a, b, y, φ iterate în domenii uzuale. S-au găsit astfel, după 2584 iterații, un număr de 122 mecanisme, ale căror dimensiuni sînt date în tabelul *1*. Legile $x(\varphi)$ realizabile de aceste mecanisme sînt reprezentate grafic în figurile *2—13*, codificate conform codurilor din tabelul *1*.

Din analiza acestor legi, rezultă următoarele:
— unele curbe au doar valori pozitive pentru x;
— unele curbe au valori doar pentru $0 < \varphi < 180$, iar altele doar

Tabelul 1

Dimensiunile mecanismelor

Cod	*a*	*b*	*y*	Cod	*a*	*b*	*y*	Cod	*a*	*b*	*y*
1	15	15	−15	2	15	15	0	3	15	15	15
4	15	30	−30	5	15	30	−15	6	15	30	0
7	15	30	15	8	15	30	30	9	15	45	−45
10	15	45	−30	11	15	45	−15	12	15	45	0
13	15	45	15	14	14	45	30	15	15	45	45
16	15	60	−60	17	15	60	−45	18	15	60	−30
19	15	60	−15	20	15	60	0	21	15	60	15
22	15	60	30	23	15	60	45	24	15	60	60
25	30	15	−30	26	30	15	−15	27	30	15	0
28	30	15	15	29	30	15	30	30	30	30	−45
31	30	30	−30	32	30	30	−15	33	30	30	0
34	30	30	15	35	30	30	30	36	30	30	45
37	30	45	−60	38	30	45	−45	39	30	45	−30
40	30	45	−15	41	30	45	0	42	30	45	15
43	30	45	30	44	30	45	45	45	30	45	60
46	30	60	−60	47	30	60	−45	48	30	60	−30
49	30	60	−15	50	30	60	0	51	30	60	15
52	30	60	30	53	30	60	45	54	30	60	60
55	45	15	−45	56	45	15	−30	57	45	15	−15
58	45	15	15	59	45	15	30	60	45	15	45
61	45	30	−60	62	45	30	−45	63	45	30	−30
64	45	30	−15	65	45	30	0	66	45	30	15
67	45	30	30	68	45	30	45	69	45	30	60
70	45	45	−60	71	45	45	−45	72	45	45	−30
73	45	45	−15	74	45	45	0	75	45	45	15
76	45	45	30	77	45	45	45	78	45	45	60
79	45	60	−60	80	45	60	−45	81	45	60	−30
82	45	60	−15	83	45	60	0	84	45	60	15
85	45	60	30	86	45	60	45	87	45	60	60
88	60	15	−60	89	60	15	−45	90	60	15	−30
91	60	15	−15	92	60	15	15	93	60	15	30
94	60	15	45	95	60	15	60	96	60	30	−60
97	60	30	−45	98	60	30	−30	99	60	30	−15
100	60	30	0	101	60	30	15	102	60	30	30
103	60	30	45	104	60	30	60	105	60	45	−60
106	60	45	−45	107	60	45	−30	108	60	45	−15
109	60	45	0	110	60	45	15	111	60	45	30
112	60	45	45	113	60	45	60	114	60	60	−60
115	60	60	−45	116	60	60	−30	117	60	60	−15
118	60	60	0	119	60	60	15	120	60	60	30
121	60	60	45	122	60	60	60	—	—	—	—

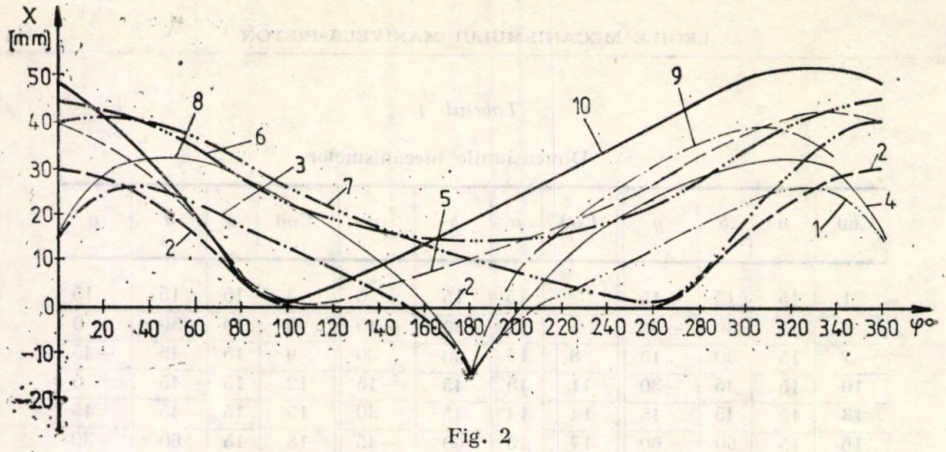


Fig. 2

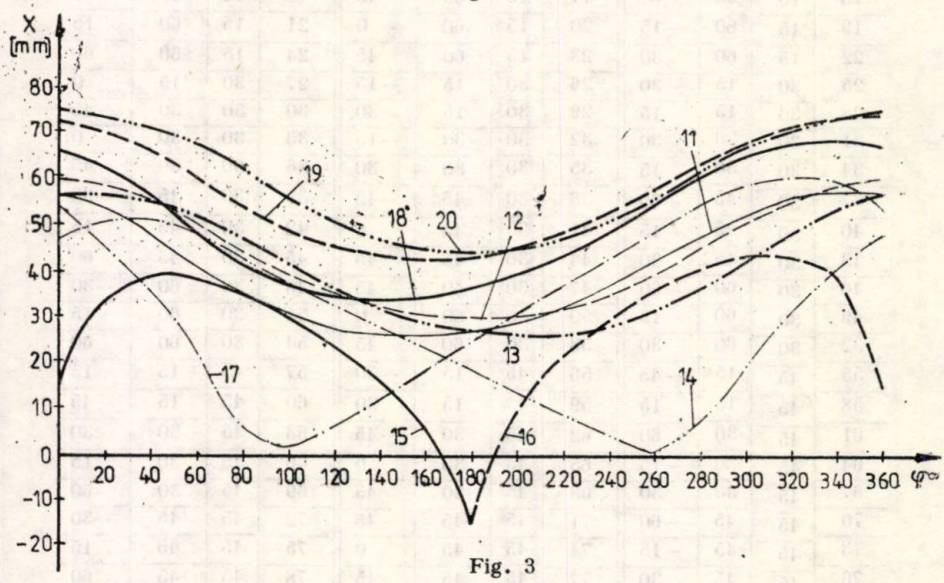


Fig. 3

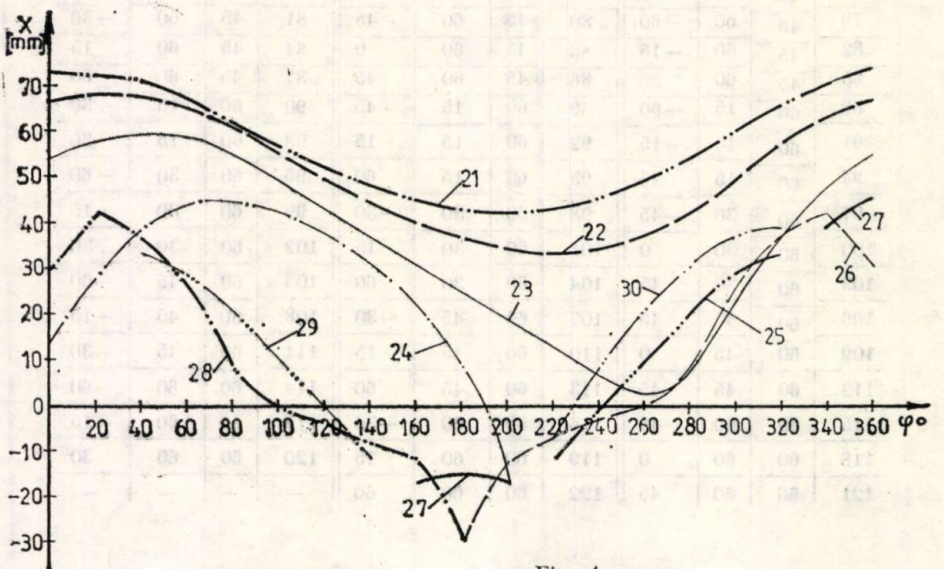


Fig. 4

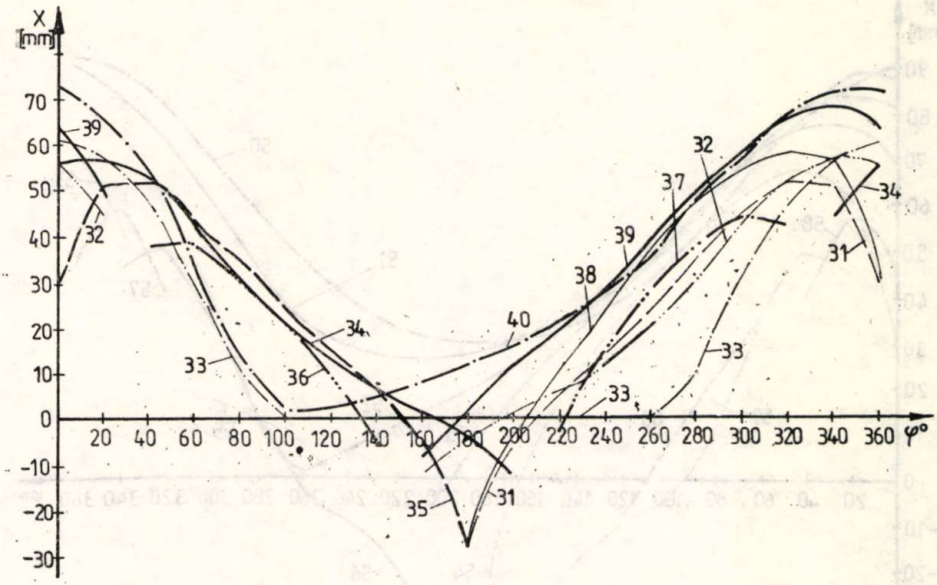

X
[mm]
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 240 260 280 300 320 340 360 φ°
39
32
34
33
36
40
38
37
39
32
34
31
33
33
35
31

Fig. 5

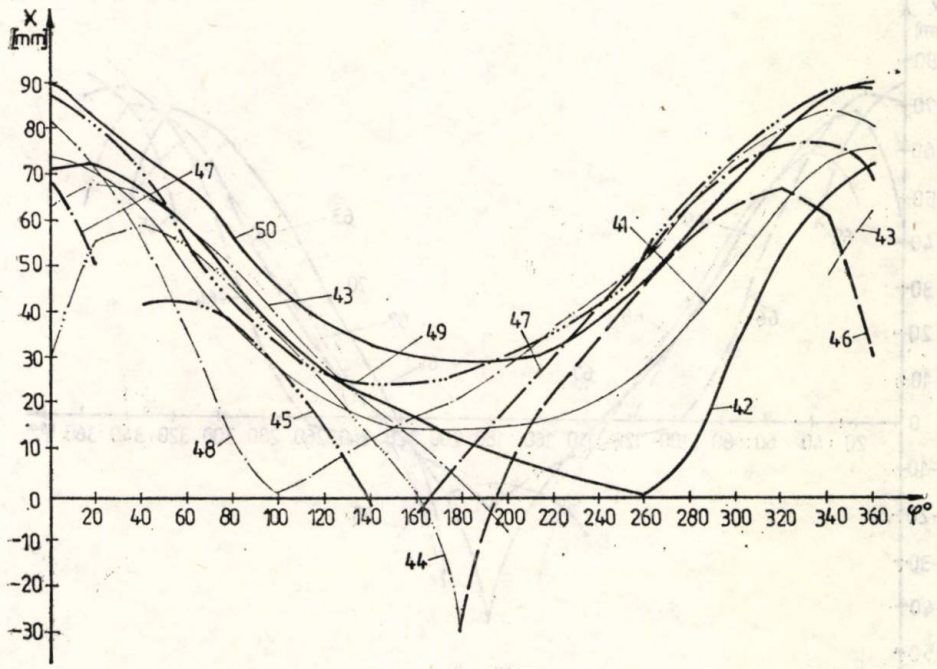

X
[mm]
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 240 260 280 300 320 340 360 φ°
47
50
43
49
47
41
43
46
45
48
42
44

Fig. 6

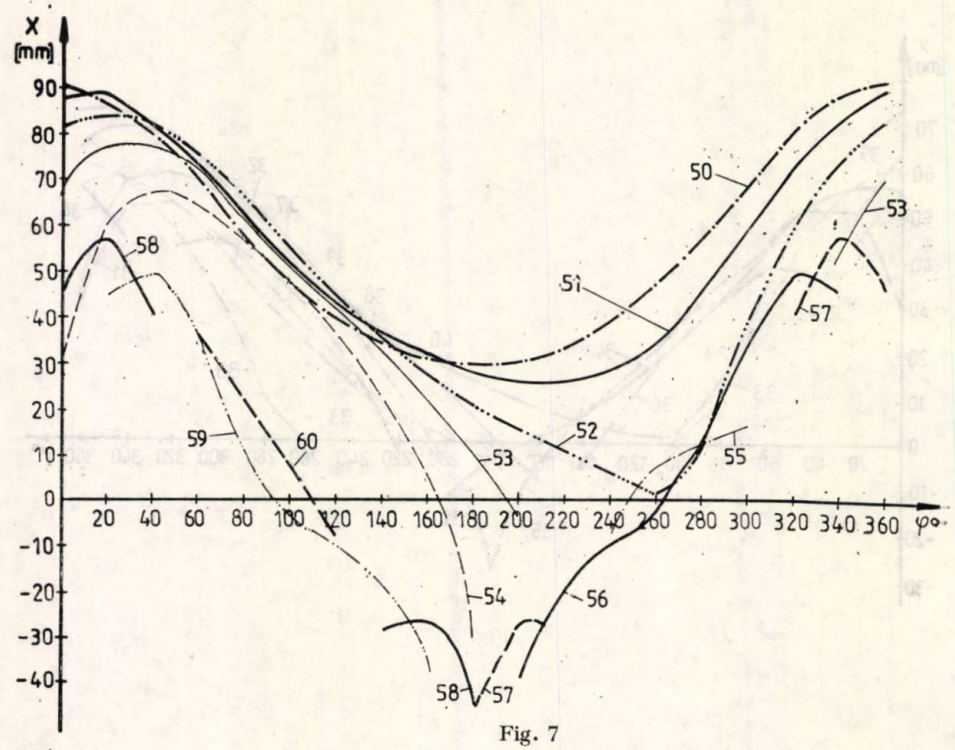

X
[mm]
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 240 260 280 300 320 340 360 φ°
50
53
58
51
57
59
60
52
53
55
54
56
58
57

Fig. 7

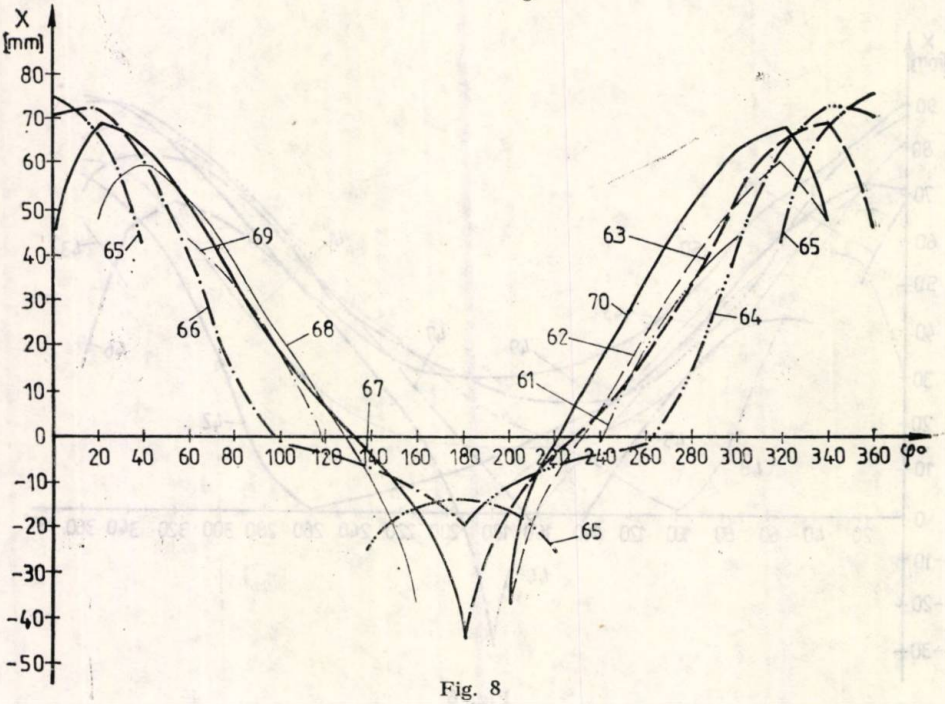

X
[mm]
80
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 240 260 280 300 320 340 360 φ°
65
69
63
65
70
64
66
68
62
67
61
65

Fig. 8

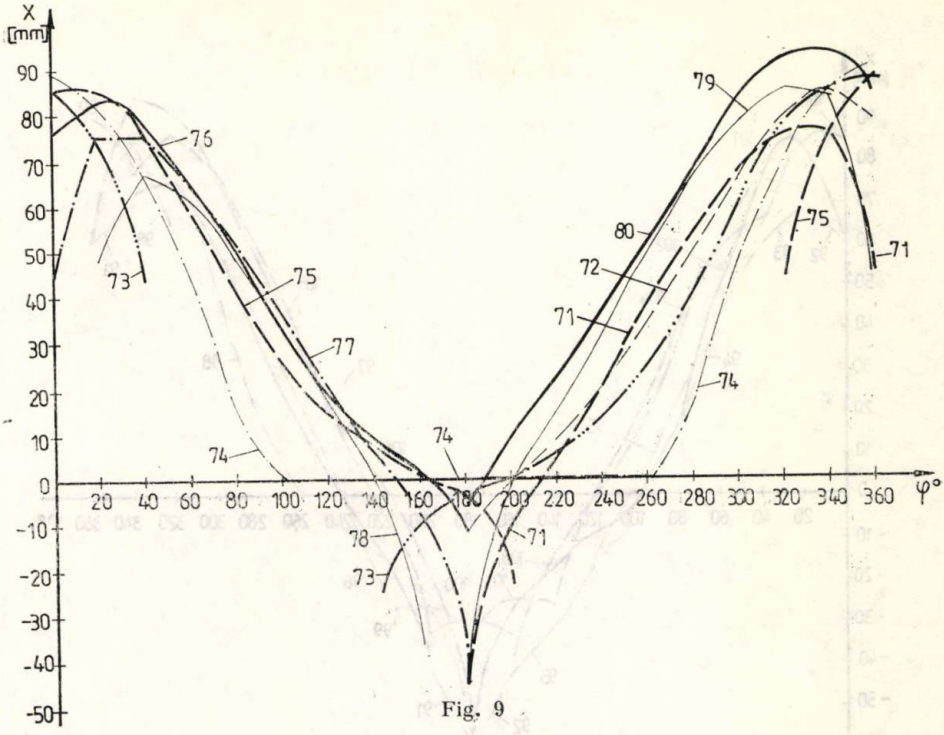

X
[mm]
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 240 260 280 300 320 340 360
φ°
76
73
75
77
74
78
73
74
71
79
80
72
71
75
71
74

Fig. 9

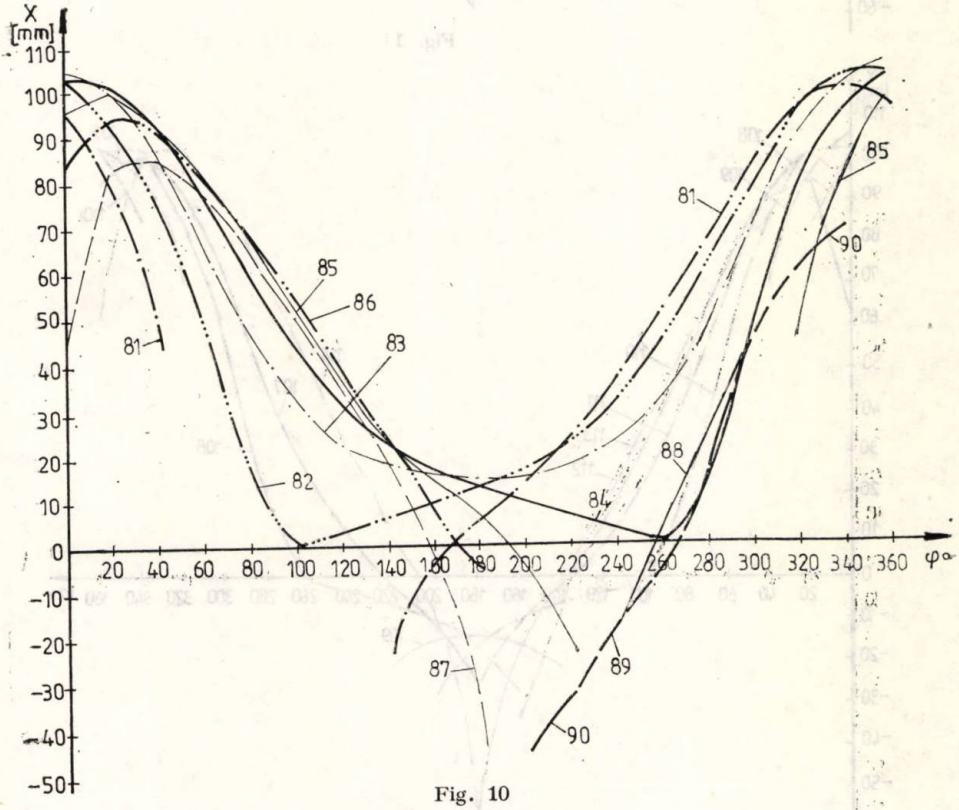

X
[mm]
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 240 260 280 300 320 340 360
φ°
85
86
83
81
82
87
84
88
89
90
81
85
90

Fig. 10

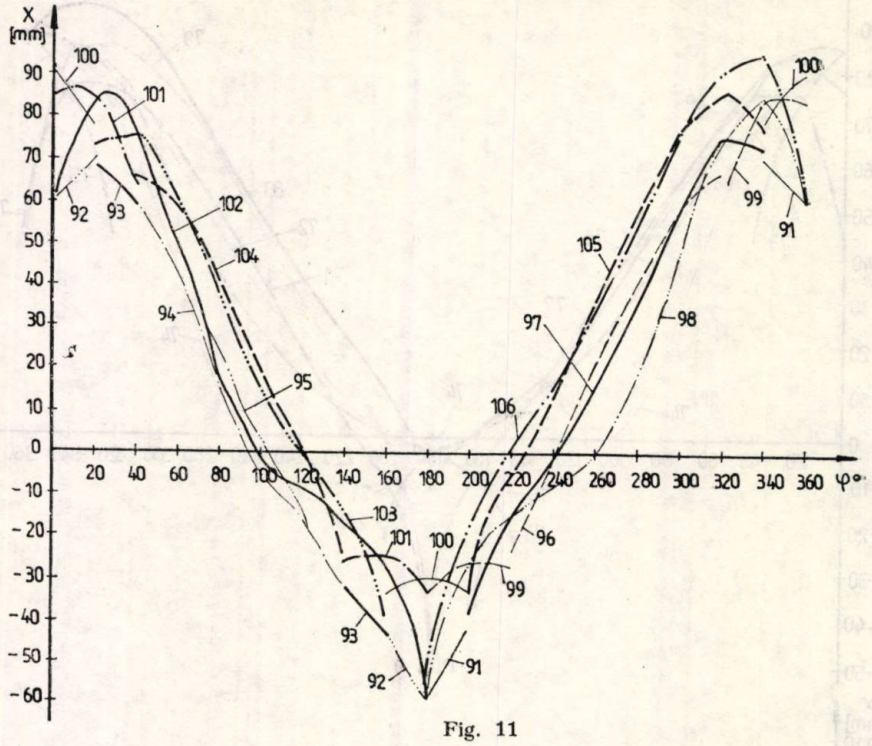

X [mm]
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 240 260 280 300 320 340 360 φ°
100
101
92
93
102
104
94
95
103
101
100
99
93
92
91
106
97
105
98
100
99
91
96

Fig. 11

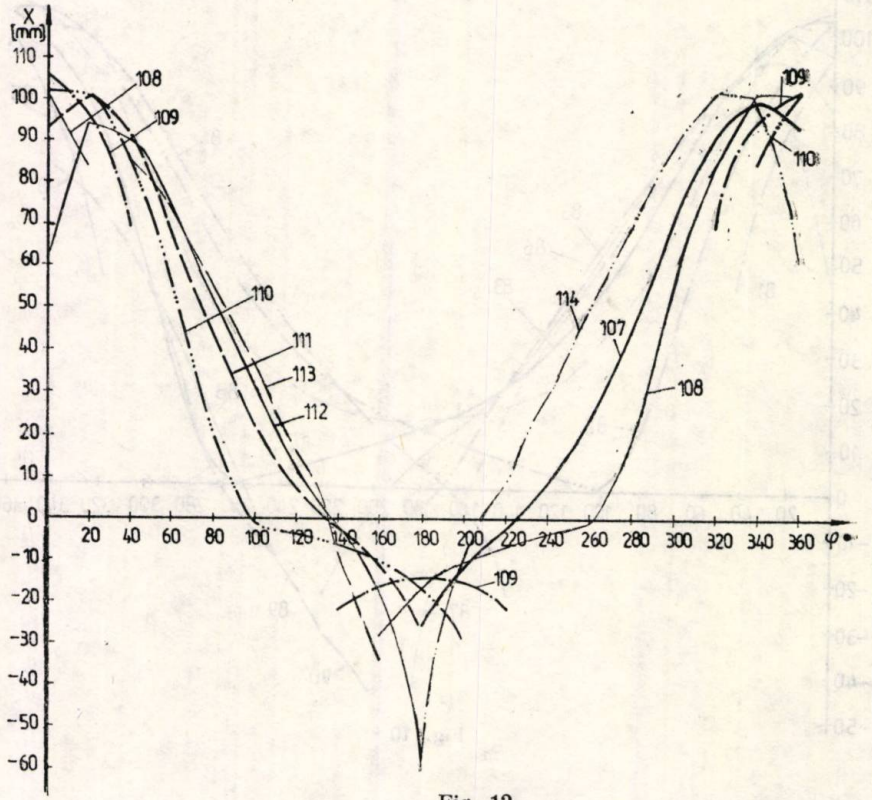

X [mm]
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 240 260 280 300 320 340 360 φ°
108
109
110
111
113
112
109
114
107
108
109
110

Fig. 12

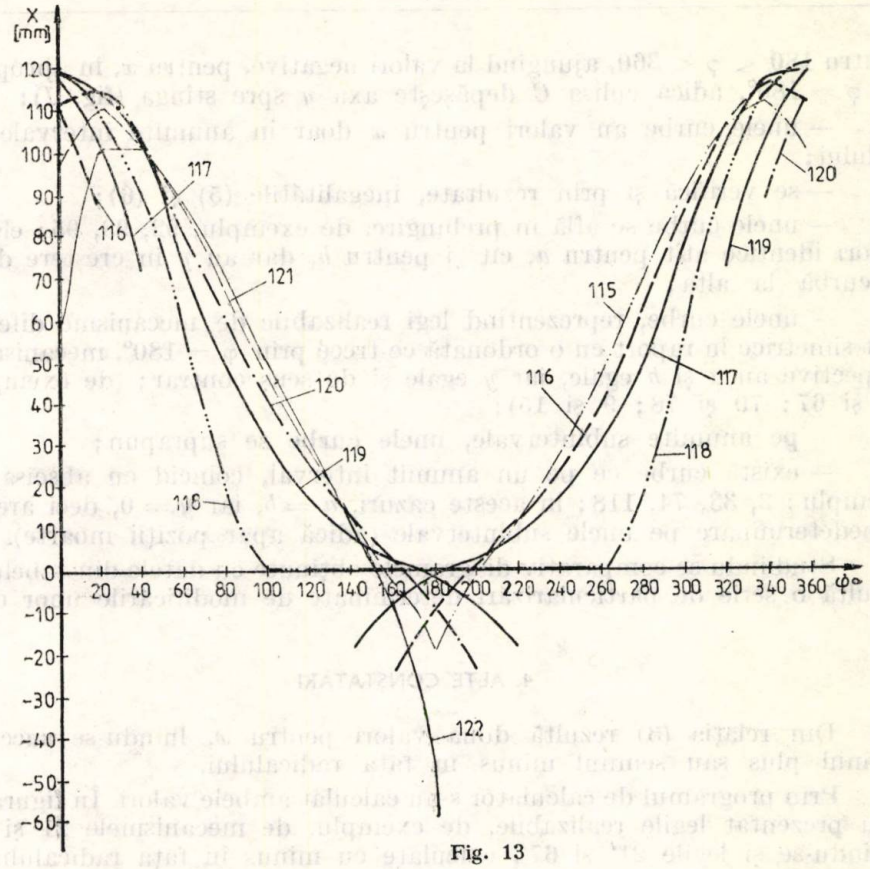
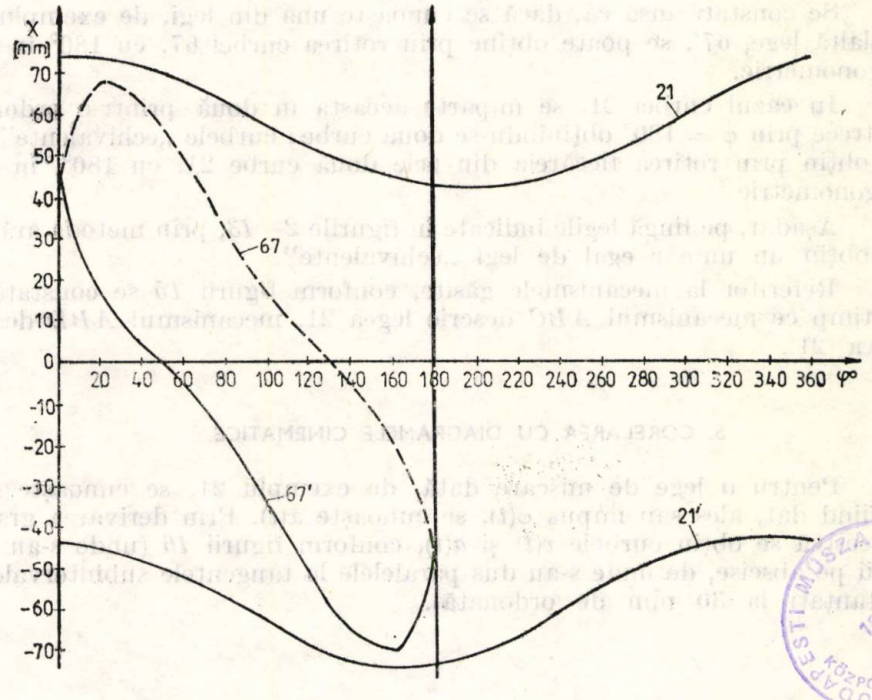


Fig. 13



BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1048

pentru $180 < \varphi < 360$, ajungînd la valori negative, pentru x, în apropiere de $\varphi = 180°$, adică culisa C depășește axa y spre stînga (fig. *1*);

— unele curbe au valori pentru x doar în anumite intervale ale ciclului;

— se verifică și prin rezultate, inegalitățile (5) și (6);

— unele curbe se află în prelungire, de exemplu, 92, 93, 95; ele au valori identice atît pentru a, cît și pentru b, dar au y în creștere de la o curbă la alta;

— unele curbe, reprezentînd legi realizabile de mecanisme diferite, sînt simetrice în raport cu o ordonată ce trece prin $\varphi = 180°$, mecanismele respective au a și b egale, iar y egale și de sens contrar; (de exemplu: 63 și 67; 70 și 78; 9 și 15);

— pe anumite subintervale, unele curbe se suprapun;

— există curbe ce pe un anumit interval, coincid cu abscisa, de exemplu: 2, 33, 74, 118; în aceste cazuri, $a = b$, iar $y = 0$, deci are loc o nedeterminare pe unele subintervale (adică apar poziții moarte).

Studiindu-se comparativ diagramele obținute cu datele din tabelul *1*, rezultă o serie de particularizări determinate de modificările unor cote.

4. ALTE CONSTATĂRI

Din relația (3) rezultă două valori pentru x, luîndu-se succesiv semnul plus sau semnul minus în fața radicalului.

Prin programul de calculator s-au calculat ambele valori. În figura *14* s-au prezentat legile realizabile, de exemplu, de mecanismele 21 și 67, găsindu-se și legile 21′ și 67′, calculate cu minus în fața radicalului.

Se constată însă că, dacă se cunoaște una din legi, de exemplu 67, cealaltă lege, 67′, se poate obține prin rotirea curbei 67, cu 180° în sens trigonometric.

În cazul curbei 21, se împarte aceasta în două printr-o ordonată ce trece prin $\varphi = 180°$ obținîndu-se două curbe; curbele „echivalente" 21′ se obțin prin rotirea fiecăreia din cele două curbe 21, cu 180°, în sens trigonometric.

Așadar, pe lîngă legile indicate în figurile *2—13*, prin metoda arătată se obțin un număr egal de legi „echivalente".

Referitor la mecanismele găsite, conform figurii *15* se constată că în timp ce mecanismul ABC descrie legea 21, mecanismul ABD descrie legea 21′.

5. CORELAREA CU DIAGRAMELE CINEMATICE

Pentru o lege de mișcare dată, de exemplu 21, se cunoaște $x(\varphi)$ și fiind dat, ales sau impus $\varphi(t)$, se cunoaște $x(t)$. Prin derivarea grafică succesivă se obțin curbele $v(t)$ și $a(t)$, conform figurii *16* (unde s-au ales polii pe abscise, de unde s-au dus paralelele la tangentele subintervalelor, distanțați la 30 mm de ordonată).

Pe baza acestor diagrame cinematice, se pot găsi o serie de concluzii utile la proiectare. Asemenea diagrame se pot obține pentru toate legile prezentate mai sus.

Volumul mare de calcul poate fi redus dacă se face interpolarea cu *funcții spline cubice*, iar diagramele se trasează direct la ploter.

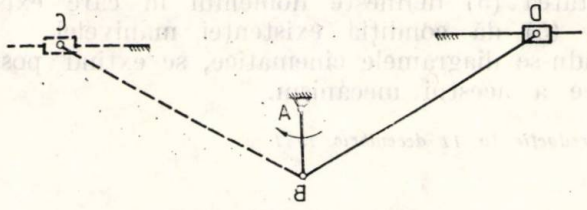


Fig. 15

Folosirea diagramelor cinematice este foarte utilă în cazul cînd la sinteză se cere ca pe anumite subintervale să se asigure anumite poziții, pe alte subintervale anumite viteze, iar pe alte subintervale anumite

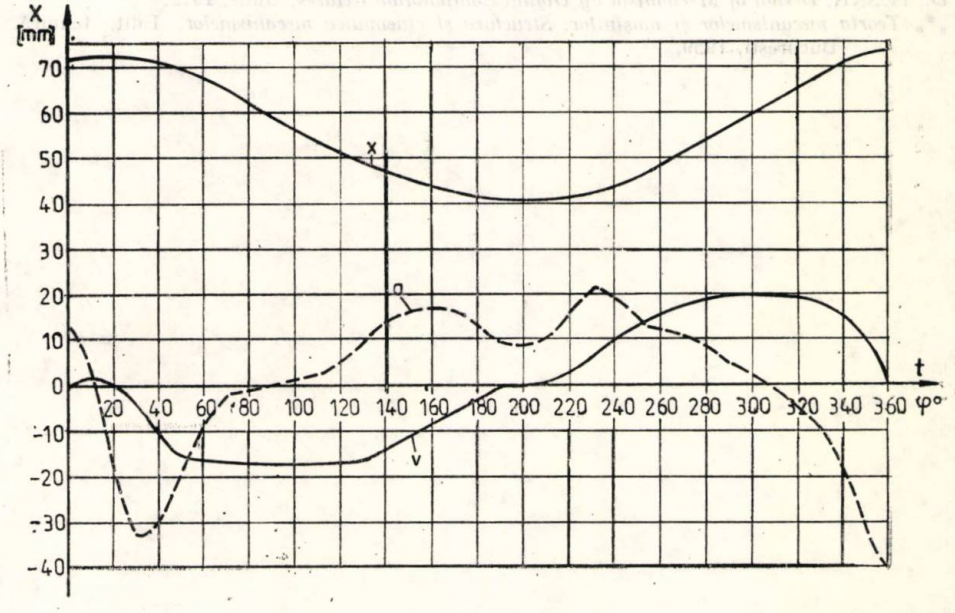


Fig. 16

accelerații. În acest fel, prin derivări sau integrări, grafice sau analitice, se pot obține legile rezultante cerute, care, dacă rezultă sub forma $x(\varphi)$, pot fi comparate cu cele din figurile *2—13* sau cu cele realizabile de alte mecanisme.

Dispunîndu-se de un atlas de asemenea curbe, se poate găsi rapid mecanismul cel mai convenabil pentru o lege dată.

6. CONCLUZII

— Mecanismul manivelă-piston poate realiza o serie de legi de mișcare, din care unele sînt date în figurile *2—13*, altele se obțin prin procedeul indicat în figura *14*, iar altele, intermediare, se obțin prin calcul cu relația (3), pentru alte valori pentru a, b, y.

— Inegalitatea (5) definește domeniul în care există asemenea mecanisme, iar (5) dă condiția existenței manivelei.

— Folosindu-se diagramele cinematice, se extind posibilitățile sintezei cinematice a acestui mecanism.

Primită la redacție la 11 decembrie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. C. S. BEZVESELNÎI, *Atlas po teorii mehanizmov i mașin*, Harkov, 1955.
2. R. C. BOGDAN, N. MANAFI, S. CONONOVICI, *Algoritme și programe de calcul pentru determinarea parametrilor cinematici ai mecanismelor plane articulate*, Simpozionul de mecanisme și transmisii mecanice, Reșița, 1972.
3. R. C. BOGDAN, D. LARIONESCU — *Program la calculatorul electronic pentru tabelerea și trasarea parametrilor cineamtici ai mecanismelor*, St. cerc. mec. apl., **30**, *2* (1971).
4. D. TESAR, *Design of Mechanism by Digital Computation lectures*, June, 1972.
5. *** *Teoria mecanismelor și mașinilor. Structura și cinematica mecanismelor*, Edit. tehnică, București, 1959.

ELEMENT FINIT DREPTUNGHIULAR DE PLACĂ PLANĂ STRUCTURAL ORTOTROPĂ

de FLORIN GROSU

Registrul Naval Român, București

Se dezvoltă un element finit dreptunghiular de placă plană, izotropă, rigidizată cu două seturi ortogonale de nervuri identice, echidistante și dispuse pe o singură față. Exprimînd deplasările în interiorul elementului cu ajutorul polinoamelor l'Hermite de ordinul întîi, matricea de rigiditate a elementului se determină în ipoteza comportării liniar elastice a materialului, nervurile de rigidizare fiind considerate ca bare cu pereți subțiri. În scopul demonstrării eficienței elementului finit propus, s-a inclus un exemplu numeric.

NOTAȚII

E	reprezintă	modulul longitudinal de elasticitate pentru materialul izotrop;
G	—	modulul transversal de elasticitate pentru materialul izotrop;
K_T	—	constanta lui St. Venant de torsiune;
P	—	forța axială;
T_{sv}	—	momentul lui St. Venant de torsiune;
h	—	grosimea plăcii izotrope;
m_ξ, m_η	—	momentele de încovoiere în jurul axelor ξ și, respectiv, η;
m_ω	—	bimomentul;
l	—	lungimea elementului finit de bară cu pereți subțiri;
p_u, p_v, p_w	—	tracțiunile suprafeței mediane a plăcii izotrope în direcțiile deplasărilor u, v și, respectiv, w;
u, v, w	—	deplasările suprafeței mediane a plăcii izotrope în direcțiile x, y și, respectiv, z;
u_ξ, u_η, u_ζ	—	deplasările originii sistemului de coordonate ξ, η, ζ în direcțiile ξ, η și, respectiv, ζ;
x, y, z	—	sistemul de axe de coordonate al plăcii izotrope;
ε_x, ε_y, γ_{xy}	—	deformațiile plăcii izotrope la distanța z de suprafața mediană;
θ_ζ	—	unghiul de răsucire în jurul axei ζ;
ν	—	coeficientul lui Poisson;
ξ, η, ζ	—	sistemul de axe de coordonate al barei cu pereți subțiri, fixat pe secțiunea transversală și deplasîndu-se cu aceasta;
ω	—	coordonata sectorială.

INTRODUCERE

Plăcile plane structural ortotrope, formate dintr-o placă izotropă rigidizată cu două seturi ortogonale de nervuri identice, echidistante și dispuse pe o singură față, permit obținerea unei mari rigidități, la încovoiere și torsiune, cu un consum minim de metal.

Mai mulți autori abordează calculul acestor structuri prin înlocuirea lor cu plăci subțiri, ortotrope, de grosime constantă.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 2, 1983, P. 121–129

K. Trenks [11] transformă ortotropia de structură în ortotropie de material, metoda, în cazul nervurilor amplasate pe o singură față a plăcii izotrope, conducînd la erori considerabile.

A. Pflüger [7], [8] elaborează o primă teorie exactă a plăcilor structural ortotrope prin cuplarea stării plane a plăcii izotrope cu încovoierea nervurilor. Prin integrarea sistemului de ecuații propus se realizează rezultate exacte, metoda comportînd unele dificultăți în introducerea anumitor condiții la limită.

E. Giencke [3] simplifică metoda lui A. Pflüger, neglijînd influența alungirilor asupra deplasărilor w, în dreptul centrelor de greutate (corespunzătoare secțiunilor transversale ale nervurilor împreună cu porțiunile de placă aferente).

N. J. Huffington, Jr. [5], [6] determină constantele elastice ale plăcii plane ortotrope, în funcție de constantele elastice și configurația geometrică, corespunzătoare elementelor componente ale sistemului placă-nervuri.

Toate abordările mai sus menționate folosesc metode clasice de rezolvare a sistemului de ecuații diferențiale corespunzător plăcilor ortotrope, metode cu care se pot rezolva cazuri particulare. Complexitatea problemelor practice, privind geometria domeniului, natura condițiilor la limită, legile de variație a mediului și acțiunile forțelor exterioare, a impus utilizarea metodelor finite în calculul plăcilor ortotrope. În acest sens, E. Giencke [4] propune un procedeu de rezolvare a ecuațiilor diferențiale a plăcilor structural ortotrope, cu ajutorul metodei diferențelor finite.

În ceea ce privește utilizarea metodei elementului finit, față de elementele de placă cu ortotropie de material utilizate frecvent, L. Stoicescu [9] fundamentează un element finit dreptunghiular, rafinat, structural ortotrop, cu 12 deplasări generalizate la un nod (u, u_x, u_y, v, v_x, v_y, w_x, w_y, w_{xy}, w_{xx}, w_{yy}, indicii reprezentînd derivate parțiale). Acest element evită divizarea unei plăci structural ortotrope, în elemente finite de grindă și de placă izotropă, fapt ce conduce la o reducere a timpului de calcul, permițînd abordarea sistemului placă-nervuri în condiții reale la limită.

În continuare, se dezvoltă un element finit dreptunghiular de placă plană cu ortotropie de structură, admițînd modelul deplasare propus de F. K. Bogner, R. L. Fox și L. A. Schmit [1] și considerînd nervurile de rigidizare ca bare cu pereți subțiri.

MODELUL DEPLASARE

Utilizînd notația $\langle\ \rangle$ pentru un vector linie și $\{\ \}$ pentru un vector coloană, deplasările în interiorul elementului de placă structural ortotropă (fig. 1), descrise cu ajutorul polinoamelor l'Hermite de ordinul întîi, sînt:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \langle n_6 \rangle \{q_u\}, \\ v(x, y) &= \langle n_6 \rangle \{q_v\}, \\ w(x, y) &= \langle n_6 \rangle \{q_w\}, \end{aligned} \tag{1}$$

unde

$$\langle n_6\rangle = \langle H_1(s_x)H_1(s_y),\quad a\,H_3(s_x)H_1(s_y),\quad b\,H_1(s_x)H_3(s_y),\quad ab\,H_3(s_x)H_3(s_y),$$
$$H_2(s_x)H_1(s_y),\quad a\,H_4(s_x)H_1(s_y),\quad b\,H_2(s_x)H_3(s_y),\quad ab\,H_4(s_x)H_3(s_y),$$
$$H_2(s_x)H_2(s_y),\quad a\,H_4(s_x)H_2(s_y),\quad b\,H_2(s_x)H_4(s_y),\quad ab\,H_4(s_x)H_4(s_y),$$
$$H_1(s_x)H_2(s_y),\quad a\,H_3(s_x)H_2(s_y),\quad b\,H_1(s_x)H_4(s_y),\quad ab\,H_3(s_x)H_4(s_y)\rangle,$$

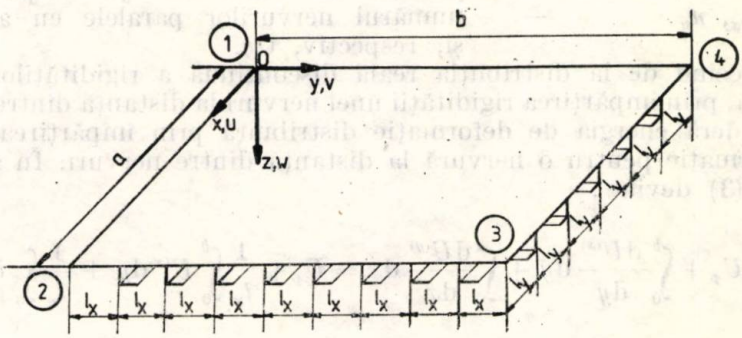


Fig. 1

$$\langle q_u\rangle = \langle u^{(1)},\ u_x^{(1)},\ u_y^{(1)},\ u_{xy}^{(1)},\ u^{(2)},\ \ldots,\ u_{xy}^{(2)},\ u^{(3)},\ \ldots,\ u_{xy}^{(3)},\ u^{(4)},\ \ldots,\ u_{xy}^{(4)}\rangle,$$
$$\langle q_v\rangle = \langle v^{(1)},\ v_x^{(1)},\ v_y^{(1)},\ v_{xy}^{(1)},\ v^{(2)},\ \ldots,\ v_{xy}^{(2)},\ v^{(3)},\ \ldots,\ v_{xy}^{(3)},\ v^{(4)},\ \ldots,\ v_{xy}^{(4)}\rangle, \quad (2)$$
$$\langle q_w\rangle = \langle w^{(1)},\ w_x^{(1)},\ w_y^{(1)},\ w_{xy}^{(1)},\ w^{(2)},\ \ldots,\ w_{xy}^{(2)},\ w^{(3)},\ \ldots,\ w_{xy}^{(3)},\ w^{(4)},\ \ldots,\ w_{xy}^{(4)}\rangle,$$

$$s_x = \frac{x}{a},\quad s_y = \frac{y}{b},$$

$$H_1(s) = 1 - 3s^2 + 2s^3,$$

$$H_2(s) = 3s^2 - 2s^3,$$

$$H_3(s) = s - 2s^2 + s^3,$$

$$H_4(s) = s^3 - s^2.$$

Pentru simplificare, derivatele parţiale ale deplasărilor generalizate au fost notate cu indici ataşaţi mărimii derivate, de exemplu, $u_x^{(1)} = \dfrac{\partial u^{(1)}}{\partial x}$, $w_{xy}^{(3)} = \dfrac{\partial^2 w^{(3)}}{\partial x \partial y}$.

ENERGIA POTENȚIALĂ

Energia de deformație pentru sistemul placă-nervuri (fig. 1) se poate scrie:

$$U = U_p + \sum_{i=1}^{n_x} U_i^{(x)} + \sum_{i=1}^{n_y} U_i^{(y)}, \tag{3}$$

unde U_p reprezintă energia de deformație pentru placa izotropă;
$U_i^{(x)}$, $U_i^{(y)}$ — energia de deformație pentru nervurile i paralele cu axele Ox și, respectiv, Oy;
n_x, n_y — numărul nervurilor paralele cu axele Ox și, respectiv, Oy.

Trecînd de la distribuția reală discontinuă a rigidităților la una continuă, prin împărțirea rigidității unei nervuri la distanța dintre nervuri, se consideră energia de deformație distribuită prin împărțirea energiei de deformație pentru o nervură la distanța dintre nervuri. În acest fel, relația (3) devine:

$$U \cong U_p + \int_0^b \frac{\mathrm{d}U^{(x)}}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y + \int_0^a \frac{\mathrm{d}U^{(y)}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = U_p + \frac{1}{l_x}\int_0^b U_i^{(x)}\mathrm{d}y + \frac{1}{l_y}\int_0^a U_i^{(y)}\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Energia de deformație a plăcii izotrope, liniar elastice, este

$$U_p = \int_0^a\int_0^b\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy}^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{5}$$

Relațiile linare deformații-deplasări pentru placa izotropă sînt:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{6}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.$$

Înlocuind relațiile (6) în (5) și efectuînd integrarea în raport cu z, energia de deformație a plăcii izotrope devine:

$$U_p = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\int_0^a\int_0^b\left\{u_x^2 + v_y^2 + 2\nu u_x v_y + \frac{1-\nu}{2}[u_y^2 + v_x^2 + 2u_y v_x]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y +$$

$$+ \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}\int_0^a\int_0^b\{w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + 2\nu w_{xx}w_{yy} + 2(1-\nu)w_{xy}^2\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7}$$

Considerînd nervurile ca bare cu pereţi subţiri şi utilizînd elementul finit de bară cu pereţi subţiri propus de S. Rajasekaran [2], energia de deformaţie corespunzătoare nervurii i (fig. 2) este:

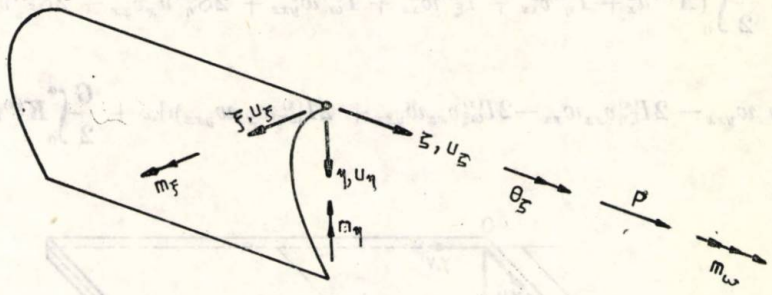


Fig. 2

$$U_i = \frac{1}{2}\int_0^l (Pu'_\zeta - m_\xi u''_\eta - m_\eta u''_\xi + m_\omega \theta''_\zeta + T_{sv}\theta'_\zeta)\mathrm{d}\zeta. \tag{8}$$

Cu accent s-au notat derivatele deplasărilor generalizate în raport cu ζ, de exemplu, $u'_\zeta = \dfrac{\mathrm{d}u_\zeta}{\mathrm{d}\zeta}$.

Relaţiile liniare deformaţii tensiuni generalizate pentru elementul finit de bară cu pereţi subţiri sînt:

$$\begin{Bmatrix} P \\ m_\eta \\ m_\xi \\ m_\omega \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & S_\eta & S_\xi & S_\omega \\ & I_\eta & I_{\xi\eta} & I_{\omega\xi} \\ & & I_\xi & I_{\omega\eta} \\ & \text{SIM} & & \\ & & & I_\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_\zeta \\ -u''_\xi \\ -u''_\eta \\ \\ \theta''_\zeta \end{Bmatrix}, \tag{9}$$

$$T_{sv} = GK_T\,\theta'_\zeta,$$

unde $A = \int_A \mathrm{d}A$, $S_\xi = \int_A \eta\mathrm{d}A$, $S_\eta = \int_A \xi\mathrm{d}A$, $S_\omega = \int_A \omega\mathrm{d}A$,

$$I_\xi = \int_A \eta^2\mathrm{d}A, \quad I_\eta = \int_A \xi^2\mathrm{d}A, \quad I_\omega = \int_A \omega^2\mathrm{d}A, \tag{10}$$

$$I_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta\mathrm{d}A, \quad I_{\omega\xi} = \int_A \omega\xi\mathrm{d}A, \quad I_{\omega\eta} = \int_A \omega\eta\mathrm{d}A.$$

În ipoteza că linia de contact a nervurilor se găseşte în suprafaţa mediană a plăcii izotrope, pentru o nervură paralelă cu axa Ox (fig. 3) avem:

$$u_\xi = -v, \quad u_\eta = w, \quad u_\zeta = u, \quad \theta_\zeta = -w_y \tag{11}$$

și din (8), (9), (10) și (11) obținem energia de deformație:

$$U_i^{(x)} = \frac{E}{2}\int_0^a (A^{(x)}u_x^2 + I_\eta^{(x)}v_{xx}^2 + I_\xi^{(x)}w_{xx}^2 + I_\omega^{(x)}w_{yxx}^2 + 2S_\eta^{(x)}u_x v_{xx} - 2S_\xi^{(x)}u_x w_{xx} - \tag{12}$$

$$- 2S_\omega^{(x)}u_x w_{yxx} - 2I_{\xi\eta}^{(x)}v_{xx}w_{xx} - 2I_{\omega\xi}^{(x)}v_{xx}w_{yxx} + 2I_{\omega\eta}^{(x)}w_{xx}w_{yxx})\mathrm{d}x + \frac{G}{2}\int_0^a K_T^{(x)}w_{xy}^2\mathrm{d}x.$$

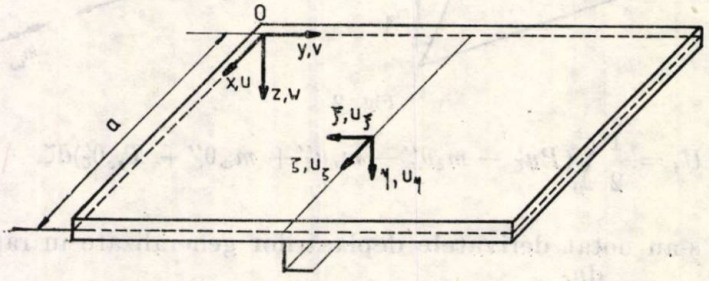


Fig. 3

În mod similar, pentru o nervură paralelă cu axa Oy (fig. 4) avem:

$$u_\xi = u, \quad u_\eta = w, \quad u_\zeta = v, \quad \theta_\zeta = w_x \tag{13}$$

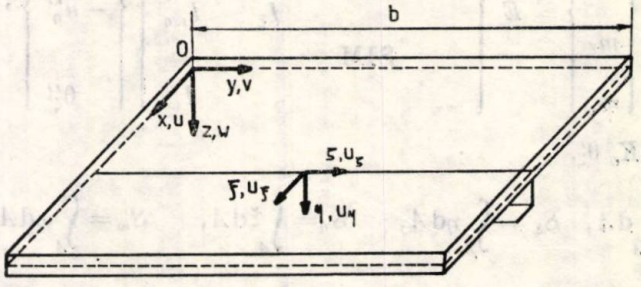


Fig. 4

și din (8), (9), (10) și (12) obținem energia de deformație:

$$U_i^{(y)} = \frac{E}{2}\int_0^b (A^{(y)}v_y^2 + I_\eta^{(y)}u_{yy}^2 + I_\xi^{(y)}w_{yy}^2 + I_\omega^{(y)}w_{xyy}^2 - 2S_\eta^{(y)}u_{yy}v_y - 2S_\xi^{(y)}v_y w_{yy} + \tag{14}$$

$$+ 2S_\omega^{(y)}v_y w_{xyy} + 2I_{\xi\eta}^{(y)}u_{yy}w_{yy} - 2I_{\omega\xi}^{(y)}u_{yy}w_{xyy} - 2I_{\omega\eta}^{(y)}w_{yy}w_{xyy})\mathrm{d}y + \frac{G}{2}\int_0^b K_T^{(y)}w_{xy}^2\mathrm{d}y.$$

Înlocuim (7), (12) și (14) în (4) și obținem energia de deformație pentru sistemul placă-nervuri :

$$U = \frac{E}{2}\int_0^a\int_0^b\Bigg\{\Bigg[u_x^2\left(\frac{h}{1-\nu^2}+\frac{A^{(x)}}{l_x}\right)+u_y^2\frac{h}{2(1+\nu)}+u_{yy}^2\frac{I_\eta^{(y)}}{l_y}\Bigg]+$$

$$+\Bigg[v_y^2\left(\frac{h}{1-\nu^2}+\frac{A^{(y)}}{l_y}\right)+v_x^2\frac{h}{2(1+\nu)}+v_{xx}^2\frac{I_\eta^{(x)}}{l_x}\Bigg]+$$

$$+\Bigg[w_{xx}^2\left(\frac{h^3}{12(1-\nu^2)}+\frac{I_\xi^{(x)}}{l_x}\right)+w_{yy}^2\left(\frac{h^3}{12(1-\nu^2)}+\frac{I_\xi^{(y)}}{l_y}\right)+$$

$$+w_{xy}^2\left(\frac{h^3}{6(1+\nu)}+\frac{GK_T^{(x)}}{El_x}+\frac{GK_T^{(y)}}{El_y}\right)+w_{xx}w_{yy}\frac{\nu h^3}{6(1-\nu^2)}+$$

$$+w_{xxy}^2\frac{I_\omega^{(x)}}{l_x}+w_{xyy}^2\frac{I_\omega^{(y)}}{l_y}+w_{xx}w_{xxy}\frac{2I_{\omega\eta}^{(x)}}{l_x}-w_{yy}w_{xyy}\frac{2I_{\omega\eta}^{(y)}}{l_y}\Bigg]+ \qquad (15)$$

$$+\Bigg[2u_xv_y\frac{\nu h}{(1-\nu^2)}+2u_yv_x\frac{h}{2(1+\nu)}+2u_xv_{xx}\frac{S_\eta^{(x)}}{l_x}-2u_{yy}v_y\frac{S_\eta^{(y)}}{l_y}\Bigg]+$$

$$+\Bigg[-2u_xw_{xx}\frac{S_\xi^{(x)}}{l_x}-2u_xw_{xxy}\frac{S_\omega^{(x)}}{l_x}+2u_{yy}w_{yy}\frac{I_{\xi\eta}^{(y)}}{l_y}-2u_{yy}w_{xyy}\frac{I_{\omega\xi}^{(y)}}{l_y}\Bigg]+$$

$$+\Bigg[-2v_{xx}w_{xx}\frac{I_{\xi\eta}^{(x)}}{l_x}-2v_{xx}w_{xxy}\frac{I_{\omega\xi}^{(x)}}{l_x}-2v_yw_{yy}\frac{S_\xi^{(y)}}{l_y}+2v_yw_{xyy}\frac{S_\omega^{(y)}}{l_y}\Bigg]\Bigg\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Lucrul mecanic exterior este :

$$W = \int_0^a\int_0^b [p_u u + p_v v + p_w w]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (16)$$

Energia potențială $\Pi^{(k)}$ pentru elementul k de placă structural ortotropă este dată de

$$\Pi^{(k)} = U^{(k)} - W^{(k)}, \qquad (17)$$

iar pentru un ansamblu de N elemente energia potențială totală devine :

$$\Pi = \sum_{k=1}^{N}\pi^{(k)}. \qquad (18)$$

MATRICEA DE RIGIDITATE A ELEMENTULUI

Introducînd deplasările (1) în expresia energiei de deformație pentru sistemul placă-nervuri (15) și efectuînd integrarea pe suprafața mediană a plăcii izotrope, energia de deformație este dată de

$$U = \frac{1}{2}\{X\}^T[K]\{X\}, \tag{19}$$

unde $\{X\}$ este vectorul coloană conținînd cele 48 deplasări generalizate ale elementului:

$$\{X\}^T = \langle\{q_u\}^T, \{q_v\}^T, \{q_w\}^T\rangle. \tag{20}$$

Matricea de rigiditate $[K]$, conținînd 48×48 elemente, se partiționează în felul următor:

$$[K] = \left[\begin{array}{c|c|c} K_{uu} & K_{uv} & K_{uw} \\ \hline K_{vu} & K_{vv} & K_{vw} \\ \hline K_{wu} & K_{wv} & K_{ww} \end{array}\right], \tag{21}$$

unde toate submatricele au dimensiunea de 16×16 elemente. Submatricele de pe diagonala principală sînt simetrice. Restul submatricelor nu sînt simetrice, reprezentînd cuplarea dintre deplasările u, v și w. Deoarece

$$[K_{uv}] = [K_{vu}]^T \quad [K_{uw}] = [K_{wu}]^T \quad [K_{vw}] = [K_{wv}]^T, \tag{22}$$

matricea $[K]$ de rigiditate a elementului este simetrică.

EXEMPLU NUMERIC

În scopul demonstrării eficienței elementului finit de placă structural ortotropă propus, am considerat placa din figura 5 izotropă, din oțel,

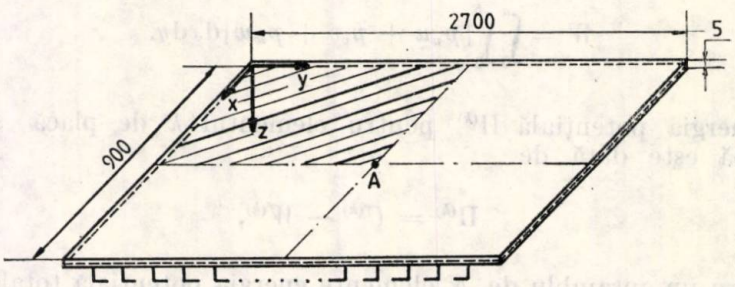


Fig. 5

rigidizată cu 29 profile L20 $\times$ 20 $\times$ 3 echidistante, simplu sprijinită pe contur și încărcată cu o presiune uniform distribuită, $p = 0{,}5$ daN/cm^2.

Determinînd cu relațiile date de E. Giencke [3] constantele rigidității plăcii ortotrope și luînd soluția ecuației diferențiale corespunzătoare în formă de serie dublă trigonometrică [10], am obținut $w_A = 6{,}434$ mm.

Aplicînd metoda elementului finit, datorită dublei simetrii a fost necesară modelarea numai a sfertului hașurat. Efectuarea integralelor, care intervin în calculul submatricelor de rigiditate, s-a realizat cu ajutorul formulei Gauss de integrate numerică. La o discretizare a domeniului hașurat în 2×2 și 4×4 elemente s-a obținut $w_A = 6{,}066$ mm și, respectiv, $w_A = 6{,}199$ mm, valori normale comparativ cu soluția analitică indicată mai sus.

Primită la redacție la 22 decembrie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. F. K. BOGNER, R. L. FOX, L. A. SCHMIT, *A cylindrical shell discrete element*, A.I.A.A Journal, April 1967, p. 745—750.
2. W. F. CHEN, T. ATSUTA, *Theory of beam—columns*, McGraw—Hill, Inc., 1977.
3. E. GIENCKE, *Die Grundgleichungen für die orthotrope Platte mit exzentrischen Steifen*, Der Stahlbau, Juni 1955, p. 128—129.
4. E. GIENCKE, *Ein einfaches und genaues Verfahren zur Berechnung von orthotropen Scheiben und Platten*, Der Stahlbau, 1967, *9—10*, p. 260—268, 303—315.
5. N. J. HUFFINGTON, JR., BLACKSBURG, VA., *Theoretical determination of rigidity properties of orthogonally stiffened plates*, J. Appl. Mechanics, March 1956, p. 15—20.
6. N. J. HUFFINGTON, JR., *Bending athwart a parallel—stiffened plate*, J. Appl. Mechanics, June 1967, p. 278—282.
7. A. PFLÜGER, *Zum Beulproblem der anisotropen Rechteckplatte*, Österreichisches Ingenieur—Archiv; **16**, p. 111—116 (1947).
8. A. PFLÜGER, *Die orthotrope Platte mit Hohlsteifen*, Österreichisches Ingenieur—Archiv, **2**, p. 199—207 (1955).
9. L. STOICESCU, *Contribuții la calculul planșeelor de nave folosind elemente finite de placă ortotropă structural și elemente finite de bară cu pereți subțiri*, Institutul politehnic București, 1976.
10. S. P. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY—KRIEGER, *Teoria plăcilor plane și curbe*, Edit. tehnică, București, 1968.
11. K. TRENKS, *Beitrag zur Berechnung orthogonal—anisotropen Rechteckplatten*, Der Bauingenieur, **29**, p. 372—377, (1954).

APLICAREA METODEI PARAMETRILOR INIȚIALI LA CALCULUL PLĂCILOR PLANE DREPTUNGHIULARE

de MIRCEA V. SOARE și D. IORDACHE

Institutul de construcții București

Se extinde metoda parametrilor inițiali, propusă de Krilov și Umanski pentru calculul grinzilor supuse la încovoiere, la calculul plăcilor plane dreptunghiulare simplu rezemate pe două laturi opuse. Avantajul metodei constă în aceea că, pentru fiecare rang al seriei simple trigonometrice, este necesară determinarea doar a doi parametri. În încheiere, se sugerează o gamă largă de aplicații.

1. INTRODUCERE

Este binecunoscută aplicarea metodei parametrilor inițiali la calculul grinzilor, atît pe reazeme punctuale, cît și pe mediu elastic de tip Winkler [2], [3], [9]. În esență, ea constă în înlocuirea celor patru constante de integrare care intervin în soluția generală a săgeților w prin parametri cu semnificație fizică, anume valorile săgeții, rotirii, momentului încovoietor și forței tăietoare (w_0, φ_0, M_0, T_0) în originea axelor de coordonate. Doi dintre parametri sînt determinați în origine, iar ceilalți doi rămîn de determinat la celălalt capăt al grinzii, în funcție de condițiile de rezemare ale grinzii (condiții bilocale).

Astfel, din punct de vedere matematic, aplicarea metodei parametrilor inițiali revine, într-un anumit sens, la transformarea condițiilor la limită bilocale într-o problemă de condiții inițiale.

Metoda a mai fost aplicată în calculul dinamic al structurilor din bare [1], [5], [6], [7] și, într-un caz izolat, la calculul cupolelor sferice [4].

După cunoștința autorilor, metoda nu a fost aplicată sistematic la calculul plăcilor plane. De aceea obiectul studiului de față este de a stabili relațiile generale de calcul și de a exemplifica aplicarea metodei pe un caz concret, la plăcile plane dreptunghiulare.

Problema plăcilor plane implicînd două variabile independente, metoda poate fi aplicată prin separarea variabilelor. Aceasta revine la utilizarea seriilor trigonometrice cu coeficienți variabili, fapt care restrînge domeniul de aplicabilitate a metodei parametrilor inițiali la plăcile dreptunghiulare simplu rezemate pe două laturi opuse și cu condiții de rezemare arbitrare pe celelalte două laturi.

2. UTILIZAREA SERIILOR SIMPLE TRIGONOMETRICE

Fie o placă dreptunghiulară $a \cdot b$, simplu rezemată în lungul laturilor $x = 0$ și $x = a$; originea axelor de coordonate este aleasă într-unul din colțuri, axele x și y fiind așternute pe două laturi vecine (fig. 1).

Săgețile w satisfac ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{Z(x, y)}{K}, \tag{2.1}$$

în care Z reprezintă sarcina transversală a plăcii,

$K = \dfrac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ — rigiditatea la încovoiere a plăcii, presupusă constantă,

δ — grosimea plăcii,

E — modulul de elasticitate al materialului,

μ — coeficientul de contracție transversală.

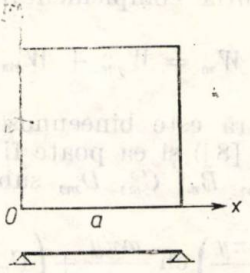


Fig. 1

Vom presupune că expresia încărcării $Z(x, y)$ poate fi scrisă sub forma unei serii simple trigonometrice cu coeficienți variabili,

$$Z(x, y) = \sum_m Z_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \tag{2.2a}$$

în care

$$Z_m(y) = \frac{2}{a}\int_0^a Z(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2.2b}$$

Ținînd seama de forma pe care o capătă ecuația săgeților (2.1),

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{K}\sum_m Z_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \tag{2.3}$$

se poate căuta o soluție pentru săgeți avînd aceeași structură trigonometrică

$$w = \sum_m W_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2.4}$$

Soluția (2.4) satisface condițiile de săgeată w nulă și de moment încovoietor M_x nul, pe laturile $x = 0$ și $x = a$ ale plăcii, prin însăși structura sa.

Exprimînd că (2.4) este o soluție a ecuației (2.3) și aplicînd principiul suprapunerii efectelor, ne putem limita la efectuarea calculelor pentru rangul m, urmînd apoi a face sumarea.

Rezultă astfel că funcția $W_m(y)$ trebuie să satisfacă ecuația diferențială ordinară,

$$W_m^{IV} - \frac{2m^2\pi^2}{a^2} W_m'' + \frac{m^4\pi^4}{a^4} W_m = \frac{Z_m(y)}{K}. \tag{2.5}$$

Soluția generală va fi suma dintre o soluție particulară W_{pm} și soluția ecuației omogene (soluția complementară) W_{cm}:

$$W_m = W_{pm} + W_{cm}. \tag{2.6}$$

Soluția complementară este binecunoscută din literatura de specialitate (vezi de exemplu [8]) și ea poate fi scrisă, cu ajutorul a patru constante de integrare A_m, B_m, C_m, D_m, sub forma:

$$W_{cm}(y) = \left(A_m + B_m \frac{m\pi y}{a}\right) \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \left(C_m + D_m \frac{m\pi y}{a}\right) \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a}. \tag{2.7}$$

Soluția particulară poate fi obținută, sub forma cea mai generală, prin aplicarea metodei variației constantelor (Lagrange). Presupunînd în (2.7) că A_m, B_m, C_m, D_m sînt funcții de y, ele vor putea fi determinate din sistemul algebric avînd ca necunoscute pe $\mathrm{d}A_m/\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}B_m/\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}C_m/\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}D_m/\mathrm{d}y$:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{ch}\alpha_m y & \alpha_m y \operatorname{sh}\alpha_m y & \operatorname{sh}\alpha_m y & \alpha_m y \operatorname{ch}\alpha_m y \\ \operatorname{sh}\alpha_m y & \operatorname{ch}\alpha_m y + \alpha_m y \operatorname{sh}\alpha_m y & \operatorname{ch}\alpha_m y & \operatorname{sh}\alpha_m y + \alpha_m y \operatorname{ch}\alpha_m y \\ \operatorname{ch}\alpha_m y & 2\operatorname{ch}\alpha_m y + \alpha_m y \operatorname{sh}\alpha_m y & \operatorname{sh}\alpha_m y & 2\operatorname{sh}\alpha_m y + \alpha_m y \operatorname{ch}\alpha_m y \\ \operatorname{sh}\alpha_m y & 3\operatorname{ch}\alpha_m y + \alpha_m y \operatorname{sh}\alpha_m y & \operatorname{ch}\alpha_m y & 3\operatorname{sh}\alpha_m y + \alpha_m y \operatorname{ch}\alpha_m y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}A_m}{\mathrm{d}y} \\ \frac{\mathrm{d}B_m}{\mathrm{d}y} \\ \frac{\mathrm{d}C_m}{\mathrm{d}y} \\ \frac{\mathrm{d}D_m}{\mathrm{d}y} \end{bmatrix} = \tag{2.8}$$

$$= \frac{1}{K\alpha_m^3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Z_m(y) \end{bmatrix}$$

în care s-a introdus notația simplificatoare

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}. \tag{2.9}$$

Rezolvarea sistemului (2.8) furnizează rădăcinile:

$$\begin{aligned}
\frac{dA_m}{dy} &= -\frac{Z_m}{2K\alpha_m^3}(\alpha_m y \operatorname{ch}\alpha_m y - \operatorname{sh}\alpha_m y),\\
\frac{dB_m}{dy} &= \frac{Z_m}{2K\alpha_m^3}\operatorname{ch}\alpha_m y,\\
\frac{dC_m}{dy} &= +\frac{Z_m}{2K\alpha_m^3}(\alpha_m y \operatorname{sh}\alpha_m y - \operatorname{ch}\alpha_m y),\\
\frac{dD_m}{dy} &= -\frac{Z_m}{2K\alpha_m^3}\operatorname{sh}\alpha_m y.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Integrînd în (2.10), observînd că constantele de integrare conduc la soluția complementară (2.7) și însumînd cei patru termeni, se obține soluția particulară

$$W_{pm}(y) = \frac{1}{2K\alpha_m^3}\left[(\alpha_m y \operatorname{ch}\alpha_m y - \operatorname{sh}\alpha_m y)\int_0^y Z_m \operatorname{ch}\alpha_m y dy - \right.$$

$$- \operatorname{ch}\alpha_m y\int_0^y Z_m \alpha_m y \operatorname{ch}\alpha_m y dy + (\operatorname{ch}\alpha_m y -$$

$$\left. - \alpha_m y \operatorname{sh}\alpha_m y)\int_0^y Z_m \operatorname{sh}\alpha_m y dy + \operatorname{sh}\alpha_m y\int_0^y Z_m \alpha_m y \operatorname{sh}\alpha_m y dy\right]. \tag{2.11}$$

Pentru exemplificare, să considerăm că placa este încărcată cu o sarcină uniform distribuită $p = \text{const}$. Atunci

$$Z_m = \frac{4p}{m\pi} \quad (m = 1, 3, 5, \ldots) \tag{2.12}$$

și soluția particulară (2.11) ia forma simplă

$$W_{pm}(y) = \frac{Z_m}{2K\alpha_m^4}(2 - 2\operatorname{ch}\alpha_m y + \alpha_m y \operatorname{sh}\alpha_m y). \tag{2.13a}$$

Din (2.11) rezultă că atît funcţia W_{pm}, cît şi primele trei derivate W'_{pm}, W''_{pm} şi W'''_{pm} se anulează pentru $y=0$. În particular, din soluţia (2.13) rezultă

$$W'_{pm} = \frac{Z_m}{2K\alpha_m^3}(-\operatorname{sh}\alpha_m y + \alpha_m y \operatorname{ch}\alpha_m y),$$

$$W''_{pm} = \frac{Z_m}{2K\alpha_m^2}\alpha_m y \operatorname{sh}\alpha_m y, \tag{2.13b}$$

$$W'''_{pm} = \frac{Z_m}{2K\alpha_m}(\operatorname{sh}\alpha_m y + \alpha_m y \operatorname{ch}\alpha_m y).$$

Vom mai menţiona şi o altă soluţie particulară ce rezultă considerînd încovoierea cilindrică a plăcii [8]:

$$W_{pm} = \frac{Z_m a^4}{Km^4\pi^4} = \frac{Z_m}{K\alpha_m^4}, \tag{2.14}$$

unde α_m este dat de (2.9).

3. MĂRIMI SECŢIONALE ŞI DEFORMAŢII

Odată determinate săgeţile w, rotirile, momentele încovoietoare şi de torsiune şi forţele tăietoare rezultă din relaţiile:

— rotiri:

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y}; \tag{3.1}$$

— momente încovoietoare:

$$M_x = -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad M_y = -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \tag{3.2}$$

— momente de torsiune:

$$M_{xy} = M_{yx} = -K(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}; \tag{3.3}$$

— forţe tăietoare:

$$T_x = -K\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right), \quad T_y = -K\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right); \tag{3.4}$$

— forțe tăietoare generalizate :

$$T_x^* = -K\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right],\quad T_y^* = -K\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right]. \tag{3.5}$$

Considerînd soluția particulară sub forma

$$W_p(x, y) = \sum_m W_{pm} \sin \alpha_m x, \tag{3.6}$$

în care W_{pm} este dat de (2.12) sau de o expresie de tipul (2.14), relațiile precedente se scriu

$$w = \sum_m [W_{pm} + (A_m + B_m \alpha_m y) \operatorname{ch} \alpha_m y + (C_m + D_m \alpha_m y) \operatorname{sh} \alpha_m y] \sin \alpha_m y, \tag{3.7a}$$

$$\varphi_x = \sum_m \alpha_m [W_{pm} + (A_m + B_m \alpha_m y) \operatorname{ch} \alpha_m y + (C_m + D_m \alpha_m y) \operatorname{sh} \alpha_m y] \cos \alpha_m x, \tag{3.7b}$$

$$\varphi_y = \sum_m \alpha_m \left[\frac{1}{\alpha_m} W'_{pm} + (B_m + C_m + D_m \alpha_m y) \operatorname{ch} \alpha_m y + (D_m + A_m + B_m \alpha_m y) \operatorname{sh} \alpha_m y\right] \sin \alpha_m y, \tag{3.7c}$$

$$M_x = K \sum_m \alpha_m^2 \left\{W_{pm} - \frac{\mu}{\alpha_m^2} W''_{pm} + [-2\mu D_m + (1-\mu) A_m + (1-\mu) B_m \alpha_m y] \operatorname{ch} \alpha_m y + [-2\mu B_m + (1-\mu) C_m + (1-\mu) D_m \alpha_m y] \operatorname{sh} \alpha_m y\right\} \sin \alpha_m x, \tag{3.7d}$$

$$M_y = -K \sum \alpha_m^2 \left\{\frac{1}{\alpha_m^2} W''_{pm} - \mu W_{pm} + [2D_m + (1-\mu) A_m + (1-\mu) B_m \alpha_m y] \operatorname{ch} \alpha_m y + [2B_m + (1-\mu) C_m + (1-\mu) D_m \alpha_m y] \operatorname{sh} \alpha_m y\right\} \sin \alpha_m x, \tag{3.7e}$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -K(1-\mu)\sum_m \alpha_m^2 \left[\frac{1}{\alpha_m} W'_{pm} + (B_m + C_m + D_m\alpha_m y)\operatorname{ch}\alpha_m y + \right.$$

$$\left. + (D_m + A_m + B_m\alpha_m y)\operatorname{sh}\alpha_m y\right]\cos\alpha_m x, \tag{3.7f}$$

$$T_x = -2K\sum_m \alpha_m^3 \left(-\frac{1}{2} W_{pm} + \frac{1}{2\alpha_m^2} W''_{pm} + D_m \operatorname{ch}\alpha_m y + B_m \operatorname{sh}\alpha_m y\right)\cos\alpha_m x, \tag{3.7g}$$

$$T_y = -2K\sum_m \alpha_m^3 \left(\frac{1}{2\alpha_m^2} W'''_{pm} - \frac{1}{2\alpha_m} W'_{pm} + B_m \operatorname{ch}\alpha_m y + D_m \operatorname{sh}\alpha_m y\right)\sin\alpha_m x, \tag{3.7h}$$

$$T_y^* = -K\sum \alpha_m^3 \left\{\frac{1}{\alpha_m^3} W''''_{pm} - \frac{2-\mu}{\alpha_m} W'_{pm} + [(1+\mu)B_m - \right.$$

$$- (1-\mu)C_m - (1-\mu)D_m\alpha_m y]\cdot\operatorname{ch}\alpha_m y + \tag{3.7i}$$

$$\left. + [(1+\mu)D_m - (1-\mu)A_m - (1-\mu)B_m\alpha_m y]\cdot\operatorname{sh}\alpha_m y\right\}\sin\alpha_m x.$$

Pentru cele ce urmează, vom rescrie expresiile lui w, φ_y, M_y și T_y, reținînd doar termenul general, de rang m, și — pentru simplitatea scrierii — suprimînd indicele m,

$$w = [W_p + (A + B\alpha y)\operatorname{ch}\alpha y + (C + D\alpha y)\operatorname{sh}\alpha y]\sin\alpha x, \tag{3.8a}$$

$$\varphi_y = \alpha\left[\frac{1}{\alpha} W'_p + (B + C + D\alpha y)\operatorname{ch}\alpha y + (D + A + B\alpha y)\operatorname{sh}\alpha y\right]\sin\alpha x, \tag{3.8b}$$

$$M_y = -K\alpha^2\left\{\frac{1}{\alpha^2} W''_p - \mu W_p + [2D + (1-\mu)A + (1-\mu)B\alpha y]\operatorname{ch}\alpha y + \right. \tag{3.8c}$$

$$\left. + [2B + (1-\mu)C + (1-\mu)D\alpha y]\operatorname{sh}\alpha y\right\}\sin\alpha x,$$

$$T_y = -2K\alpha^3\left(\frac{1}{2\alpha^3} W'''_p - \frac{1}{2\alpha} W'_p + B\operatorname{ch}\alpha y + D\operatorname{sh}\alpha y\right)\sin\alpha x, \tag{3.8d}$$

$$T_y^* = -K\alpha^3\left\{\frac{1}{\alpha^3} W'''_p - \frac{2-\mu}{\alpha} W'_p + [(1+\mu)B - (1-\mu)C - \right.$$

$$\left. - (1-\mu)D\alpha y]\operatorname{ch}\alpha y + [(1+\mu)D - (1-\mu)A - (1-\mu)B\alpha y]\operatorname{sh}\alpha y\right\}\sin\alpha x. \tag{3.8e}$$

4. INTRODUCEREA PARAMETRILOR INIȚIALI

Să calculăm, mai departe, valorile lui w, φ_y, M_y și T_y pentru $y = 0$; fie w_0, φ_0, M_0 și T_0 aceste valori multiplicate cu $\sin \alpha x$. Făcînd $y = 0$ în relațiile (3.7) și simplificînd linia trigonometrică, rezultă:

$$w_0 = A\,;\quad \varphi_0 = \alpha(B + C),$$
$$M_0 = -K\alpha^2[2D + (1 - \mu)A]\,;\quad T_0 = -2K\alpha^3 B. \tag{4.1}$$

Putem rezolva sistemul (4.1) considerînd pe A, B, C, D ca necunoscute, în funcție de parametrii inițiali w_0, φ_0, M_0, T_0; rezultă ușor:

$$A = w_0\,;\quad B = -\frac{T_0}{2K\alpha^3},$$
$$C = \frac{\varphi_0}{\alpha} + \frac{T_0}{2K\alpha^3}\,;\quad D = -\frac{1-\mu}{2} w_0 - \frac{M_0}{2K\alpha^2}. \tag{4.2}$$

Înlocuind expresiile găsite pentru A, B, C, D în relațiile (3.7) și grupînd apoi termenii după parametrii w_0, φ_0, M_0, T_0, se obține:

$$w = \left[W_p + w_0 \left(\operatorname{ch}\alpha y - \frac{1-\mu}{2} \alpha y \operatorname{sh}\alpha y \right) + \frac{\varphi_0}{\alpha} \operatorname{sh}\alpha y - \right.$$
$$\left. - \frac{M_0}{2K\alpha^2} \alpha y \operatorname{sh}\alpha y + \frac{T_0}{2K\alpha^3} (\operatorname{sh}\alpha y - \alpha y \operatorname{ch}\alpha y) \right] \sin \alpha x, \tag{4.3a}$$

$$\varphi_y = \alpha \left[\frac{1}{\alpha} W_p' + w_0 \left(\frac{1+\mu}{2} \operatorname{sh}\alpha y - \frac{1-\mu}{2} \alpha y \operatorname{ch}\alpha y \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\varphi_0}{\alpha} \operatorname{ch}\alpha y - \frac{M_0}{2K\alpha^2} (\alpha y \operatorname{ch}\alpha y + \operatorname{sh}\alpha y) - \frac{T_0}{2K\alpha^3} \alpha y \operatorname{sh}\alpha y \right] \sin \alpha x, \tag{4.3b}$$

$$M_y = -K\alpha^2 \left\{ \frac{1}{\alpha^2} W_p'' - \mu W_p - \frac{(1-\mu)^2}{2} w_0 \alpha y \operatorname{sh}\alpha y + \right.$$
$$+ (1 - \mu) \frac{\varphi_0}{\alpha} \operatorname{sh}\alpha y - \frac{M_0}{2K\alpha^2} [2\operatorname{ch}\alpha y + (1 - \mu)\alpha y \operatorname{sh}\alpha y)] - \tag{4.3c}$$
$$\left. - \frac{T_0}{2K\alpha^3} [(1 - \mu)\alpha y \operatorname{ch}\alpha y + (1 + \mu) \operatorname{sh}\alpha y] \right\} \sin \alpha x,$$

$$T_y = +2K\alpha^3\left(-\frac{1}{2\alpha^3}W_p''' + \frac{1}{2\alpha}W_p' + \frac{1-\mu}{2}w_0\,\mathrm{sh}\alpha y + \right.$$
$$\left. + \frac{M_0}{2K\alpha^2}\mathrm{sh}\alpha y + \frac{T_0}{2K\alpha^3}\mathrm{ch}\alpha y\right)\sin\alpha x, \tag{4.3d}$$

$$T_y^* = -K\alpha^3\left\{\frac{1}{\alpha^3}W_p''' - \frac{2-\mu}{\alpha}W_p' + \frac{1-\mu}{2}w_0[(1-\mu)\alpha y\,\mathrm{ch}\alpha y - \right.$$
$$- (3+\mu)\,\mathrm{sh}\alpha y] - (1-\mu)\frac{\varphi_0}{\alpha}\mathrm{ch}\alpha y + \frac{M_0}{2K\alpha^2}[(1-\mu)\alpha y\,\mathrm{ch}\alpha y - \tag{4.3e}$$
$$\left. - (1+\mu)\,\mathrm{sh}\alpha y] - \frac{T_0}{2K\alpha^3}[2\mathrm{ch}\alpha y - (1-\mu)\alpha y\,\mathrm{sh}\alpha y]\right\}\sin\alpha x.$$

Cele șase cazuri de rezemare, împreună cu condițiile la limită pe laturile $y = 0$ și $y = b$ au fost trecute în figura 2. Indicele b precizează valorile pe latura $y = b$. Așa cum s-a menționat în introducere, din condițiile pe latura $y = 0$ sînt precizați doi dintre parametrii inițiali.

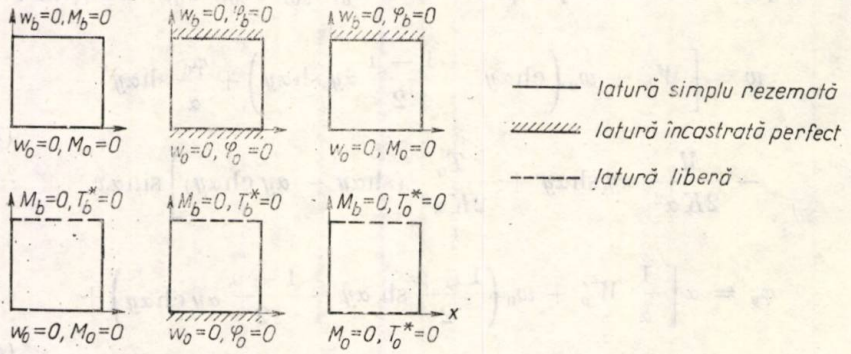


Fig. 2

În cazul laturii libere, din condiția de forță tăietoare generalizată nu rezultă direct unul dintre parametri, ci se obține o relație între parametri; de aceea, în cazul în care placa are o singură latură liberă, va fi mai avantajos ca aceasta să fie aleasă astfel încît să-i corespundă ecuația $y = b$.

5. EXEMPLU DE APLICARE

Vom exemplifica relațiile precedente pentru cazul plăcii dreptunghiulare simplu rezemată pe cele patru laturi, încărcată cu sarcină uniform distribuită pe toată suprafața p.

Vom conduce, în continuare, calculele pentru armonica de rang m, suprimînd indicele m. Ținînd seama de condițiile de rezemare pe latura $y = 0$, putem lua

$$w_0 = 0 \text{ și } M_0 = 0. \tag{5.1}$$

Cu acestea, expresiile lui w și M_y date de (4.3a), respectiv (4.3c) se reduc la următoarele:

$$w = \left[W_p + \frac{\varphi_0}{\alpha} \operatorname{sh}\alpha y + \frac{T_0}{2K\alpha^3}(\operatorname{sh}\alpha y - \alpha y \operatorname{ch}\alpha y) \right] \sin\alpha x, \tag{5.2a}$$

$$M_y = -K\alpha^2 \left\{ \frac{1}{\alpha^2} W_p'' - \mu W_p + (1-\mu)\frac{\varphi_0}{\alpha} \operatorname{sh}\alpha y - \right.$$

$$\left. - \frac{T_0}{2K\alpha^3} [(1-\mu)\alpha y \operatorname{ch}\alpha y + (1+\mu)\operatorname{sh}\alpha y] \right\} \sin\alpha x. \tag{5.2b}$$

Parametrii φ_0 și T_0 urmează să fie determinați din condițiile

$$w_b = 0 \quad \text{și} \quad M_{yb} = 0 \quad \text{pentru} \quad y = b.$$

Aceste două condiții se scriu:

$$\frac{\varphi_0}{\alpha} \operatorname{sh}\alpha b + \frac{T_0}{2K\alpha^3}(\operatorname{sh}\alpha b - \alpha b \operatorname{ch}\alpha b) = -W_{pb},$$

$$(1-\mu)\frac{\varphi_0}{\alpha} \operatorname{sh}\alpha b - \frac{T_0}{2K\alpha^3}[(1-\mu)\alpha b \operatorname{ch}\alpha b + (1+\mu)\operatorname{sh}\alpha b] = -\frac{1}{\alpha^2} W_{pb}'' + \mu W_{pb}. \tag{5.3}$$

Ținînd seama că, pentru cazul de încărcare considerat — vezi relațiile (2.13) — avem

$$\frac{1}{\alpha^2} W_p'' - \mu W_p = \frac{Z}{2K\alpha^4}[(1-\mu)\alpha y \operatorname{sh}\alpha y + 2\mu(-1 + \operatorname{ch}\alpha y)],$$

rezultă rădăcinile sistemului (5.3):

$$\varphi_0 = \frac{Z}{2K\alpha^3} \frac{(\operatorname{ch}\alpha b - 1)(\operatorname{sh}\alpha b - \alpha b)}{\operatorname{sh}^2 \alpha b},$$

$$T_0 = \frac{Z}{\alpha} \frac{\operatorname{ch}\alpha b - 1}{\operatorname{sh}\alpha b}. \tag{5.4}$$

Cu aceste valori, expresiile (4.3) se scriu

$$w = \frac{Z}{2K\alpha^4}\left[1 - \operatorname{ch}\alpha y + \frac{1}{2}\alpha y \operatorname{sh}\alpha y + \frac{(\operatorname{ch}\alpha b - 1)(2\operatorname{sh}\alpha b - \alpha b)}{2\operatorname{sh}^2\alpha b}\operatorname{sh}\alpha y - \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{ch}\alpha b - 1}{2\operatorname{sh}\alpha b}\alpha y \operatorname{ch}\alpha y\right]\sin\alpha x,$$

$$\varphi_y = \frac{Z}{2K\alpha^3}\left[\frac{(\operatorname{ch}\alpha b - 1)(\operatorname{sh}\alpha b - \alpha b)}{\operatorname{sh}^2\alpha b}\operatorname{ch}\alpha y - \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{ch}\alpha b - 1}{\operatorname{sh}\alpha b}\alpha y \operatorname{sh}\alpha y - \operatorname{sh}\alpha y + \alpha y \operatorname{ch}\alpha y\right]\sin\alpha x, \tag{5.5}$$

$$M_y = \frac{Z}{\alpha^2}\left\{-2\mu(\operatorname{ch}\alpha y - 1) - (1-\mu)\alpha y \operatorname{sh}\alpha y + (1-\mu)\frac{\operatorname{ch}\alpha b - 1}{\operatorname{sh}\alpha b}\alpha y \operatorname{ch}\alpha b + \right.$$

$$\left. + \frac{(\operatorname{ch}\alpha b - 1)[(1-\mu)\alpha b + 2\mu \operatorname{sh}\alpha b]}{\operatorname{sh}^2\alpha b}\operatorname{sh}\alpha y\right\}\sin\alpha x,$$

$$T_y = -\frac{Z}{\alpha}\left(\operatorname{sh}\alpha y + \frac{\operatorname{ch}\alpha b - 1}{\operatorname{sh}\alpha b}\operatorname{ch}\alpha y\right)\sin\alpha x.$$

★

Putem regăsi rezultatele precedente prin metoda directă, plecînd de la expresiile (3.7).

De data aceasta se consideră, pentru soluţia particulară, expresia (2.14). Lucrînd pentru termenul general şi suprimînd indicele m, din condiţiile la limită se obţine următorul sistem de ecuaţii

$$W_p + A = 0,$$

$$-\mu W_p + 2D + (1-\mu)A = 0,$$

$$W_p - W_p \operatorname{ch}\alpha b + B\alpha b \operatorname{ch}\alpha b + C \operatorname{sh}\alpha b + \frac{1}{2}W_p \alpha b \operatorname{sh}\alpha b = 0,$$

$$-\mu W_p + \mu W_p \operatorname{ch}\alpha b + (1-\mu)B\alpha b \operatorname{ch}\alpha b + 2B \operatorname{sh}\alpha b + (1-\mu)C \operatorname{sh}\alpha b +$$

$$+ \frac{1-\mu}{2}W_p \alpha b \operatorname{sh}\alpha b = 0.$$

Rădăcinile sistemului sînt următoarele:

$$A = -W_p;\ B = -W_p \frac{\mathrm{ch}\alpha b - 1}{2\,\mathrm{sh}\alpha b},$$

$$C = W_p \frac{(\mathrm{ch}\alpha b - 1)(2\mathrm{sh}\alpha b - \alpha b)}{2\,\mathrm{sh}^2\alpha b};\ D = \frac{1}{2} W_p.$$

Ducînd aceste expresii în relațiile (3.7), regăsim aceleași expresii obținute precedent prin metoda parametrilor inițiali.

★

Soluția generală poate fi scrisă reintroducînd indicele m și semnul Σ. Ținînd seama că (2.12) mai poate fi scris sub forma

$$Z_m = \frac{4p}{a} \frac{a}{m\pi} = \frac{4p}{a\alpha_m},$$

expresia săgeților w, dată de prima relație (5.5) devine:

$$w = \frac{p}{Ka} \sum_m \frac{1}{\alpha_m^5} \Big[2(1 - \mathrm{ch}\alpha_m y) + \alpha_m y\,\mathrm{sh}\alpha_m y +$$

$$+ \frac{(\mathrm{ch}\alpha_m b - 1)(2\mathrm{sh}\alpha_m b - \alpha_m b)}{\mathrm{sh}^2\alpha_m b} \mathrm{sh}\alpha_m y -$$

$$- \frac{\mathrm{ch}\alpha_m b - 1}{\mathrm{sh}\alpha_m b} \alpha_m y\,\mathrm{ch}\,\alpha_m y \Big] \sin\alpha_m x$$

și expresii analoage pentru celelalte mărimi.

6. OBSERVAȚII FINALE. CONCLUZII

În studiul de față ne-am propus extinderea metodei parametrilor inițiali, aplicată în alte domenii ale mecanicii construcțiilor, și în cazul plăcilor plane dreptunghiulare. Metoda prezintă avantajul că din cei patru parametri care intervin pentru fiecare rang m al soluției prin serii simple trigonometrice, doi sînt determinați de la început.

Metoda este susceptibilă de aplicații foarte variate cum ar fi: încărcarea plăcii cu o sarcină liniară paralelă cu una din laturi, prezența unei fisuri pătrunse la o placă de beton armat prefabricat, determinarea momentelor pe reazeme la plăci continui, calculul plăcilor ortotrope dreptunghiulare și al structurilor care pot fi asimilate cu acestea (rețele dese de grinzi, structuri spațiale planare), plăci inelare, etc.

Primită la redacție la 15 aprilie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. C. AVRAM, I. MUNTEANU, *Dinamica construcțiilor*, Institutul Politehnic Timișoara, 1965, p. 101—107.
2. A. A. BELEȘ, R. P. VOINEA, *Rezistența materialelor II. Pentru ingineri constructori*, Edit. tehnică, București, 1958, p. 123—128.
3. M. M. FILONENCO-BORODICI, S. M. IZIUMOV, B. A. OLISOV, I. N. CUDRIAVȚEV, L. I. MALGHINOV, *Curs de Rezistența materialelor. P. II* (trad. din l. rusă), Edit. tehnică, București, 1952.
4. J. E. GOLDBERG, J. L. BOGDANOFF, D. W. ALSPAUGH, *Stresses in Spherical Domes under Arbitrary Loading Including Thermal and Shrinkage Effects. Non-Classical Shell Problems*, Proceedings of the I.A.S.S.—Symposium, Warsaw, September 2—5, 1963. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1964, p. 116—135.
5. V. KOLOUŠEK, *Dynamik der Baukonstruktionen*, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1962, p. 167—170.
6. M. SIMONICI, *Dinamica construcțiilor*, Edit. tehnică, București, 1957.
7. N. K. SNITKO, *Dinamica construcțiilor* (trad. din l. rusă), Edit. tehnică, București, 1962, p. 219—229.
8. M. V. SOARE, *Plăci plane* (Secțiunea VI din *Manual pentru calculul construcțiilor*). Ed. a 2-a, Edit. tehnică, București, 1977.
9. M. V. SOARE, *Rezistența materialelor. Curs și aplicații. Vol. 1, 2*, Institutul de construcți București, 1979.

INCLUDEREA EFECTULUI FORȚELOR TĂIETOARE ÎN MATRICELE ELEMENTULUI DE PLACĂ RECTANGULARĂ

de G. ONU

Institutul de proiectări transporturi auto, navale și aeriene

Pentru un element de placă rectangulară, cu patru noduri de conexiune, se prezintă un procedeu cu ajutorul căruia se poate determina matricea de rigiditate, matricea maselor echivalente și matricea de rigiditate corespunzătoare cazului de rezemare a plăcii pe un mediu elastic, caracterizat prin doi parametri, luînd în considerație și contribuția forțelor tăietoare. Pentru aceasta, se cuplează o funcție de corecție a săgeților cu funcțiile de interpolare a rotirilor provocate numai de acțiunea forțelor tăietoare.

INTRODUCERE

Teoria clasică facilitează simplificarea calculului plăcilor plane subțiri, reducînd problema inițial tridimensională, la una în două dimensiuni, în care deplasările sînt studiate numai pentru suprafața mediană a plăcii. Aceasta se realizează admițîndu-se că pe grosimea plăcii deformațiile specifice și eforturile unitare variază liniar. Ipoteza Love-Kirchhoff, potrivit căreia normalele la suprafața mediană rămîn drepte și normale la aceasta și după deformarea plăcii, permite ca rotirile secțiunilor să se exprime numai în funcție de derivata deplasării transversale. În acest fel, săgeata plăcii constituie singurul parametru variabil al problemei. Prin adoptarea acestei ipoteze se elimină apriori influența forței tăietoare asupra deformațiilor plăcii. Din acest motiv săgețile din teoria clasică sînt întotdeauna mai mici decît cele reale, iar frecvențele proprii ale plăcii sînt mai mari decît cele obținute luînd în considerație efectul combinat al forței tăietoare și inerției de rotație.

Încercări de a corecta teoria clasică și ecuațiile de bază ale plăcilor plane subțiri, pentru a introduce efectul forței tăietoare, au fost prezentate în [4, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 24, 30, 31, 33]. Dintre acestea, teoriile lui Reissner și Mindlin și-au găsit o largă aplicare în metoda elementului finit, aflîndu-se la originea formulării unei mari varietăți de elemente cu grosime medie. Astfel, pe baza principiului variațional al lui Reissner au fost obținute modele mixte sau hibride ale căror necunoscute nodale sînt fie eforturi, fie deplasări, fie eforturi și deplasări [32]. Modelele hibride formulate pe baza unui cîmp interior de eforturi și a unui cîmp-deplasare de contur s-au dovedit a fi printre cele mai bune elemente de placă [3].

Pe baza teoriei lui Mindlin au fost formulate atît elemente hibride [29], cît și elemente finite de tip deplasare [6, 8, 9, 20, 25, 35]. În cazul modelelor-deplasare, prin adoptarea unor cîmpuri independente pentru deplasări și rotiri s-a eliminat necesitatea asigurării continuității derivatelor, o dată cu aceasta, fiind eliminat și principalul obstacol din calea formulării unor elemente complete și conforme [5, 36]. Prin utilizarea tehnicei izoparametrice, împreună cu procedee restrictive de integrare numerică pentru determinarea rigidităților, s-au obținut mai multe elemente finite destinate plăcilor subțiri sau cu grosime medie. Însă, după cum rezultă din [7, 23, 29], aceste elemente nu sînt întotdeauna „sigure". În anumite condiții, dacă se micșorează grosimea plăcii se produce o

rigidizare artificială a acesteia, fenomen pus pe seama activării excesive a modurilor caracteristice forțelor tăietoare.

În cele ce urmează se prezintă un procedeu care poate fi o alternativă la metodele bazate pe utilizarea unor cîmpuri independente pentru săgeți și rotiri. Procedeul prezentat are la bază metoda lui Donnell [4] de îmbunătățire a soluției furnizate de teoria clasică. Aplicabilă mai ales în cazurile în care erorile de deformare au prima importanță, metoda [4] realizează ameliorarea soluției clasice prin adăugarea unei corecții reprezentînd contribuția forțelor tăietoare. În fapt, această metodă constituie pentru teoria plăcilor, echivalentul procedeului folosit de Timoshenko pentru a introduce efectul forței tăietoare și al inerției de rotație la calculul grinzilor.

După cum sugerează metoda amintită, în procedeul prezentat aici se ia în considerație o funcție de corecție care se adaugă la polinomul de interpolare a deplasărilor elementului finit de placă subțire. În plus, conform cu teoria lui Reissner, se introduc cîmpuri distincte pentru a reprezenta rotirile produse de acțiunea forțelor tăietoare. Deoarece în realitate săgețile și rotirile produse de acțiunea forțelor tăietoare nu sînt independente, aceste cîmpuri trebuie cuplate cu funcția de corecție a săgeților. Această cuplare se realizează prin intermediul parametrilor care caracterizează gradele de libertate aferente funcțiilor de formă. De fapt procedeul prezentat aici constituie o extindere a procedeului pe baza căruia în [19] au fost determinate matricele de rigiditate și matricea maselor echivalente pentru un element de grindă încovoiată.

În continuare va fi descris unul din cele mai simple elemente de placă de grosime medie, un model rectangular cu patru noduri, pentru care se va prezenta matricea de rigiditate și matricea maselor echivalente. De asemenea, se va descrie modul în care se poate obține matricea de rigiditate a elementului în ipoteza rezemării plăcii pe un mediu elastic caracterizat prin doi parametri.

Problema plăcilor rezemate pe o fundație de tip „generalizată" se găsește tratată în [1, 14, 18, 28, 34].

IPOTEZE DE BAZĂ

1. Deplasările laterale ale plăcii sînt mici.

2. Grosimea plăcii nu se modifică prin deformare.

3. În cursul deformării plăcii, dreptele perpendiculare pe suprafața mediană rămîn drepte, dar nu neapărat perpendiculare pe aceasta.

Ipoteza de la punctul 3 introduce o aproximație. Așa cum rezultă din figura 1, rotirile produse de forțele tăietoare produc o anumită distorsionare a secțiunilor. În consecință, unghiurile notate cu θx și θy trebuie privite ca rotiri medii provocate de acțiunea forțelor tăietoare. Pentru a lua în considerație faptul că distribuția eforturilor unitare corespunzătoare pe grosimea plăcii este în realitate diferită de cea sugerată de rotirile θx și θy, în calcul se va introduce un coeficient de ajustare.

REPREZENTAREA DEPLASĂRILOR

Considerîndu-se că planul median al plăcii se găsește situat în planul XOY (fig. 2), deplasările independente ale plăcii se pot exprima simbolic prin relația

$$\begin{bmatrix} W \\ Sx \\ Sy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Nw \\ Nsx \\ Nsy \end{bmatrix} [u], \tag{1}$$

în care W reprezintă săgețile totale ale plăcii, iar Sx și Sy sînt rotirile provocate numai de acțiunea forțelor tăietoare.

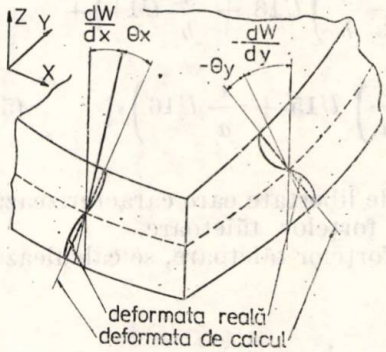


Fig. 1. — Efectul forțelor tăietoare.

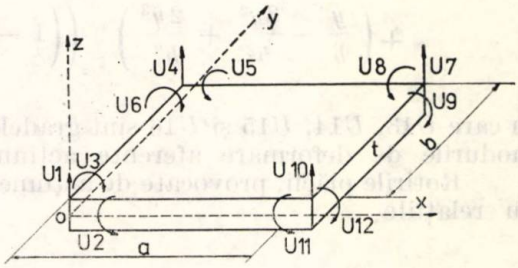


Fig. 2. — Element de placă cu 12 grade de libertate.

În relația (1) au fost folosite notațiile:

$$\begin{aligned} u &= [U1,\ U2,\ .\ ,\ U12,\ U13,\ U14,\ U15,\ U16]^r, \\ Nw &= [N1,\ N2,\ .\ ,\ N12,\ N13,\ N14,\ N15,\ N16], \\ Nsx &= [0\ ,\ 0\ ,\ .\ ,\ 0\ ,\ N17,\ N18,\ 0\ ,\ 0], \\ Nsy &= [0\ ,\ 0\ ,\ .\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ N19,\ N20]. \end{aligned} \tag{2}$$

Aici $U1$, $U2$, $U16$ reprezintă gradele de libertate ale modelului, iar $N1$, $N2$, $N20$ constituie funcțiile de formă aferente.

$$W = Nw\ u, \tag{3}$$

polinomul de interpolare a săgeților, poate fi scris astfel

$$W = W_b + W_t = [Nw_b,\ Nw_t] \begin{bmatrix} u_b \\ u_t \end{bmatrix}, \tag{4}$$

în care

$$W_b = Nw_b\ u_b \tag{4'}$$

reprezintă cîmpul deplasărilor elementului de placă subțire, iar

$$W_t = Nw_t\, u_t \qquad (4'')$$

constituie funcția de corecție prin care se introduce efectul forțelor tăietoare asupra deformațiilor transversale.

Pentru modelul prezentat aici, funcția de bază a deplasărilor W_b este constituită din funcțiile de formă ale elementului de placă subțire *ACM* [2, 16, 36], iar vectorul u_b are drept componente deplasările nodurilor de la colțurile elementului (fig. 2).

Funcția de corecție W_t are următoarea alcătuire:

$$W_t = \left(-\frac{x}{a} + \frac{3x^2}{a^2} - \frac{2x^3}{a^3}\right)\left(\left(1 - \frac{y}{b}\right)U13 + \frac{y}{b}U14\right) +$$

$$+\left(\frac{y}{b} - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{2y^3}{b^3}\right)\left(\left(1 - \frac{x}{a}\right)U15 + \frac{x}{a}U16\right), \qquad (5)$$

în care $U13$, $U14$, $U15$ și $U16$ sînt gradele de libertate care caracterizează modurile de deformare aferente acțiunii forțelor tăietoare.

Rotirile plăcii, provocate de acțiunea forțelor tăietoare, se calculează cu relațiile

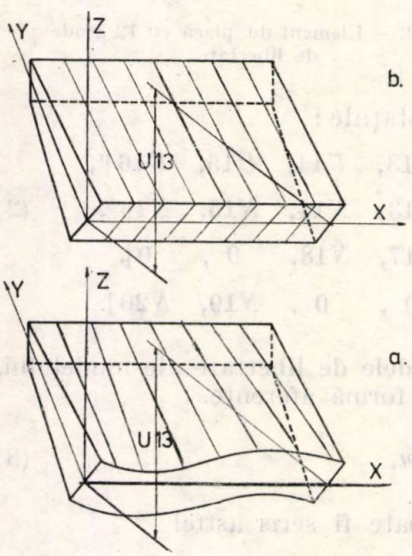


Fig. 3. — Moduri de deformare caracteristice forțelor tăietoare și încovoierii aferente.

$$Sx = \left(-\frac{1}{a} + \frac{y}{ab}\right)U13 - \frac{y}{ab}U14,$$

$$Sy = \left(\frac{1}{b} - \frac{x}{ab}\right)U15 + \frac{x}{ab}U16. \qquad (6)$$

După cum rezultă din relațiile (2), (5) și (6), funcțiile de formă $N13$, $N14$, ... $N20$ sînt cuplate două cîte două, fiecare pereche fiind caracterizată prin același parametru. Pentru exemplificare, în figura 3 sînt arătate modurile de deformare aferente gradului de libertate $U13$.

Rotirile totale după cele două direcții, ale normalelor la suprafața mediană a plăcii, sînt

$$\begin{bmatrix}\theta x\\ \theta y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\partial W/\partial x + Sx\\ \partial W/\partial y + Sy\end{bmatrix}, \qquad (7)$$

în care W, Sx și Sy sînt date de relațiile (4) și (6).

RELAȚIA EFORTURI-DEPLASĂRI

Deformațiile generalizate ale plăcilor de grosime medie pot fi reprezentate simbolic prin egalitatea

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_b \\ \varepsilon_t \end{bmatrix}, \tag{8}$$

în care

$$\varepsilon_b = -z \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \dfrac{\partial Sx}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \dfrac{\partial Sy}{\partial y} \\ \dfrac{2\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial Sx}{\partial y} + \dfrac{\partial Sy}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{9'}$$

reprezintă relația dintre deformații și curburile plăcii produse de acțiunea momentelor și a forțelor tăietoare;

$$\varepsilon_t = \begin{bmatrix} Sx \\ Sy \end{bmatrix} \tag{9''}$$

reprezintă deformațiile unghiulare provocate de acțiunea forțelor tăietoare.

Ținînd seama de (1), (9') și (9''), relația (8) se rescrie astfel

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -z\left(\dfrac{\partial^2 Nw}{\partial x^2} + \dfrac{\partial Nsx}{\partial x}\right) \\ -z\left(\dfrac{\partial^2 Nw}{\partial y^2} + \dfrac{\partial Nsy}{\partial y}\right) \\ -z\left(\dfrac{2\partial^2 Nw}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial Nsx}{\partial y} + \dfrac{\partial Nsy}{\partial x}\right) \\ Nsx \\ Nsy \end{bmatrix} = Bu. \tag{10}$$

Matricea B, cu dimensiuni 5×16, realizează transformarea deplasărilor nodale în deformații specifice.

Dacă se notează cu $\bar{E}$ matricea constantelor elastice ale plăcii cu ortotropie de material, eforturile unitare se calculează astfel:

$$\sigma = \bar{E} = \bar{E}Bu. \tag{11}$$

În relaţia (11),

$$\sigma = [\sigma x,\ \sigma y,\ \tau xy,\ \tau yz,\ \tau xz]^r, \tag{12}$$

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} Ex & El & & & \\ El & Ey & & & \\ & & G & & \\ & & & Gyz & \\ & & & & Gxz \end{bmatrix}. \tag{13}$$

În cazul izotropiei,

$$G = E / 2(1 + \nu),\ Gyz = Gxz \text{ şi}$$

$$Ex = Ey = El / \nu = E / (1 - \nu^2), \tag{14}$$

E fiind modulul de elasticitate, iar ν constanta lui Poisson.

MATRICEA DE RIGIDITATE

Ţinînd seama de relaţiile (2) şi (10), este convenabil să se rescrie matricea B sub forma

$$B = \begin{bmatrix} z\,I3 & 0 \\ 0 & I2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_b & B_c \\ 0 & B_t \end{bmatrix}, \tag{15}$$

în care In este matricea unitate $(n \times n)$, iar B_b reprezintă matricea care pune în relaţie curburile cu deplasările nodale ale elementului de placă subţire.

Submatricele B_c şi B_t, care introduc efectul deplasărilor produse de forţele tăietoare, au următoarea alcătuire:

$$B_c = -z \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 N13}{\partial x^2} + \dfrac{\partial N17}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 N13}{\partial y^2} & & \dfrac{2\partial^2 N13}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial N17}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 N14}{\partial x^2} + \dfrac{\partial N18}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 N14}{\partial y^2} & & \dfrac{2\partial^2 N14}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial N18}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 N15}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 N15}{\partial y^2} + \dfrac{\partial N19}{\partial y} & & \dfrac{2\partial^2 N15}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial N19}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 N16}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 N16}{\partial y^2} + \dfrac{\partial N20}{\partial y} & & \dfrac{2\partial^2 N16}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial N20}{\partial x} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$B_t = \begin{bmatrix} N17 & N18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N19 & N20 \end{bmatrix}.$$

Cunoscînd matricea de transformare a deplasărilor în deformații specifice, matricea de rigiditate a elementului finit se calculează cu relația standard :

$$\bar{K}_p = \int B^r \bar{E} B \mathrm{d}v. \tag{17}$$

Înlocuind pe B din (15), se obține următoarea expresie pentru matricea de rigiditate a elementului de placă :

$$\bar{K}_p = \iint \begin{bmatrix} B_b & B_c \\ 0 & B_t \end{bmatrix}^r \left(\int \begin{bmatrix} zI3 & 0 \\ 0 & I2 \end{bmatrix} \bar{E} \begin{bmatrix} zI3 & 0 \\ 0 & I2 \end{bmatrix} \mathrm{d}z \right) \begin{bmatrix} B_b & B_c \\ 0 & B_t \end{bmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{18}$$

Paranteza interioară din (18) furnizează după integrare matricea rigidităților elastice ale elementului de placă cu grosime medie :

$$D = \int \begin{bmatrix} zI3 & 0 \\ & \\ 0 & I2 \end{bmatrix} \bar{E} \begin{bmatrix} zI3 & 0 \\ & \\ 0 & I2 \end{bmatrix} \mathrm{d}z = \begin{bmatrix} \dfrac{t^3}{12} I3 & 0 \\ 0 & tI2 \end{bmatrix} \bar{E}. \tag{19}$$

Pentru a ține seama de distribuția neuniformă pe înălțimea secțiunii, a eforturilor produse de forțele tăietoare, se introduce un coeficient de ajustare n. În cazul unui material izotrop $n = 5/6$. Ținînd seama de aceasta, matricea rigidităților elastice se poate scrie astfel :

$$D = \begin{bmatrix} D_i & 0 \\ 0 & nD_t \end{bmatrix}, D_i = \begin{bmatrix} Dx & D1 & \\ D1 & Dy & \\ & & G \end{bmatrix}, \quad nD_t = \begin{bmatrix} Tx & 0 \\ 0 & Ty \end{bmatrix}, \tag{20}$$

în care D_i este matricea rigidităților elastice la încovoiere, iar nD_t reprezintă matricea rigidităților elastice la tăiere.

Cu notațiile de mai înainte, matricea de rigiditate a elementului de placă cu grosime medie devine :

$$\bar{K}_p = \iint \begin{bmatrix} B_b^r & D_i & B_b & & B_b^r & D_i & B_b \\ (B_b^r & D_i & B_c)^r & & (B_c^r & D_i + nB_t^r & D_t) & B_c \end{bmatrix} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y. \tag{21}$$

Efectuînd integralele, se obține o matrice de rigiditate (16×16) care poate fi partiționată astfel :

$$\bar{K}_p = \begin{bmatrix} K11 & K21 \\ K21 & K22 \end{bmatrix}^r. \tag{22}$$

Submatricea $K11$ din (22) reprezintă matricea de rigiditate a elementului de placă subțire [2, 22, 36].

Elementele nenule care intră în componența submatricei $K21$ sînt următoarele :

$$k(13,1) = k(14,4) = -k(14,7) = -k(13,10) =$$

$$= -4\,H^2 Dx - D1 + \frac{6}{5}\,Dxy,$$

$$k(13,2) = -k(14,5) = k(14,8) = -k(13,11) = -D1\,b,$$

$$k(13,3) = k(14,6) = k(14,9) = k(13,12) =$$

$$= 2\,H^2\,Dx\,a + \frac{2}{5}\,Dxy\,a,$$

$$k(14,1) = k(13,4) = -k(13,7) = -k(14,10) =$$

$$= -2\,H^2 Dx + D1 - \frac{6}{5}\,Dxy,$$

$$k(14,3) = k(13,6) = k(13,9) = k(14,12) =$$

$$= H^2 Dx\,a - \frac{2}{5}\,Dxy\,a,$$

$$k(15,1) = -k(15,4) = -k(16,7) = k(16,10) =$$

$$= 4\,H^{-2} Dy + D1 - \frac{6}{5}\,Dxy,$$

$$k(16,1) = -k(16,4) = -k(15,7) = k(15,10) =$$

$$= 2\,H^{-2}\,Dy - D1 + \frac{6}{5}\,Dxy,$$

$$k(15,2) = k(15,5) = k(16,8) = k(16,11) =$$

$$= 2\,H^{-2} Dy\,b + \frac{2}{5}\,Dxy\,b,$$

$$k(16,2) = k(16,5) = k(15,8) = k(15,11) =$$

$$= H^{-2} Dy\,b - \frac{2}{5}\,Dxy\,b,$$

$$k(15,3) = -k(15,6) = k(16,9) = -k(16,12) = -D1\,a. \qquad (23)$$

În relațiile (23) a fost folosită notația $H = b / a$.

Matricea de rigiditate redusă (12×12), matrice care include și contribuția forței tăietoare, se obține eliminînd gradele de libertate interioare prin transformarea

$$K_p = R^r \, \overline{K}_p R, \tag{24}$$

în care matricea R are următoarea alcătuire :

$$R = [I12, \quad -K12 \quad K22^{-1}]^r. \tag{25}$$

În relația (25) intervine inversa submatricei $K22$ din (22), care se poate scrie astfel :

$$K22^{-1} = \frac{1}{A6} \begin{bmatrix} C1 & C2 & C3 & C4 \\ C2 & D2 & D3 & D4 \\ C3 & D3 & E3 & E4 \\ C4 & D4 & E4 & G4 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Au fost folosite notațiile :

$$\begin{aligned}
C1 &= D2 = (A1(A3 - A4) - 2\,A5^2) / (A1 + A2), \\
C2 &= -(A2(A3 - A4) + 2\,A5^2) / (A1 + A2), \\
E3 &= G4 = (A3(A1 - A2) - 2\,A5^2) / (A3 + A4), \\
E4 &= -(A4(A1 - A2) + 2\,A5^2) / (A3 + A4), \\
C3 &= -C4 = -D3 = D4 = A5, \\
A1 &= 4\,H^2\,Dx + \frac{9}{5}\,Dxy + \frac{H}{3}\,Tx, \\
A2 &= 2\,H^2 Dx - \frac{9}{5}\,Dxy, \\
A3 &= 4\,H^{-2}Dy + \frac{9}{5}\,Dxy + \frac{H^{-1}}{3}\,Ty, \\
A4 &= 2\,H^{-2}Dy - \frac{9}{5}\,Dxy, \\
A5 &= D1 + Dxy, \\
A6 &= (A1 - A2)(A3 - A4) - 4\,A5^2, \\
H &= b / a.
\end{aligned} \tag{27}$$

MATRICEA MASELOR ECHIVALENTE

Dacă se ia în considerație, pe lîngă inerția de translație, efectul inerției de rotație, matricea maselor echivalente a unui element de placă, avînd grosimea t și greutatea specifică ρ, se calculează astfel [22]:

$$\widetilde{M} = \rho t \iint N w_b^r \, N w_b \, dx \, dy + \frac{\rho t^3}{12} \left(\iint \frac{\partial N w_b^r}{\partial x} \, \frac{\partial N w_b}{\partial x} \, dx dy + \right.$$

$$\left. + \iint \frac{\partial N w_b^r}{\partial y} \, \frac{\partial N w_b}{\partial y} \, dy dy \right). \tag{28}$$

Luînd în considerație și aportul forțelor tăietoare, relația (28) devine:

$$\overline{M} = \rho t \iint N w^r \, N w \, dx \, dy + \frac{\rho t^3}{12} \left(\iint \left[\frac{\partial N w}{\partial x} + N sx \right]^r \left[\frac{\partial N w}{\partial x} + N sx \right] dx \, dy + \right.$$

$$\left. + \iint \left[\frac{\partial N w}{y} + N sy \right]^r \left[\frac{\partial N w}{y} + N sy \right] dx \, dy \right). \tag{29}$$

După efectuarea integrării și gruparea termenilor, matricea $\overline{M}$ (16×16) se poate împărți în patru blocuri:

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} M11 & M21^r \\ M21 & M22 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Blocul $M11$ reprezintă matricea convențională a maselor echivalente, cu dimensiuni 12×12 (fără aportul forțelor tăietoare):

$$M11 = \widetilde{M} = \rho t \, M11_t + \frac{\rho t^3}{12} M11_r. \tag{31}$$

În (31), termenul $\rho t \, M11_t$ reprezintă contribuția inerției de translație. Această matrice, derivată în mod explicit, este prezentată în [21, 22] și, reprodusă după Dawe, în [36].

În cele ce urmează matricea $\overline{M}$ este prezentată în întregime.

$M11 =$

$$= \begin{bmatrix}
C1 & & & & & & & & & & & \\
C2 & D2 & & & & & & & & & & \\
C3 & D3 & E3 & & & & & & & & & \\
C4 & D4 & E4 & C1 & & & & & & & & \\
C5 & D5 & E5 & -C2 & D2 & & & & & & & \\
C6 & D6 & E6 & C3 & -D3 & E3 & & & & & & \\
C7 & D7 & E7 & G1 & -F1 & H1 & C1 & & & & & \\
C8 & D8 & E8 & -G2 & F2 & -H2 & -C2 & D2 & & & & \\
C9 & D9 & E9 & G3 & -F3 & H3 & -C3 & D3 & E3 & & & \\
G1 & F1 & H1 & C7 & -D7 & E7 & C4 & -D4 & -E4 & C1 & & \\
G2 & F2 & H2 & -C8 & D8 & -E8 & -C5 & D5 & E5 & C2 & D2 & \\
G3 & F3 & H3 & C9 & -D9 & E9 & -C6 & D6 & E6 & -C3 & -D3 & E3
\end{bmatrix}. \tag{32}$$

SIMETRIC

Au fost folosite notațiile :

$$
\begin{aligned}
C1 &= 3454\,A + (11040\,/b^2 + 11040\,/a^2)C,\\
C2 &= 461\,A\,b + (840\,/b + 1320\,b/a^2)C,\\
C3 &= -461\,A\,a - (1320\,a/b^2 + 840\,/a)C,\\
C4 &= 1226\,A - (11040\,/b^2 - 4080\,/a^2)C,\\
C5 &= -274\,A\,b + (840\,/b - 780\,b/a^2)C,\\
C6 &= -199\,A\,a + (1320\,a/b^2 - 420\,/a)C,\\
C7 &= 394\,A - (4080\,/b^2 + 4080\,/a^2)C,\\
C8 &= -116\,A\,b + (420\,/b + 780\,b/a^2)C,\\
C9 &= 116\,A\,a - (780\,a/b^2 + 420\,/a)C,\\
G1 &= 1226\,A + (4080\,/b^2 - 11040\,/a^2)C,\\
G2 &= 199\,A\,b + (420\,/b - 1320\,b/a^2)C,\\
G3 &= 274\,A\,a + (780\,a/b^2 - 840\,/a)C,\\
D2 &= 80\,A\,b^2 + (1120 + 240\,b/a^2)C,\\
D3 &= -63\,A\,a\,b,\\
D4 &= 274\,A\,b - (840 - 780\,b/a^2)C,\\
D5 &= -60\,A\,b^2 - (280 + 180\,b^2/a^2)C,\\
D6 &= -42\,A\,a\,b,\\
D7 &= 116\,A\,b - (420\,/b + 780\,b\,/a^2)C,\\
D8 &= -30\,A\,b^2 - (140 - 180\,b^2/a^2)C,\\
D9 &= 28\,A\,a\,b,\\
F1 &= 199\,A\,b + (420\,/b - 1320\,b\,/a^2)C,\\
F2 &= 40\,A\,b^2 + (560 - 240\,b^2/a^2)C,\\
F3 &= 42\,A\,a\,b,\\
E3 &= 80\,A\,a^2 + (240\,a^2/b^2 + 1120)C,\\
E4 &= -199\,A\,a + (1320\,a\,/b^2 - 420\,/a)C,\\
E5 &= 42\,A\,a\,b,\\
E6 &= 40\,A\,a^2 - (240\,a^2/b^2 - 560)C,\\
E7 &= -116\,A\,a + (780\,a\,/b^2 + 420\,/a)C,\\
E8 &= 28\,A\,a\,b,\\
E9 &= -30\,A\,a^2 + (180\,a^2/b^2 - 140)C,\\
H1 &= -274\,A\,a - (780\,a\,/b^2 - 840\,/a)C,\\
H2 &= -42\,A\,a\,b,\\
H3 &= -60\,A\,a^2 - (180\,a^2/b^2 + 280)C.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Submatricea $M21$:

$$M21 = \begin{bmatrix} G4 & F4 & H4 & G5 & -F5 & H5 & -G5 & F5 & H5 & -G4 & -F4 & H4 \\ G5 & F5 & H5 & G4 & -F4 & H4 & -G4 & F4 & H4 & -G5 & -F5 & H5 \\ G6 & F6 & H6 & -G6 & F6 & -H6 & G7 & F7 & H7 & G7 & F7 & -H7 \\ G7 & F7 & H7 & G7 & F7 & -H7 & -G6 & F6 & H6 & G6 & F6 & -H6 \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Au fost folosite notaţiile :

$$\begin{aligned}
G4 &= -187 + (7140 /a^2 - 540 /b^2)C, \\
F4 &= -21 A b + (1260 b/a^2)C, \\
H4 &= -20 A a + (840 /a + 60 a/b^2)C, \\
G5 &= -83 A + (2940 /a^2 + 540 /b^2)C, \\
F5 &= -14 A b + (840 b/a^2)C, \\
H5 &= 10 A a + (420 /a - 60 a/b^2)C, \\
G6 &= 187 A + (540 /a^2 - 7140 /b^2)C, \\
F6 &= 20 A b + (60 b/a^2 + 840 /b)C, \\
H6 &= -21 A a + (1260 a/b^2)C, \\
G7 &= 83 A b + (- 540 /a^2 - 2940 /b^2)C, \\
F7 &= 10 A a + (- 60 b/a^2 + 420 /b)C, \\
H7 &= -14 A + (840 a/b^2)C.
\end{aligned} \tag{35}$$

Submatricea $M22$:

$$M22 = \begin{bmatrix} G8 & G9 & H8 & -H8 \\ G9 & G8 & -H8 & H8 \\ H8 & -H8 & F8 & F9 \\ -H8 & H8 & F9 & F8 \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Au fost folosite notaţiile :

$$\begin{aligned}
G8 &= 40 A + (10080 /a^2 + 120 /b^2)C, \\
G9 &= 20 A + (5040 /a^2 - 120 /b^2)C, \\
H8 &= -7 A + (420 /a^2 + 420 /b^2)C, \\
F8 &= 40 A + (120 /a^2 + 10080 /b^2)C, \\
F9 &= 20 A - (120 /a^2 - 5040 /b^2)C.
\end{aligned} \tag{37}$$

Coeficienții A și C se calculează cu relațiile (38).

$$A = \rho t\, a\, b\ /25200,$$

$$C = \rho t^3 a\, b\ /302400. \tag{38}$$

În relațiile de mai sus a, b și t reprezintă dimensiunile elementului de placă (fig. 2), iar ρ greutatea specifică a materialului din placă.

Eliminînd gradele de libertate suplimentare se obține matricea maselor echivalente (12×12) în care este inclusă atît contribuția forței tăietoare, cît și efectul inerției de rotație. Prin urmare,

$$M = R^r \vec{M} R, \tag{39}$$

în care R este dat de (27).

PLACĂ REZEMATĂ PE MEDIU ELASTIC

Se consideră că elementul de placă reazemă pe un suport elastic caracterizat prin doi coeficienți de fundație. În aceste condiții, matricea de rigiditate a suportului elastic, din perimetrul de rezemare al elementului de placă, se poate determina scriind expresia energiei de deformație acumulată în mediul suport.

Reacțiunile mediului, pe un element mic al suprafeței de contact, se calculează cu relațiile

$$r_n = -k_n W \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$r_x = -k_t \left(\frac{\partial W}{\partial x} + Sx \right) t\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \tag{40}$$

$$r_y = -k_t \left(\frac{\partial W}{\partial y} + Sy \right) t\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

în care r_n reprezintă reacțiunea normală a mediului suport, reacțiune proporțională cu săgeata plăcii, iar r_x și r_y sînt reacțiuni tangențiale, reacțiuni proporționale cu rotirile totale ale plăcii. k_n și t_t sînt coeficienți de fundație cu dimensiuni de $\mathrm{F/L^3}$.

Energia de deformație înmagazinată în mediul suport se calculează astfel:

$$\Pi_f = \frac{k_n}{2} \iint W^r\, W\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \frac{k_t}{2} t^2 \left(\iint \left[\frac{\partial W}{\partial x} + Sx \right]^r \left[\frac{\partial W}{\partial x} + Sx \right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \right.$$

$$\left. + \iint \left[\frac{\partial W}{\partial y} + Sy \right]^r \left[\frac{\partial W}{\partial y} + Sy \right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \right). \tag{41}$$

Utilizînd, pentru definirea deplasărilor, polinoamele de interpolare ale elementului de placă subțire ACM împreună cu funcția de corecție

W_t (5) şi rotirile provocate de acţiunea forţelor tăietoare (6), energia de deformaţie se rescrie astfel:

$$\Pi_f = \frac{u^r}{2}\left\{k_n \iint Nw^r\, Nw\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + k_t t^2 \left(\iint \left[\frac{\partial Nw}{\partial x} + Nsx\right]^r \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left[\frac{\partial Nw}{\partial x} + Nsx\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \iint \left[\frac{\partial Nw}{\partial y} + Nsy\right]^r \left[\frac{\partial Nw}{\partial y} + Nsy\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\right)\right\} u. \tag{41'}$$

Conform definiţiei, termenii încadraţi între acolade în relaţia (41') reprezintă matricea de rigiditate aferentă mediului suport:

$$\Pi_f = u^r\, \bar{K}_f\, u. \tag{41''}$$

S-a obţinut astfel o matrice de rigiditate cu dimensiuni 16×16 care, în urma condensării, se transformă într-o matrice cu dimensiuni 12×12,

$$K_f = R^r\, \bar{K}_f\, R, \tag{42}$$

matrice raportată la aceleaşi grade de libertate ca şi rigidităţile elementului de placă (24). În aceste condiţii matricele din (24) şi (42) se pot însuma direct pentru a forma matricea de rigiditate a ansamblului format din elementul de placă plus mediul suport aferent:

$$K = K_p + K_f. \tag{43}$$

Comparînd termenul aflat între acolade în relaţia (41') cu membrul drept din (29), se vede că cele două expresii diferă numai prin semnificaţia constantelor din faţa semnelor de integrare. În consecinţă, matricea K_f se poate calcula cu relaţiile care furnizează matricea maselor echivalente înlocuind constantele A şi C din (38) prin

$$A = k_n ab/25200, \tag{44}$$

$$C = k_t t^2 ab/25200.$$

EXEMPLE NUMERICE

Elementul finit de placă de grosime medie prezentat anterior, va fi numit în continuare elementul ACM—S.

— Placă pătrată, încastrată pe contur, sub o sarcină uniform repartizată.

Figura 4 arată grafic rezultatele testului de convergenţă pentru elementele ACM şi $ACM—S$ cînd raportul dintre grosimea plăcii şi des-

chidere este 0,1. Axa orizontală indică numărul N de subdiviziuni pe sfert de placă. Axa verticală dă în procente abaterea de la valoarea exactă a săgeții din centrul plăcii. Valoarea de referință, pentru elementul

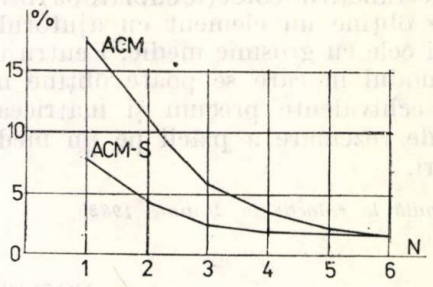


Fig. 4. — Variația erorilor săgeții în funcție de finețea discretizării.

$ACM-S$, este soluția plăcii de grosime $t = 0{,}1\ a$, în timp ce pentru elementul ACM este soluția plăcii subțiri. După cum se vede, rezultatele obținute cu elementul $ACM-S$ sînt mai bune decît cele obținute cu elementul ACM.

— Vibrațiile libere ale plăcii pătrate în diverse condiții de rezemare. Sînt luate în considerație două rapoarte t/a: 0,01 corespunzînd plăcii subțiri și 0,1 pentru placa de grosime medie. Placa este izotropă, iar coeficientul lui Poisson este egal cu 0,3. În tabelul dat mai jos sînt prezentate rezultatele obținute pentru frecvența fundamentală în funcție de parametrul Ω calculat cu

$$\Omega = p(2(1 + \nu)\rho a^2/E)^{\frac{1}{2}}.$$

De asemenea, în tabel sînt trecute rezultatele furnizate de teoria clasică [10] precum și rezultatele obținute în [26] pe baza teoriei lui Mindlin.

Pentru descrierea condițiilor de reazem se folosește următoarea notație: s = simpla rezemare, c = încastrare și f = latură liberă.

t/a	soluția	condiții de contur					
		cccc	*cccs*	*cscs*	*scss*	*cccf*	*scsf*
0,01	[10]	0,1758	0,1553	0,1413	0,1154	0,1171	0,0619
	ACM	0,1737	0,1541	0,1403	0,1146	0,1166	0,0619
	ACM-S	0,1738	0,1541	0,1402	0,1147	0,1166	0,0619
0,1	[26]	1,586	1,423	1,300	1,092	1,081	0,5982
	ACM−S	1,557	1,391	1,271	1,065	1,048	0,5806

Rezultatele obținute cu elementele ACM și $ACM-S$ în cazul teoriei clasice au aproximativ aceiași precizie ca rezultatele obținute cu elementul $ACM-S$ în cazul teoriei lui Mindlin.

CONCLUZII

Prin adăugarea, la polinomul de interpolare a elementului de placă subțire, a unei funcții de corecție cuplate cu rotirile provocate de forțele tăietoare, se poate obține un element cu ajutorul căruia pot fi calculate plăcile subțiri și cele cu grosime medie. Pentru un element de acest tip, s-a prezentat modul în care se poate obține matricea de rigiditate, matricea maselor echivalente precum și matricea de rigiditate corespunzătoare cazului de rezemare a plăcii pe un mediu elastic caracterizat prin doi parametri.

Primită la redacție la 2 iunie 1982

NOTAȚII

$N1, N2, .. N20$ = funcții de formă,
W = săgețile plăcii,
Sx, Sy = rotirile plăcii provocate de forțele tăietoare,
In = matrice unitate $n \times n$,
K = matrice de rigiditate,
M = matricea maselor echivalente,
B = matrice de transformare deplasări-deformații.

BIBLIOGRAFIE

1. A. BELEȘ și colab., *Calculul structurilor amplasate pe medii deformabile*, Edit. Academiei R.S. România, București, 1977.
2. R. W. CLOUGH, J. L. TOCHER, *Finite Element Stiffness Matrix for Analysis of Plate Bending*, WPAFBI Conf., p. 515—545, 1965.
3. R. COOK, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1974.
4. L. H. DONNELL, *Beams, Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1976.
5. R. H. GALLAGHER, *Finite Element Analysis — Fundamentals*, Prentice-Hall, New Jersey, 1975.
6. E. HINTON et al., *A Simple Finit Element Solution for Plates of Homogeneous, Sandwich and Cellular Construction*, Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2, 59, mar., p. 43—65 (1975).
7. E. HINTON, N. BIĆANIĆ, *A Comparison of Lagrangian and Serendipity Mindlin Plate Element for Free Vibration Analysis*, Computers & Structures, **10**, *3*, p. 483—493 (1979).
8. T. J. HUGHES, M. COHEN, *The Heterosis Finite Element for Plate Bending*, Computers & Structures, **9**, p. 445—450 (1978).
9. T. J. HUGHES et al., *A Simple and Efficient Element for Plate Bending*, Int. J. Num. Meth. Engng., **11**, p. 1529—43, (1977).
10. A. W. LEISSA, *The Free Vibration of Rectangular Plates*, J. Sound Vibration, **31**, p. 257—293 (1973).
11. C. LIBOVE, S. B. BATDORF, *A General Small-deflexion Theory for Flat Sandwich Plates*, TN1526, Nat. Adv. Com. Aero., 1948.
12. A. E. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publ., New York, 1927.
13. V. MANEA, *Cîteva probleme ale teoriei plăcilor plane elastice*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1966.
14. C. MANOLE, A. MANOLACHI, *Asupra plăcilor rezemate pe o fundație „generalizată"*, A IV-a conf. geotehnică, Iași, 1979.

15. P. MAZILU, H. SANDI, Dinamica construcțiilor, secțiunea IX din *Manual pentru calculul construcțiilor* (coord. : A. D. Caracostea) Edit. tehnică, București, 1975.
16. R. J. MELOSH, *Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method*, AIAA jrn., **1**, p. 1631—1637 (1963).
17. R. D. MINDLIN, *Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates*, J. Appl. Mech., **18**, p. 31—38 (1951).
18. M. MIȘICU, *Încovoiere și torsiune*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1973.
19. G. ONU, *Includerea efectului forței tăietoare în matricele elementului de grindă dreaptă*, St. cerc. mec. apl., **41**, *4*, p. 459—469 (1982).
— *Shear Effect in Beam Stiffness Matrix*, Journal of the Structural Division, ASCE, **108**, (1982) — sub tipar.
20. S. E. PAWSEY, R. W. CLOUGH, *Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements*, Int. J. Num. Meth. Engng., **3**, p. 545—586 (1971).
21. J. S. PRZEMIENIESKI, *Equivalent Mass Matrices for Rectangular Plates in Bending*, AIAA Jrn., **4**, p. 949—950 (1966).
22. J. S. PRZEMIENIESKI, *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1968.
23. E.D.L. PUGH et al., *A Study of Quadrilateral Plate-bending Elements with „reduced" Integration*, Int. J. Num. Meth. Engng., **12**, p. 1059—1079 (1978).
24. E. REISSNER, *The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates*, J. Appl. Mech., **12**, p. 69—77 (1945).
25. T. ROCK, E. HINTON, *A Finite Element Method for the Free Vibration of Plates Allowing for Transverse Shear Deformation*, Computers & Structures, **6**, p. 37—44 (1975).
26. O. L. ROUFAEIL, D. J. DAWE, *Vibration Analysis of Rectangular Mindlin Plates by Finite Strip Method*, Computers & Structures, **12**, p. 833—842 (1980).
27. H. SANDI, *Metode matriceale în mecanica structurilor*, Edit. tehnică, București, 1975.
28. M. SOARE, Plăci plane, secțiunea VI din *Manual pentru calculul construcțiilor* (coord. : A. D. Caracostea), Edit. tehnică, București, 1975.
29. R. L. SPILKER, N. I. MUNIR, *A Hybrid-stress Quadratic Serendipity Displacement Mindlin Plate Bending Element*, Computers & Structures, **12**, p. 11—21 (1980).
30. CR. STĂNESCU, V. VISARION, *Plăci plane nesubțiri*, St. cerc. mec. apl., **29**, *4*, 797—816 (1970).
31. S. P. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Teoria plăcilor plane și curbe*, Edit. tehnică, București, 1968.
32. H. TOTTENHAM, C. BREBBIA (eds), *Finite Element Techniques in Structural Mechanics*, Stress Analysis Publ., Southampton, 1970.
33. V. VLASOV, *Ob uravneniah teorii izghiba plastinoc*, Izv. An SSSR, OTN, **12** (1957).
34. T. Y. YANG, *A Finite Element Analysis of Plates on a Two-parameter Foundation Model*, Computer & Structures, **3**, p. 593—614 (1972).
35. O. C. ZIENKIEWICZ et al., *Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells*, Int. J. Num. Meth. Engng., **2**, p. 419—451 (1970).
36. O. C. ZIENKIEWICZ, The Finite Element Method, McGraw-Hill Book Co., London, 1977.

STABILIREA PRAGULUI DE NEPROPAGARE A FISURILOR DE OBOSEALĂ

de B. R. IRIMESCU

ICEM București

În lucrare este pusă în evidență existența pragului de nepropagare a fisurilor ΔK_T pentru diferite mărci de oțel cu clase de rezistență și structură metalurgică diferită, studiindu-se și influența unor factori ce determină mărimea acestuia.
S-au stabilit curbele de creștere a fisurilor de oboseală pentru mărcile de oțel analizate, datele expuse furnizînd informații folositoare în fabricația, alegerea, exploatarea și verificarea echipamentelor de răspundere supuse la solicitări variabile.

I. INTRODUCERE

Încă de la sfîrșitul secolului trecut s-a constatat că un metal supus unei solicitări repetate sau variabile în timp, se rupe la o tensiune mult mai mică decît cea necesară pentru ruperea în condiții statice. Ruperile ce apar în condițiile aplicării unor sarcini variabile se numesc ruperi prin oboseală. Studierea fenomenului de oboseală a devenit tot mai importantă, odată cu dezvoltarea tehnologică modernă, cu realizarea unor echipamente și agregate de mare răspundere, specifice unor industrii de vîrf: aeronautică și aerospațială, nucleară, petrochimică, energetică, automobilistică etc. Astăzi se afirmă că peste 90 % din ruperile structurilor în serviciu se datoresc fenomenului de oboseală [1].

Metodele de analiză specifice mecanicii ruperii s-au dovedit utile în interpretarea datelor experimentale, în dimensionarea corectă a componentelor și subansamblelor supuse la solicitări variabile, în prezicerea duratelor de siguranță în exploatare, a determinării intervalelor optime de inspecție și control.

În urmă cu 20 ani, Forsyth [2] propunea diferențierea procesului de oboseală în două stadii fizice diferite:

— Stadiul I, numit și de inițiere sau de incubare a microfisurilor de oboseală, care se dezvoltă datorită migrării dislocațiilor în planurile de alunecare orientate preponderent pe direcția efortului tangențial maxim, producînd intruziuni și extruziuni pe benzile de alunecare persistente și avînd dimensiuni de pînă la cîțiva grăunți [3, 4].

— Stadiul II, numit și de propagare a fisurilor, are loc pe direcții normale solicitării principale, propagarea producîndu-se la nivele de tensiuni mici, fie cu formarea unor striuri microscopice sau prin clivaj, numit ulterior și stadiul II A, iar la nivele de solicitare mari, prin ruperi și smulgeri brutale între fețele materialului, culminînd cu separarea completă, numit și stadiul II B [5].

Fiecare din aceste stadii apare distinct la o analiză microscopică.

Numeroase rezultate experimentale au pus în evidență dependența vitezei de propagare a fisurilor da/dN de factorul de intensitate a tensiunilor ΔK, printr-o relație empirică propusă de Paris [6] sub forma:

$$da/dN = C(\Delta K)^m, \tag{1}$$

în care da/dN este viteza de propagare a fisurii (mm/ciclu);

ST.CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 2, 1983, P. 160—173

$\Delta K = K_{max} - K_{min}$ — variația factorului de intensitate a tensiunilor în cursul unui ciclu de solicitare ($N/mm^{3/2}$);

C și m sînt constante de material.

Ecuația (1) a fost stabilită pentru viteze de creștere cuprinse între $10^{-4} - 10^{-6}$ mm/ciclu.

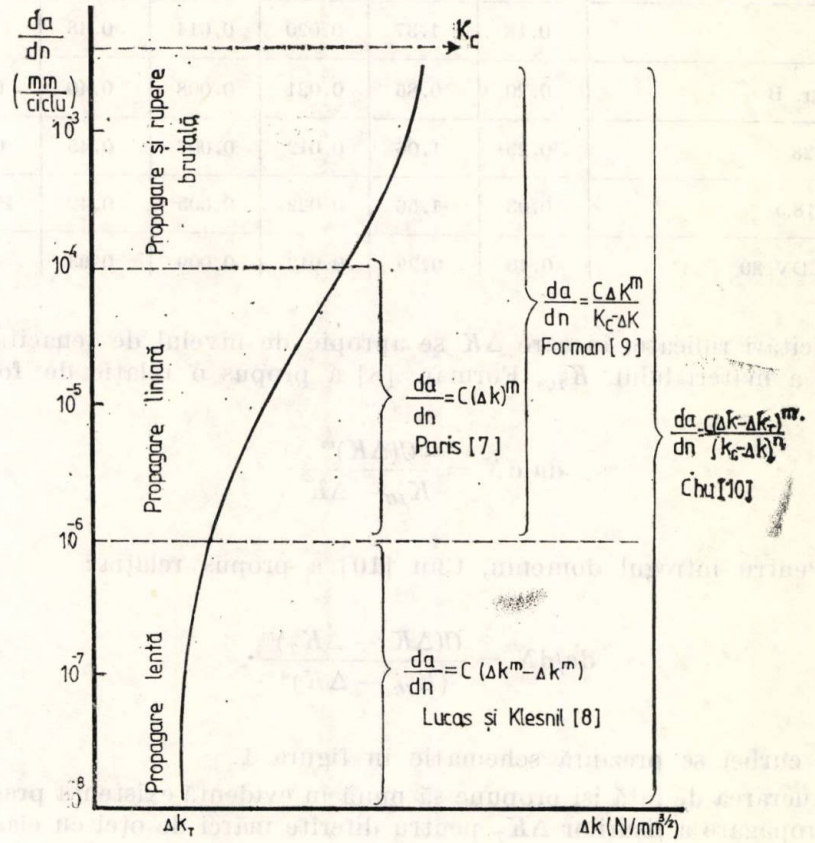


Fig. 1

Pentru viteze sub 10^{-6} mm/ciclu, numite și viteze de propagare subcritice, Lucas și Klesnil [7] au propus o relație de forma:

$$da/dN = C(\Delta K^m - \Delta K_T^m) \qquad (2)$$

și în care se pune în evidență termenul ΔK_T, numit și factorul de intensitate a tensiunilor de prag, sau pragul de nepropagare, nivel de solicitare sub care o fisură existentă nu se mai propagă la oboseală într-un număr de cicluri tehnice semnificativ ($10^6 - 10^8$ cicli).

Pentru viteze de creștere de peste 10^{-4} mm/ciclu corespunzătoare unui stadiu de propagare rapidă a fisurilor și de rupere brutală în regimuri

Tabelul

Marca de oţel	Conţinutul,					
	C	Mn	P	S	Si	Cr
RV 52	0,19	1,41	0,017	0,016	0,27	—
R 58	0,18	1,37	0,020	0,014	0,48	—
A 106 gr. B	0,20	0,86	0,021	0,008	0,40	0,10
G 52/28	0,25	1,06	0,012	0,007	0,45	0,06
2 NiCr 18.5	0,03	1,56	0,022	0,005	0,42	19,16
tip 40 CDV 20	0,40	0,29	0,012	0,009	0,93	4,86

de solicitări ridicate, în care ΔK se apropie de nivelul de tenacitate la rupere a materialului, K_{IC}, Forman [8] a propus o relaţie de forma:

$$da/dN = \frac{C(\Delta K)^m}{K_{IC} - \Delta K}. \tag{3}$$

Pentru întregul domeniu, Chu [10] a propus relaţia:

$$da/dN = \frac{C(\Delta K - \Delta K_T)^m}{(K_{IC} - \Delta K)^n}. \tag{4}$$

Forma curbei se prezintă schematic în figura 1.

Lucrarea de faţă îşi propune să pună în evidenţă existenţa pragului de nepropagare a fisurilor ΔK_T pentru diferite mărci de oţel cu clase de rezistenţă şi structuri metalurgice diferite, analiza unora dintre factorii ce influenţează mărimea acestuia, cît şi determinarea vitezelor de propagare a fisurilor analizate pe baza mecanicii ruperii liniar-elastice.

II. MATERIALE ŞI CONDIŢII EXPERIMENTALE

Cercetările efectuate în ICEM s-au oprit asupra a patru oţeluri de construcţie ferito-perlitice, RV 52 — STAS 11520—80; R 58 — STAS 11502—80 şi ASTM A 106 grad B, G 52/28, un oţel austenitic inoxidabil 2 NiCr 18.5 — STAS 11523 (ASTM 304L) şi un oţel de înaltă rezistenţă cu structură martensitică de tipul 40 CDV 20. Compoziţia chimică a acestor materiale este prezentată în tabelul 1, caracteristicile mecanice

1

în %								
Ni	Mo	Co	Cu	As	Sn	Al	Pb	Ti
0,21	—	—	0,02	—	—	0,032	—	0,03
0,73	—	—	0,025	—	—	0,052	—	0,20
0,086	—	—	0,11	0,01	—	0,031	—	—
0,09	—	—	0,25	0,009	—	0,020	—	—
10,24	0,37	0,21	0,23	0,027	0,004	0,011	0,001	—
0,30	1,25	—	—	—	—	—	—	—

în tabelul 2, iar tratamentele termice și caracteristicile structurale determinate conform STAS 5490—71 și conform punctaj ASTM în tabelul 3.

Încercările au fost efectuate pe epruvete CT—25 conform STAS 9768—74 și ASTM E 399—78, prelevate perpendicular pe direcția de laminare ($T—L$) a materialului și încercate pe o mașină electroservohidraulică MTS de 100 kN (fig. 2), în regim de forță constantă la o frecvență de 20—30 Hz. Raportul de asimetrie a ciclului $R = F_{min}/F_{max}$ a fost menținut constant în timpul încercării și a avut valorile de 0,05; 0,4 și 0,8. Toate determinările s-au efectuat în condițiile de temperatură și umidi-

Tabelul 2

	Marca de oțel	Limita de curgere $R_{p0,2}$ (N/mm^2)	Rezistența la rupere R_m (N/mm^2)	Alungirea la rupere A_5 (%)
Oțeluri de construcție	RV 52	390	544	25
	R 58	510	636	27
	A 106 gr. B	345	460	30
	G 52/28	370	575	28
	G 52/28*	330	510	30
Oțel martensitic	40 CDV 20	1621	1850	11
Oțel austenitic inoxidabil	2 NiCr 18.5	235	570	63

Tabelul 3

Marca de oţel	Elaborare	Tratament termic	Mărime grăunte [μm]
RV 52	Electric	Normalizare 890°C	Ferită : 13,8—19,6
R 58	Electric	Normalizare 880°C	Ferită : 4,9— 9,9
A 106 gr. B	REZ	Normalizare 850°C/45°/oră pînă la 700°C	Ferită : 19,6—26,7
G 52/28	REZ	Normalizare 860°C	Ferită : 86 —111
G 52/28*	REZ	Normalizare 880°C/50°/oră pînă la 720°C	Ferită : 19,6— 26,7
2 NiCr 18.8	Electric	Călire de punere în soluţie 1050°C/ 60 min./apă	Austenită : 26,7— 39,1
40 CDV 20	RAV	1010°C/30 min./ulei + 550°C/2 ore/aer + 570°C/2 ore/aer	Martensită aciculară : 0,5— 1,5

tate ale laboratorului. Creşterea fisurilor a fost urmărită permanent atît prin variaţia complianţei epruvetei prin echipamentul CRACK CORRELATOR cu care maşina MTS este echipată, cît şi optic, cu un microscop cu mărire × 40 şi precizie de citire a fisurii de 0,010 mm.

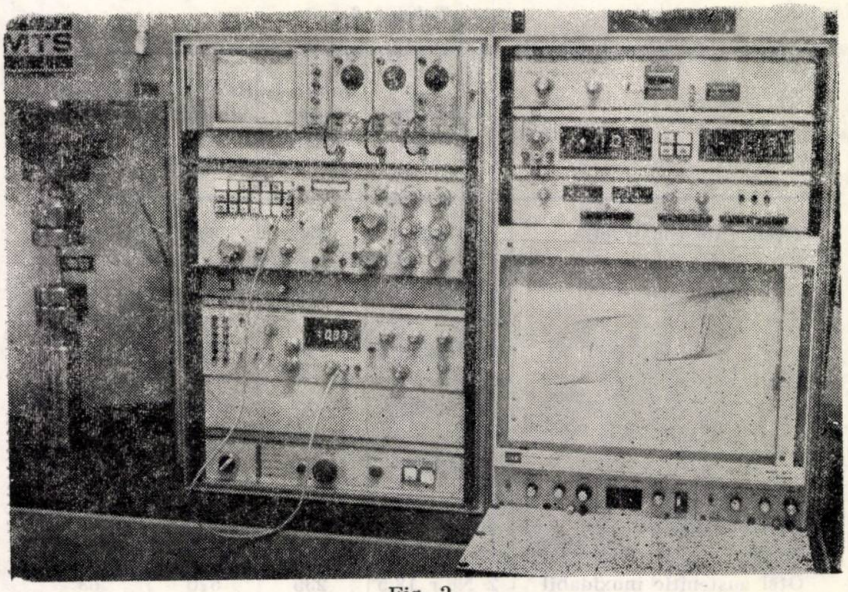


Fig. 2

Pragul de nepropagare ΔK_T a fost obținut în condițiile de scădere a lui ΔK, realizat prin scăderea periodică a valorii lui ΔF cu cîte 10 % din valoarea solicitării, după care s-a înregistrat valoarea numărului de cicli necesari creșterii fisurii, pragul de nepropagare ΔK_T fiind definit ca valoarea maximă a factorului de intensitate a tensiunilor pentru care nu s-a mai observat o creștere a fisurii timp de 10^6 cicli. Aceasta corespunde unei viteze de fisurare de 5×10^{-8} mm/ciclu. Creșterea vitezelor de propagare a fost calculată conform relației dată de ASTM E 399—78 și s-a făcut pe distanțe de 0,4 mm, ce reprezintă distanțe de circa trei ori mai mari ca mărimea enclavei plastice ciclice la vîrful fisurii, calculată la valoarea lui K_{max}.

Citirea creșterii fisurilor s-a făcut la suprafața epruvetei, polizată la luciu metalic, și considerînd creșterea fisurilor uniformă în masa materialului.

Pentru a pune în evidență caracterul metalografic specific zonelor de rupere datorate procesului de oboseală, suprafețele de rupere au fost studiate atît cu microscopul optic (Reichert), cît și cu microscopul electronic cu baleiaj (Skanning JEOL).

III. REZULTATE EXPERIMENTALE

În figura 3 se prezintă în coordonate logaritmice creșterea vitezelor de propagare da/dN în mm/ciclu corelate cu variația factorului de intensitate ΔK în $N/mm^{3/2}$ pentru mărcile de oțel cercetate, în condițiile expe-

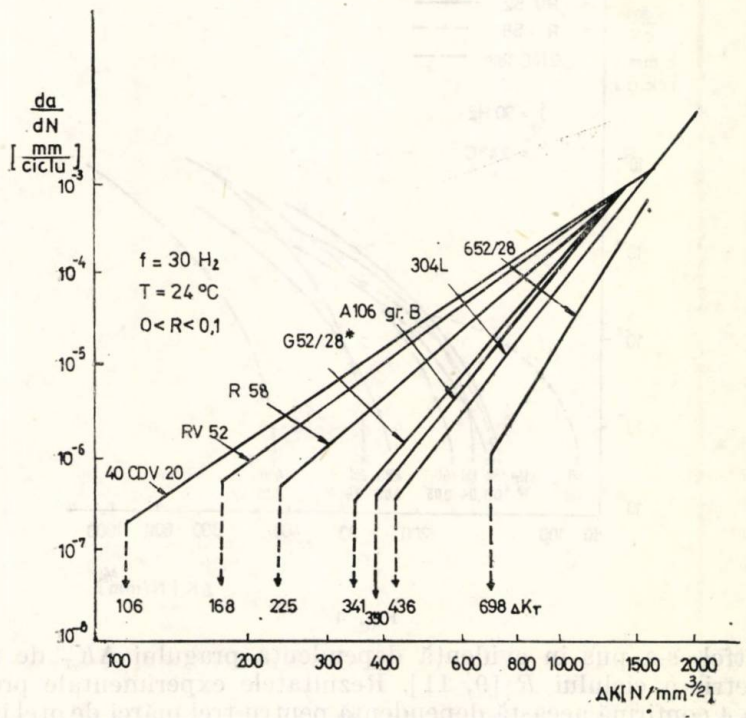


Fig. 3

rimentale menționate în diagramă, iar în tabelul 4, valorile coeficienților C și m din relația (1) calculați prin regresie liniară.

Astfel, se poate observa comportamentul diferit la oboseală pentru fiecare tip de oțel, cît și valorile specifice ale pragului de nepropagare ΔK_T. Trebuie subliniat că valoarea de prag este o caracteristică de material

Tabelul 4

Marca de oțel	Ecuația curbei de regresie	Coeficientul de corelare	Valoare prag nepropagare ΔK_T N/mm$^{3/2}$
40 CDV 20	$da/dN = 3,272 \times 10^{-13}(\Delta K)^{2,937}$	$r = 0,975$	106
RV 52	$da/dN = 1,223 \times 10^{-13}(\Delta K)^{2,980}$	$r = 0,958$	168
R 58	$da/dN = 6,304 \times 10^{-16}(\Delta K)^{3,790}$	$r = 0,831$	225
G 52—28*	$da/dN = 4,318 \times 10^{-21}(\Delta K)^{5,500}$	$r = 0,968$	341
A 106 Gr. B	$da/dN = 9,227 \times 10^{-21}(\Delta K)^{5,261}$	$r = 0,965$	350
2 NiCr 18.5	$da/dN = 6,008 \times 10^{-23}(\Delta K)^{5,728}$	$r = 0,917$	436
G 52—28	$da/dN = 3,949 \times 10^{-26}(\Delta K)^{6,875}$	$r = 0,856$	698

dependentă de condițiile specifice de încercare, respectiv variația tensiunii medii și frecvență de încercare. În dorința unei cunoașteri mai aprofundate a fenomenului, diverși cercetători au studiat factorii care influențează această caracteristică.

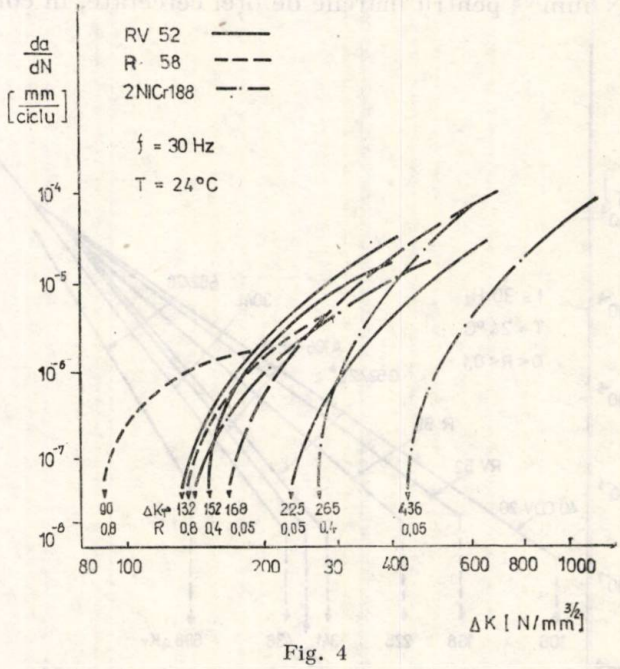


Fig. 4

Astfel, s-a pus în evidență dependența pragului ΔK_T de raportul de asimetrie a ciclului R [9, 11]. Rezultatele experimentale prezentate în figura 4 confirmă această dependență pentru trei mărci de oțel încercate în raporturi de asimetrie $R = 0,05$; 0,4 și 0,8.

În ceea ce privește influența intensității tensiunii la nivelul vîrfului fisurii, s-a observat că la viteze de propagare subcritice din vecinătatea pragului de nepropagare, mărimea care controlează procesul de fisurare este valoarea maximă a factorului de intensitate a tensiunii, aspect ilustrat în figura 5.

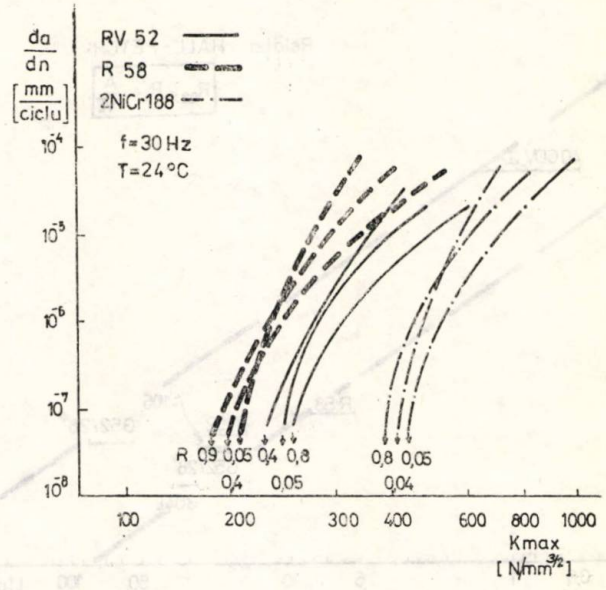


Fig. 5

O importanță deosebită o prezintă influența factorilor metalurgici asupra pragului de nepropagare a fisurilor.

După cum este cunoscut, Hall [12] și Petch [13] au evidențiat legătura care există între unele caracteristici mecanice de material și mărimea de grăunte l:

$$R_{0.2} = R_0 + \frac{A}{\sqrt{l}}, \tag{5}$$

unde $R_{0.2}$ este limita de curgere proporțională (MPa);

R_0 — tensiunea datorată fricțiunilor în rețeaua cristalină (MPa);

A — un coeficient constant ce depinde de cantitatea de dislocații aglomerată la limite;

l — mărimea de grăunte feritic în oțelurile carbon ferito-perlitice (m);

— mărimea de grăunte austenitic în oțelul de tip 18.5;

— mărimea martensitei aciculare în oțelul martensitic de tip 40 CDV 20.

Această relație se verifică satisfăcător în cazul mărcilor de oțel studiate, care acoperă un domeniu larg de limite de curgere și este prezentată în figura 6.

În dorința de a înțelege mai bine procesele intime care au loc la vîrful unei fisuri supusă unor solicitări ciclice s-a considerat o placă cu o fisură de lungime $2a$ supusă unui ciclu de încărcare $\Delta\sigma$ situat la infinit, ce acționează normal la planul Ox ce conține fisura, ca în figura 7.

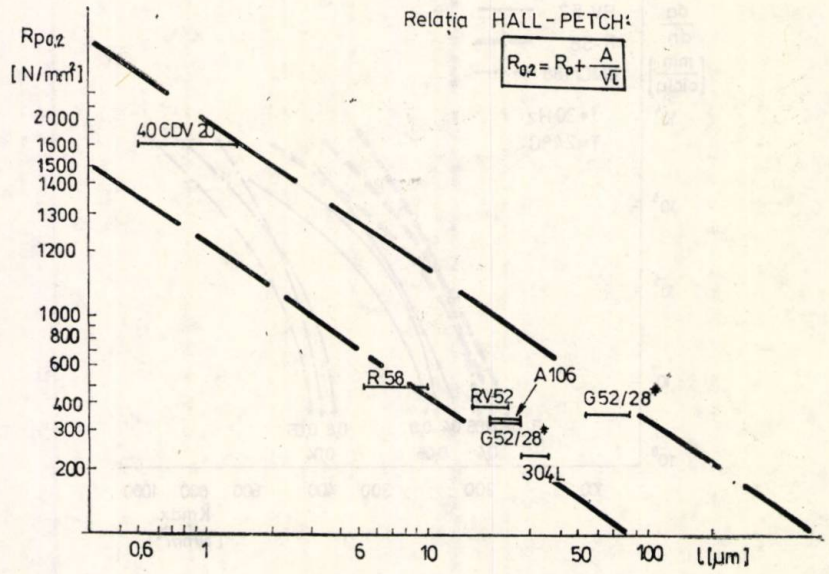


Fig. 6

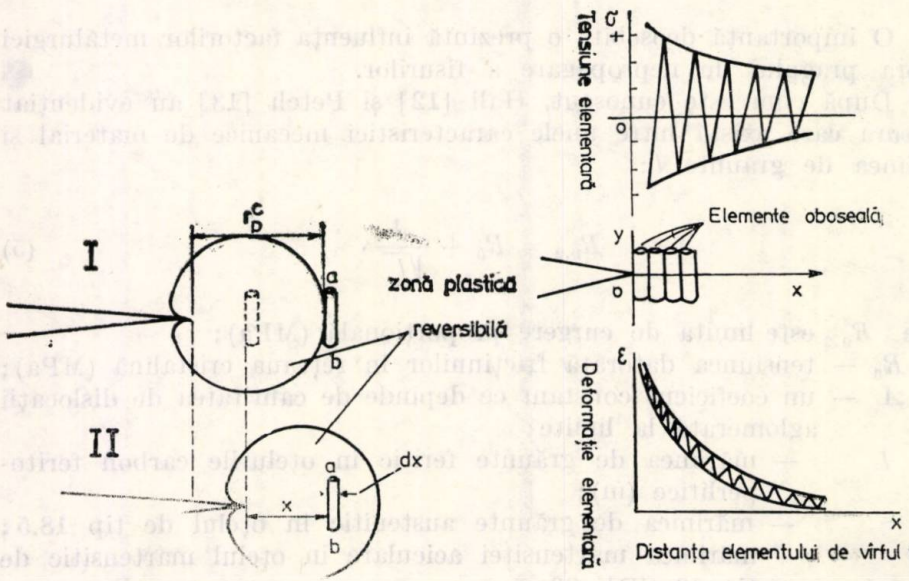
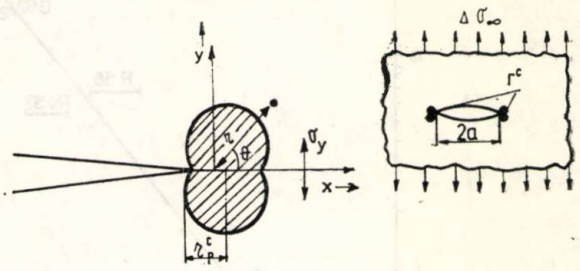


Fig. 7

Sub acțiunea tensiunii, la vîrful fisurii se formează o zonă de deformare plastică, numită de Rice [20] enclavă plastică ciclică. La marginea acestei zone s-a considerat un element de material, notat $a-b$ și de mărimea dX. Pe măsura propagării fisurii acest element este inclus în zona de proces și deformat plastic, iar în final rupt. Conform modelului propus de McClintock [14], ruperea elementului $a-b$ se produce la acumularea unei valori critice a energiei de deformație plastică. Astfel, fisura înaintează cu o cantitate dx la fiecare ciclu. Analizele efectuate asupra modelului McClintock au arătat că mărimea zonei de proces este de ordinul parametrului microstructurii [16, 17, 18].



Relația Irwin [19]:

$$\Delta K = \lim_{r \to 0} \Delta R_{0,2} \sqrt{2\pi r}$$

Relația Rice [15]:

$$r_p^c = 0{,}132 \left(\frac{\Delta K}{2R_{0,2}} \right)^2$$

Fig. 8

Pentru a verifica aceste rezultate în cazul oțelurilor analizate, s-a calculat raza plastică la vîrful fisurii cu relația propusă de Rice [15], figura 8. Valoarea ΔK introdusă în relație corespunde pragului de nepropagare determinat experimental. Rezultatele obținute, prezentate în figura 9 evidențiază dependența mărimii zonei de proces, r_p^c, adică a enclavei plastice la vîrful fisurii cu parametrul de microstructură al materialului pentru diferitele mărci de oțel analizate.

Aceste considerente ne permit calculul aproximativ al mărimii pragului de nepropagare ΔK_T, prin egalarea razei plastice la vîrful fisurii, cu mărimea parametrului de microstructură. Astfel, dacă $r_p^c = l$, atunci, cum

$$r_p^c = 0{,}132 \left(\frac{\Delta K_T}{2R_{0,2}} \right)^2, \tag{6}$$

rezultă

$$K_T = 5{,}5 \; R_{0,2} \sqrt{l}, \tag{7}$$

unde se exprimă l, r_p^c în m, ΔK_T în MPa$\sqrt{\text{m}}$ și $R_{0,2}$ în MPa.

În figura 10 se prezintă comparativ valorile calculate ale pragului de nepropagare ΔK_{Tc} calculat cu valorile determinate experimental ΔK_T pentru gama de oțeluri cercetate. Se remarcă concordanța încurajatoare dintre valorile calculate și cele determinate experimental.

Se subliniază faptul că valoarea ΔK_T a pragului de nepropagare arătată mai sus corespunde unor solicitări cu un număr oricît de mare de cicluri.

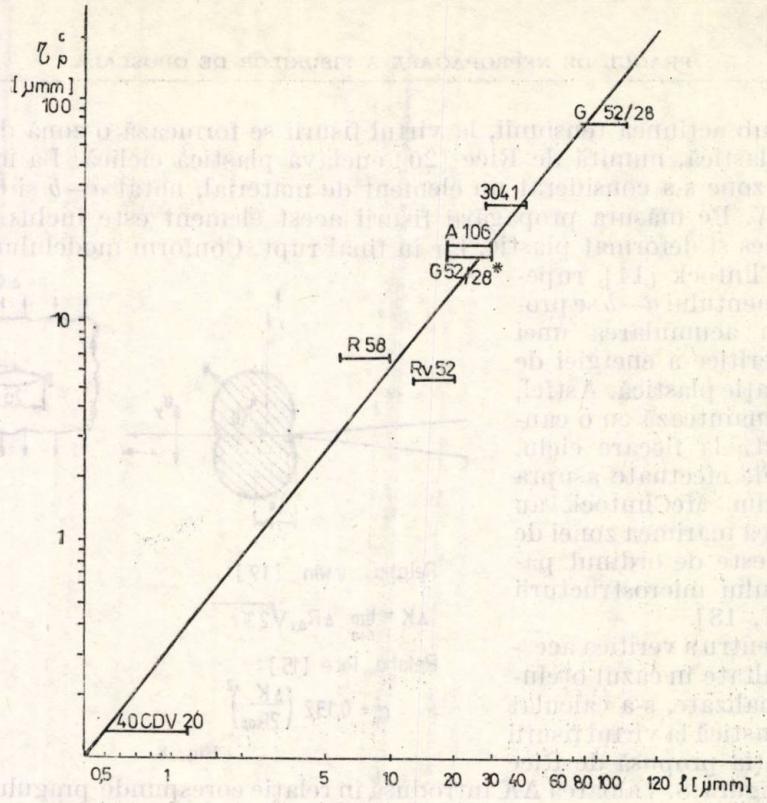

σ_p^c
[μmm]
100
10
1
G 52/28
304 L
A 106
G52/28*
R 58
Rv 52
40 CDV 20
0,5
1
5
10
20
30
40
60
80
100
120
ℓ [μmm]

Fig. 9

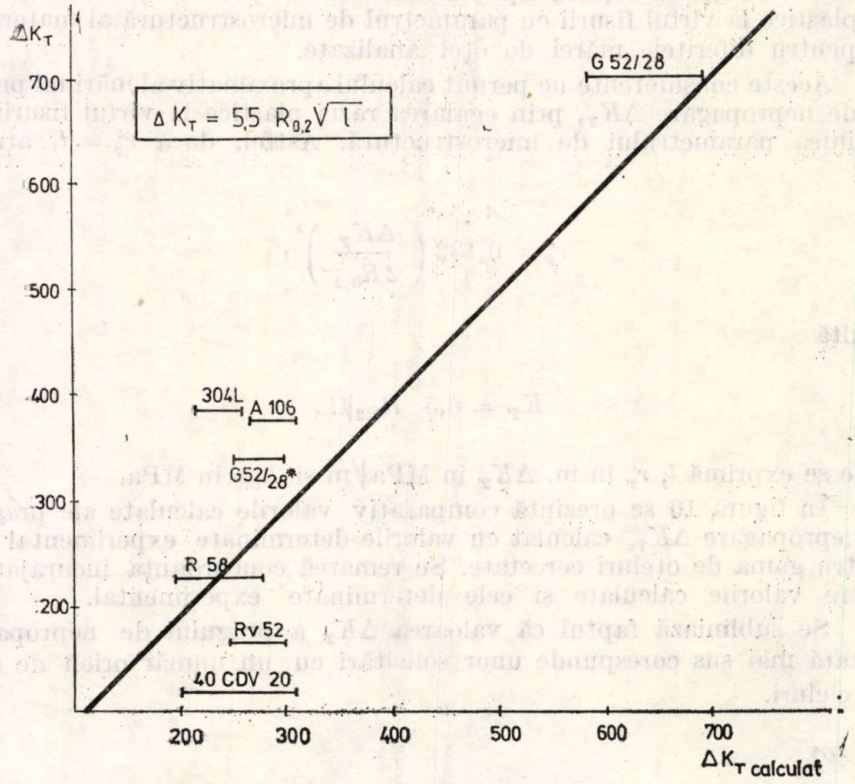

ΔK_T
700
600
500
400
300
200
$\Delta K_T = 5{,}5\ R_{0,2}\sqrt{l}$
G 52/28
304L
A 106
G52/28*
R 58
Rv 52
40 CDV 20
200
300
400
500
600
700
ΔK_T calculat

Fig. 10

În cazurile reale, numărul de cicluri de solicitare cărora trebuie să le facă față materialul are o valoare finită.

Legătura dintre valoarea factorului de intensitate a tensiunii la care nu se inițiază procesul de fisurare prin oboseală și numărul de cicluri este dată chiar de diagrama de rezistență la oboseală prezentată în figura 3. În locul factorului de tensiune ΔK se poate considera și mărimea tensiunii maxime $\Delta\sigma$. Astfel, folosind relațiile între forță și tensiunea de la vîrful fisurii în epruveta de mecanica ruperii, în figura 11 au fost calculate valorile tensiunilor maxime de neinițiere în funcție de numărul de cicli de solicitare pentru oțelurile studiate. Aspectul general al curbelor obținute este cel cunoscut al curbelor de tip Wöhler.

IV. INTERPRETAREA DATELOR EXPERIMENTALE

Datele expuse furnizează informații folositoare atît în fabricația și alegerea corectă a materialelor în funcție de destinația lor, cît și asupra condițiilor de verificare în timpul exploatării.

Astfel, din figura 12 se prezintă variația coeficientului m din legea lui Paris dată de relația (1) cu mărimea parametrului metalurgic. Se observă că pentru oțelurile cu structură foarte fină ($l = 0{,}5-1{,}5$ μm) de tip 40 CDV 20, valoarea tensiunilor pentru care se amorsează fisurile este mică ($\Delta K_T = 106$ N/mm$^{3/2}$), dar viteza de creștere a fisurilor este lentă ($m = 2{,}937$). În schimb, pentru oțelul 52/28 cu granulație mare ($l = 80-111$ μm), valoarea de prag este ridicată ($\Delta K_T = 698$ N/mm$^{3/2}$), dar odată procesul de rupere amorsat, creșterea fisurilor prin oboseală este rapidă ($m = 6{,}875$).

Aceste informații permit inginerului metalurg să stabilească tehnologii optime de fabricație a materialului, prin conducerea diferită a procesului tehnologic, în funcție de destinația sa.

De exemplu, în cazul oțelului G 52/28, prin conducerea diferită a procesului tehnologic este posibil:

— de obținut o granulație $l = 26{,}8-39{,}6$ μm, care asigură o valoare de prag, $\Delta K_T = 341$ N/mm$^{3/2}$, și o viteză de propagare cu o pantă $m = 5{,}5$

— de obținut o granulație $l = 86-111$ μm, care asigură o valoare de prag ridicată, $\Delta K_T = 698$ N/mm$^{3/2}$ și o viteză de propagare cu o pantă $m = 6{,}875$.

Evident, asigurarea caracteristicilor de oboseală ale materialului trebuie să aibă în vedere ansamblul condițiilor tehnice impuse materialului, modificarea granulației avînd influență atît asupra caracteristicilor de rezistență (limită de curgere, rezistență la fluaj), cît și tenacitate.

Din punctul de vedere al inginerului constructor, datele prezintă interes în alegerea claselor de materiale pentru diferite categorii de echipamente. Evident, în cazul echipamentelor a căror durată de viață este garantată pînă la inițierea fisurilor de oboseală, este recomandată folosirea unor oțeluri cu parametru metalurgic mare. În această categorie pot fi incluse recipientele din industria alimentară sau biologie, precum și unele

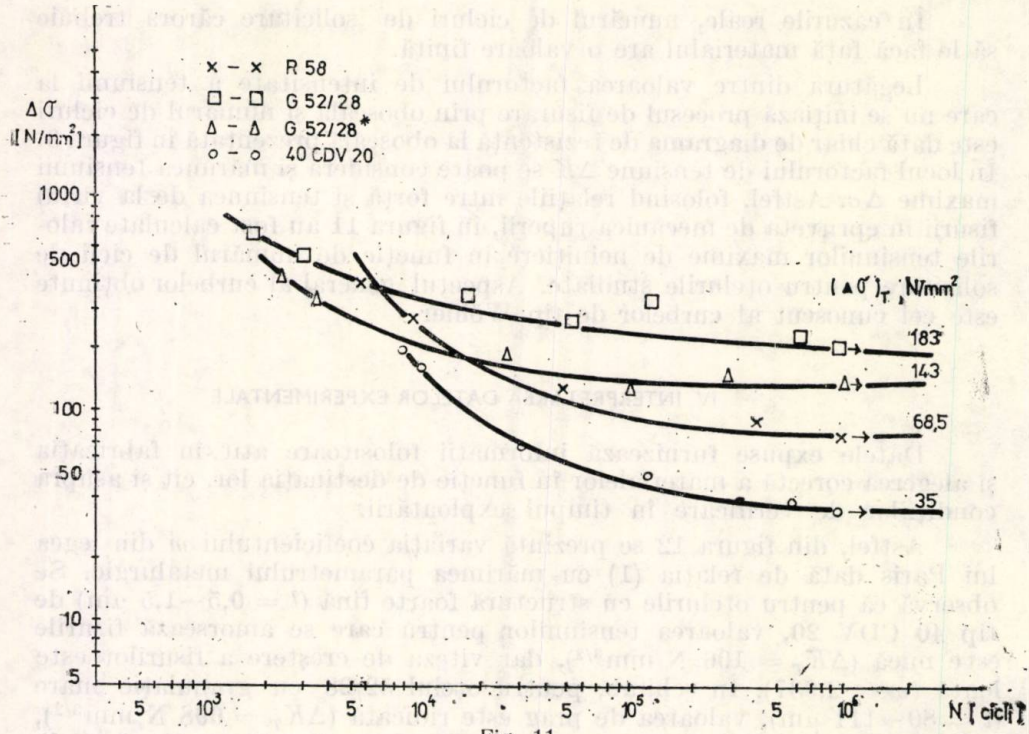

× – × R 58
□ – □ G 52/28
Δ – Δ G 52/28*
○ – ○ 40 CDV 20
Δσ [N/mm²]
1000
500
100
50
10
5
(Δσ)T, N/mm²
183
143
68,5
35
5 10³ 5 10⁴ 5 10⁵ 5 10⁶
N [cicli]

Fig. 11

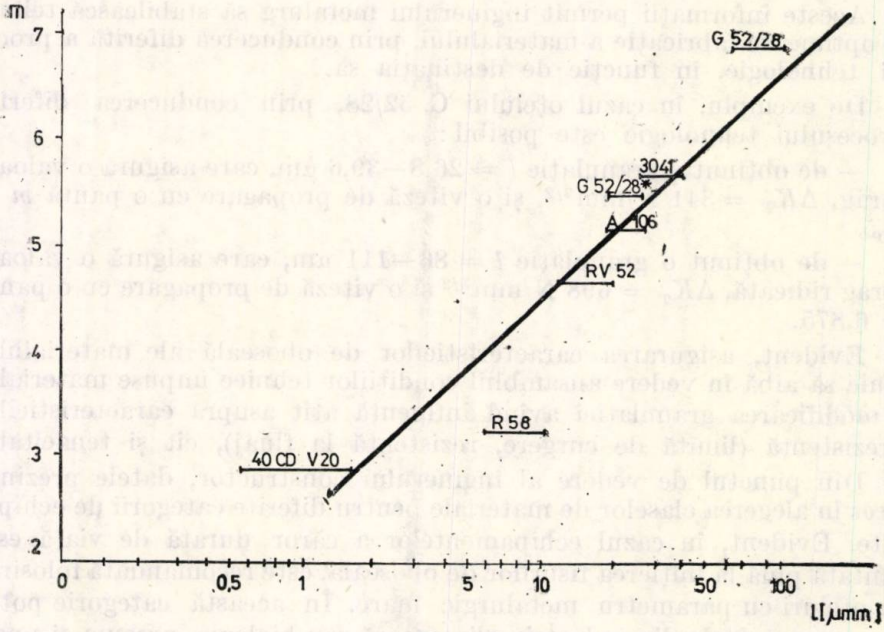

m
7
6
5
4
3
2
G 52/28
304
G 52/28*
106
RV 52
R 58
40 CD V20
0 0,5 1 5 10 50 100
l [μmm]

Fig. 12

repere din alcătuirea reactorilor nucleari. Dimpotrivă, în cazul echipamentelor la care pe durata de viață nu se admite depășirea unor dimensiuni limită de defect, este recomandată folosirea unor oțeluri cu parametru metalurgic cît mai fin. Din această categorie fac parte majoritatea construcțiilor inginerești exploatate în regimuri de solicitări variabile.

Primită la redacție la 10 iulie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. S. S. MANSON, Exp. Mech. **5**, p. 193, (1965).
2. P.J.E. FORSYTH, Acta Met. **11**, p. 703 (1963).
3. GROSSKREUTZ, J. C., Mater. Sci. Eng. **2**, p. 240 (1967-68).
4. W. A. WOOD, Fracture, ed. Leibowitz, New York, John Wiley & Sons, Inc, (1959).
5. LAIRD, C., Fatigue Crack Propagation, Philadelphia, ASTM—STP 415, p. 131 (1967).
6. P. C. PARIS, J. of Basic Eng., **85**, p. 528 (1963).
7. P. LUCAS, M. KLESNIL, Mater. Sci. Eng. **11**, p. 231 (1972).
8. R. G. FORMAN, J. of Basic Eng., **89**, p. 459 (1967).
9. P. C. PARIS, ș.a., Progress in Flow Growth, Philadelphia, ASTM—STP 536, p. 79 (1972)
10. CHU, H. P., Fracture Toughness, Philadelphia, ASTM—STP 559, p. 245 (1974).
11. J. MAUTZ, V. WEISS, Cracks and Fracture, Philadelphia, ASTM—STP 601, p. 154 (1975).
12. E. O. HALL, Proceedings of the Physical Society, B, **64**, p. 747 (1951).
13. N. J. PETCH, J. of the Iron and Steel Institute, **174**, p. 25 (1953).
14. F. A. McCLINTOCK, Fracture of Solids, New York, Wiley & Sons, p. 65 (1963).
15. J. R. RICE, Fatigue Crack Propagation, ASTM—STP 415, p. 247 (1967).
16. G. T. HAHN, ș.a., Met. Trans. **3A**, p. 1189 (1972).
17. A. J. McEVILY, Met. Trans. **10A**, p. 475 (1979).
18. G. R. YODER, ș.a., Met. Trans. **9A**, p. 1413 (1978).
19. G. R. IRWIN, J. of Appl. Mech. **84**, p. 651 (1962).
20. J. R. RICE, J. of Appl. Mech. **90**, p. 379 (1968).

STABILITATEA ŞI RAMIFICAREA ÎN CONTEXTUL SINERGETICEI*)

de ADELINA GEORGESCU

INCREST, Bucureşti

Lucrarea de faţă introduce sinergetica, nouă direcţie de cercetare conturată în ultimul deceniu, care apare în prezent în descrierea matematică a multor fenomene şi care se impune prin amploarea luată în revistele de specialitate. În cadrul sinergeticei este evidenţiat rolul ramificării (branching) (numită şi bifurcaţie (bifurcation)) şi al stabilităţii. Pentru noţiunile foarte noi este dată, în paranteze, denumirea în limba engleză.

Studiul sistemelor simple se face de cîteva secole; acum cercetătorii îşi îndreaptă atenţia spre sisteme complexe. În particular, în fluide se iau în consideraţie diferite efecte(termice, electromagnetice,de structură a fluidului etc.) şi în consecinţă apare un mare număr de parametri fizici. Creşterea numărului n al componentelor unui sistem poate duce la noi proprietăţi calitative P ale sistemului conform graficului 1.

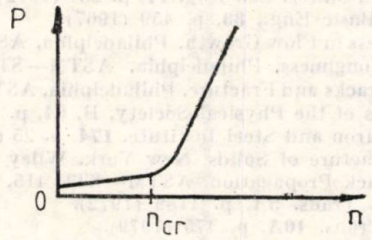


Fig. 1

Un mare număr de sisteme compuse din multe subsisteme îşi schimbă dramatic comportarea macroscopică cînd parametrii variază. Astfel de sisteme apar în fizică (laser, raser, feromagnetism, optică cuantică, teoria plasmei, termodinamica proceselor ireversibile, fizica corpului solid, electromagnetism), mecanică cerească, mecanica fluidelor, elasticitate, teoria circuitelor electrice, astrofizică, chimie, biochimie, evoluţie prebiologică (morfogeneză), biologie, medicină (metabolismul celular, halucinaţiile vizuale produse de administrarea drogurilor), ecologie, geneza şi dinamica populaţiei, sociologie (economie), istorie, semantică (semantic pattern). Cantitatea uriaşă de informaţii privind evoluţia acestor sisteme a condus la apariţia sinergeticei. În greceşte aceasta înseamnă efect cooperativ. Sinergetica este un cîmp de cercetare interdisciplinar care se ocupă de cooperarea părţilor individuale ale unui sistem care produc structuri macroscopice spaţiale şi temporale. Sistemele studiate de sinergetică se numesc sisteme sinergetice. Sinergetica descrie global diferite sisteme dinamice, autoorganizarea lor care duce la formarea structurilor şi funcţionărilor. Ea pune în evidenţă analogiile profunde dintre sistemele diferitelor ştiinţe care, aşa cum am văzut, merg de la mecanica fluidelor pînă la sociologie. Sinergetica face o punte de legătură între ştiinţele naturii şi cele umaniste. Ea se ocupă atît de procese deterministe, cît şi stohastice.

*) Această lucrare a fost prezentată la Colocviul de Mecanica Fluidelor, Braşov, 16—17 oct. 1981.

Conferinţe avînd ca temă sinergetica încep din 1972 (la Elmau) să se ţină mai întîi la doi ani (1974, Londra; 1976, Dortmund), apoi anual (Elmau, 1977; Tokio, 1978), bianual (Tübingen 1978 mai şi decembrie).

Studiul sistemelor sinergetice aparţine teoriei topologice a sistemelor dinamice adică *analizei globale* care studiază ecuaţii diferenţiale pe varietăţi infinit dimensionale de aplicaţii şi pe fibrate de spaţii vectoriale. Drept rezultat proprietăţile studiate sînt generice (i.e. abstracţie făcînd de o mulţime rară), un studiu mai amănunţit, negeneric, reclamînd o analiză locală.

Tranziţiile de fază în neechilibru (nonequilibrium phase transitions) (ca de exemplu topirea şi îngheţarea) şi structurile disipative sînt modelele naturale ale sistemelor complexe care au o evoluţie şi o istorie [1]. Structurile în echilibru (în sens clasic), ca de exemplu cristalele, se menţin în absenţa oricăror procese interne. Lîngă echilibru toate procesele evoluează de la ordine spre dezordine. Structurile disipative acoperă toate fenomenele naturale care prezintă organizări interne sub influenţa diferitelor procese evolutive pe care ele le găzduiesc. Ele acţionează *departe de echilibru* (far from equilibrium) deoarece ele pot apare doar *după un anumit prag critic* în domeniul proceselor neliniare. Ele sînt apoi menţinute de constrîngeri externe. Aceste cercetări sînt legate de termodinamica proceselor ireversibile.

Una din noţiunile fundamentale în sinergetică este *formaţiunea tipică* (pattern) pe care Norbert Wiener o defineşte ca fiind o aranjare caracterizată mai degrabă de ordinea elementelor sale decît de natura intrinsecă a acestor elemente. De exemplu, instabilităţile disruptive din instalaţiile toroidale de plasmă de fuziune termonucleară macroscopic se prezintă ca nişte formaţiuni tipice. Există formaţiuni tipice ale lumii moarte, ale proceselor biologice etc. Dintre formaţiunile întîlnite în mişcarea fluidelor menţionăm vîrtejurile lui Taylor, celulele lui Bénard, aleea lui von Kármán, străzile de nori şi undele ciclonice.

Menţionăm noţiunea de *soliton* care este un anumit tip de soluţie şi anume o *undă solitară* (solitary wave) care are o proprietate particulară de ciocnire.

Sistemul dinamic generat de ecuaţiile Navier-Stokes este printre cele mai complicate. Studiile de stabilitate şi ramificare din hidrodinamică sînt tipice şi servesc drept termen de comparaţie pentru celelalte sisteme sinergetice. De exemplu la mişcarea fluidelor între două sfere solide, care modelează mişcarea atmosferei, după prima bifurcaţie mişcarea staţionară devenită instabilă este înlocuită de o undă staţionară stabilă; a doua bifurcaţie înlocuieşte unda staţionară devenită instabilă cu unda ciclonică nestaţionară (şi anume periodică în timp). Aceste fenomene sînt tipice pentru sistemele sinergetice. Ramificarea prin care o soluţie stabilă devenită instabilă este înlocuită cu o soluţie nou apărută nestaţionară şi stabilă se numeşte *ramificarea lui Hopf*. Printre altele ea este foarte importantă în tehnică căci modelează apariţia oscilaţiilor parazite din stări staţionare. Matematic această ramificare are loc la un anumit prag critic la care problema liniarizată ataşată fenomenului de studiat are două valori proprii pur imaginare complex conjugate. Dacă problema neliniară este $F(u, \lambda) = 0$, unde u este, de exemplu, viteza, iar λ — parametrul, atunci ***problema liniarizată*** în jurul mişcării caracterizate de u_0

este $F'_{u_0}(u, \lambda) = 0$, unde F'_{u_0} este *diferențiala Fréchet* a lui F în punctul u_0.

Să considerăm un sistem dinamic $\frac{dv}{dt} = X_\mu(v)$, $v \in B$, unde B este un spațiu Banach, X_μ este un cîmp vectorial pe B și $v(t) = D_{X_{\mu,t}}(v_0)$ exprimă dependența lui $v(\cdot)$ de valoarea inițială $v_0 \cdot v \in B$ se numește *nerătăcitor* (nonwandering) dacă $\forall U \ni v$ și $T > 0$, $\exists t > T$ astfel încît $D_{X_{\mu,t}}(U) \cap U \neq \Phi$. Osubmulțime închisă $A \subset B$ de puncte nerătăcitoare este un *atractor* dacă ea are o vecinătate astfel încît $\bigcap_{t>0} D_{X_{\mu,t}}(U) = A$. Atractorii sînt varietăți. *Atractorii stranii* (strange) nu sînt varietăți. Cînd $t \to \infty$, o curbă integrală v poate tinde către un punct fix (adică o soluție staționară), o orbită închisă (adică o soluție periodică) sau un atractor straniu. Această din urmă soluție are loc în cazul *dependenței sensibile de condiția inițială*, prin care înțelegem că pentru perturbații mărginite ale condiției inițiale, soluția perturbată este funcție crescătoare de timp. În cazul dependenței continue de condiția inițială, diferențiala Fréchet crește (în normă), dar în unele direcții ea crește (se dilată), în altele suferă o contracție. Această dilatare și contracție se numește *hiperbolicitate*, sistemele care posedă această proprietate numindu-se *Axiom A systems*.

O puternică direcție de cercetare este, după 1970, aceea în care apariția turbulenței sistemelor sinergetice este explicată cu ajutorul haoticității traiectoriilor în spațiul fazelor în interiorul atractorului straniu corespunzător sistemelor dinamice deterministe. Se spune că avem *haos* dacă 1) există un număr infinit de traiectorii periodice; 2) există un număr infinit numerabil de traiectorii neperiodice; 3) are loc hiperbolicitatea tuturor (sau a marii majorități a) traiectorilor din regim.

Sisteme dinamice dintre cele mai simple (de exemplu $x_{t+1} = \alpha x_t(1 - x_t)$) au comportare haotică; cu atît mai mult sisteme complexe prezintă această proprietate. O teorie mult studiată este cea a lui Ruelle-Takens după care turbulența apare cînd pentru $t \to \infty$ soluția sistemului dinamic corespunzător ecuațiilor Navier-Stokes tinde către un atractor straniu. Teoria lui Ruelle-Takens nu este complet riguroasă ea conținînd multe conjecturi. Dăm mai jos pentru ilustrare trecerea spre turbulență, conform acestei teorii, a soluției modelului lui Lorenz. Acest model constă din următorul sistem neliniar:

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y,$$
$$\dot{y} = rx - y - xz,$$
$$\dot{z} = -bx + xz,$$

obținut din ecuațiile Navier-Stokes prin anumite trunchieri. Teoretic se pot stabili doar primii pași ai evoluției, ultimii fiind descriși doar prin calcule numerice în care se ia $b = 8/3$ și $\sigma = 10$, rămînînd ca singurul parametru fizic al mișcării să fie r. Cu creșterea lui r sistemul dinamic al lui Lorenz are următoarea evoluție. Pentru $r < 1$ acest sistem admite o singură soluție staționară (x, y, z) și anume pe cea trivială $(0, 0, 0)$. Ea corespunde stării de conducție termică care are loc în absența mișcării și este stabilă. La $r = 1$ ea își pierde stabilitatea pe seama ramificării din ea a două noi soluții staționare $C = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r - 1)$;

$C' = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$, aceste soluţii corespunzînd unor mişcări convective staţionare. Soluţia trivială atrage acum doar o parte din soluţiile nestaţionare, restul fiind atrase de C şi C'. Pentru $r \approx 13{,}926$, C şi C' îşi pierd stabilitatea şi are loc o a doua bifurcare care este bifurcare Hopf şi anume din cele două soluţii staţionare C şi C' se bifurcă alte soluţii periodice care în spaţiul fazelor sînt două orbite închise, iar în realitate corespund unor mişcări convective nestaţionare. Pentru r şi mai mari există un număr infinit de orbite periodice printre care traiectoriile din spaţiul fazelor rătăcesc haotic în drumul lor spre punctele atractive C şi C', iar la $r > 24{,}06$ se bifurcă atractorul straniu al lui Lorenz. Corespunzător, în natură, mişcarea perturbată este cînd mai apropiată, cînd mai depărtată de anumite mişcări convective periodice şi tinde mereu spre mişcările convective staţionare corespunzătoare lui C şi C'. Procesul de mai sus este reprezentat în figurile 2, 3, 4, în planul $(r, \|(x, y, z)\|)$ în

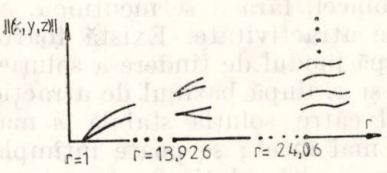


Fig. 2

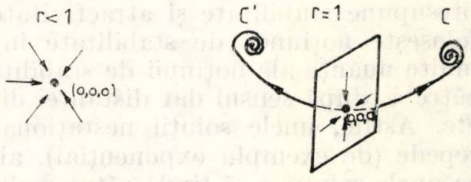


Fig. 3

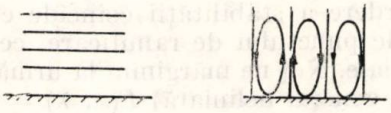


Fig. 4

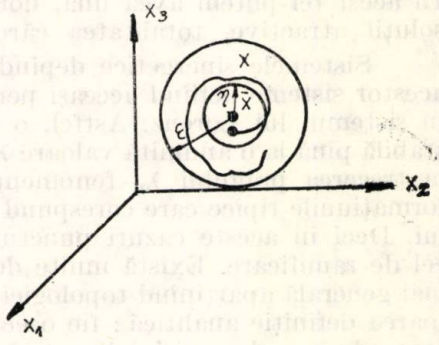


Fig. 5

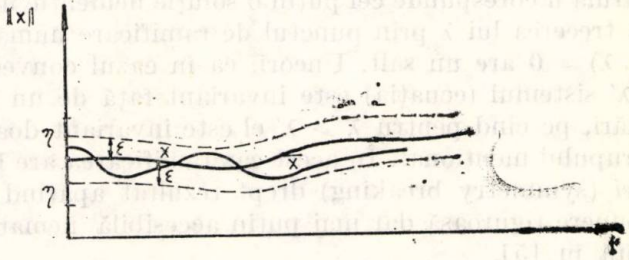


Fig. 6

care apare diagrama de ramificare, în spaţiul fazelor (x, y, z) şi în spaţiul fizic în care se formează formaţiunile tipice.

În cele de mai sus am presupus cunoscute noțiunile de stabilitate și ramificare. Reamintim că o soluție $\bar{x}$ a unei ecuații este (Liapunov) stabilă (adică în raport cu variații ale datelor inițiale) dacă orice altă soluție nestaționară x care la momentul inițial $t = 0$ se află într-o mică vecinătate de mărime $\eta(\varepsilon)$ a lui $\bar{x}$ (cu alte cuvinte $\|\bar{x}|_{t=0} - x|_{t=0}\| < \eta(\varepsilon)$, norma $\|\cdot\|$ fiind cea din spațiul soluțiilor) la orice moment ulterior x este oricît de aproape dorim (și anume la „distanța" ε) de $\bar{x}$ (adică $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$). În spațiul fazelor (x_1, x_2, x_3), soluția $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ este stabilă dacă orice traiectorie care pleacă dintr-un cerc de rază $\eta(\varepsilon)$ centrat în $\bar{x}$ nu părăsește cercul centrat în $\bar{x}$ și de rază ε (fig. 5). În spațiul $(t, \|x\|)$, $\bar{x}$ este stabilă dacă toate traiectoriile care pleacă la $t = 0$ dintr-o η — vecinătate de pe axa $\|x\|$ se găsesc, pentru orice $t > 0$, într-o bandă de lățime 2ε din jurul lui $\bar{x}$ (fig. 6). Dacă la limită pentru $t \to \infty$ toate soluțiile $x(t)$ coincid cu $\bar{x}$ (sau, altfel spus, sînt atrase de $\bar{x}$), atunci $\bar{x}$ se numește asimptotic stabilă. Deci proprietatea de stabilitate asimptotică presupune stabilitate și atractivitate. De obicei, fără a se menționa, se folosește noțiunea de stabilitate în loc de atractivitate. Există foarte multe nuanțe ale noțiunii de stabilitate după modul de tindere a soluției către $\bar{x}$, după sensul dat distanței dintre $\bar{x}$ și x, după bazinul de atracție etc. Astfel, unele soluții nestaționare tind către soluția stabilă $\bar{x}$ mai repede (de exemplu exponențial), altele — mai încet; se poate întîmpla ca unele soluții x să tindă către $\bar{x}$ altele către o altă soluție $\bar{x}_1$, după locul din care pornesc la $t = 0$ (adică după bazinul de atracție al lui $\bar{x}$ și $\bar{x}_1$). În acest fel putem avea una, două, un număr finit sau chiar infinit de soluții atractive, totalitatea cărora formează atractorul.

Sistemele sinergetice depind de anumiți parametri λ, comportarea acestor sisteme nefiind aceeași pentru toate valorile lui λ, ca de exemplu în sistemul lui Lorenz. Astfel, o soluție a unui sistem dinamic poate fi stabilă pînă la o anumită valoare λ_1 cînd ea își pierde stabilitatea. Deseori, la trecerea pragului λ_1 fenomenul se schimbă dramatic în λ_1 apărînd formațiunile tipice care corespund unor noi soluții ramificate ale sistemului. Deci în aceste cazuri punctul de pierdere a stabilității coincide cu cel de ramificare. Există multe definiții ale punctului de ramificare, cea mai generală aparținînd topologiei diferențiale. Noi ne mărginim la următoarea definiție analitică: fie o ecuație (în general neliniară) $F(x, \lambda) = 0$ care admite soluția trivială $x = 0$ pentru orice valoare a parametrului λ. Spunem că λ' este un punct de ramificare dacă în orice vecinătate a lui λ' există λ căruia îi corespunde cel puțin o soluție neidentic nulă a ecuației date. Deci la trecerea lui λ prin punctul de ramificare numărul soluțiilor ecuației $F(x, \lambda) = 0$ are un salt. Uneori, ca în cazul convecției termice, pentru $\lambda < \lambda'$ sistemul (ecuația) este invariant față de un anumit grup de transformări, pe cînd pentru $\lambda > \lambda'$ el este invariant doar față de un subgrup al grupului menționat. În acest caz ramificarea are loc prin *spargerea simetriei* (symmetry breaking) drept rezultat apărînd formațiunile tipice. O expunere riguroasă dar mai puțin accesibilă nematematicienilor poate fi găsită în [5].

Menționăm și un alt concept mult folosit azi în sinergetică și anume noțiunea de *stabilitate structurală* care aparține topologiei diferențiale și este legat de noțiunea de punct de ramificare în sensul lui R. Thom [3].

Teoria catastrofelor (TC) fondată de René Thom în 1966 [1] este după părerea acestuia, prima încercare coerentă, de la logica lui Aristotel, de a da o teorie asupra teoriei analogiei; TC este o teorie a morfologiei (i.e. disciplina biologiei care studiază forma și structura organismelor vii) generale. E. C. Zeeman consideră că TC este o metodă matematică nouă pentru descrierea evoluției formelor în natură. Această teorie permite un studiu important al unor fenomene discontinue cu ajutorul analizei matematice. Trebuie, totuși, să remarcăm, că, cel puțin în stadiul actual, așa cum afirmă chiar R. Thom, TC nu este o teorie matematică ci o mulțime de idei, o stare a minții (state of mind). Introducerea punctului de vedere probabilist alături de cel fenomenologic a jucat un rol covîrșitor în știință. Același rol pare (după D. Ruelle) să-l joace și punctul de vedere *calitativ* introdus de TC. Această părere este împărtășită de mulți cercetători ai naturii care studiază sisteme dinamice complicate și pentru care descrierea calitativă a comportării acestora este de mare interes teoretic și mai ales aplicativ.

Cu rare excepții, prin teoria catastrofelor se înțelege, de fapt, teoria catastrofelor elementare (TCE). Pentru a defini obiectul acestuia din urmă să considerăm o funcție f care depinde de o stare x și un parametru μ, unde x și μ aparțin unor spații euclidiene. Funcția f este singulară într-un punct (x_0, μ_0), numit *punct singular* al lui f, dacă diferențiala Fréchet a lui f se anulează în acel punct. În jurul punctelor singulare, f este neinversabilă. Problema matematică a TCE este aceea a găsirii formelor canonice locale pentru f generic folosind o schimbare de coordonate netedă în variabilele x, μ, $y = f(x, \mu)$, formele canonice locale fiind definite într-o vecinătate a punctului singular (x_0, μ_0). Thom a găsit, pentru μ 4-dimensionali, șapte forme canonice (catastrofe): fold, cuspidă (cusp), coadă de rîndunică (swallowtail), fluture (butterfly), ombilic eliptic (elliptic umbilic), ombilic hiperbolic (hyperbolic umbilic), ombilic parabolic (parabolic umbilic). În TCE este studiat și cazul cînd μ este 5-dimensional. În aplicații se întîlnesc aceste catastrofe; la traversarea lor starea unui sistem descrisă de ecuația $f(x, \mu) = 0$ are o schimbare bruscă, dramatică, cauzată de o ramificare a soluțiilor acestei ecuații. În cazul fenomenelor sociale, de exemplu, la traversarea unei cuspide se trece de la starea de pace la cea de război, ceea ce justifică în acest caz numele de catastrofă. În [3] am pus în evidență că o suprafață de catastrofă (i.e. de bifurcație), care în anumite secțiuni este o cuspidă, a ecuației caracteristice corespunzătoare unei probleme de valori proprii ce descrie o anumită stabilitate hidromagnetică, mărginește hipersuprafața atașată. Actualmente este foarte disputată importanța matematică a TC, teorie care are mulți susținători dar și contestatari de mare prestigiu matematic cum ar fi, de exemplu, prof. S. Smale [2]. Necoincidența dintre clasificarea catastrofelor elementare după teoria singularităților aplicațiilor pentru $\mu \in R^3$ și clasificarea lor după teoria sistemelor dinamice pare să slăbească [2] din fundamentele științifice sau filozofice ale TC, care este o teorie bazată pe sisteme dinamice. În orice caz, catastrofele elementare apar frecvent în aplicații în studiul sistemelor sinergetice și de aceea ele sînt mult analizate de sinergetică.

Anul 1975 a marcat apariția unei noi și importante direcții de studiu în teoria ecuațiilor Navier-Stokes privind proprietățile generice ale mul-

ţimii S a soluţiilor staţionare ale acestor ecuaţii. S-a stabilit, folosindu-se mai întîi metode analitice şi apoi topologice, că, abstracţie făcînd de o mulţime rară din spaţiul forţelor exterioare şi al vitezelor la frontieră, mulţimea S este finită. Acest rezultat epocal a fost ulterior extins la cazul soluţiilor nestaţionare şi recent la cazul cînd genericitatea se referă la domeniul de mişcare. Atragem atenţia asupra faptului că, deşi aceste frumoase rezultate sînt maximale, în sensul că nu pot fi obţinute altele mai fine, totuşi din punct de vedere practic există întrebarea ce se întîmplă dacă tocmai pentru acele forţe exterioare şi viteze la frontieră din mulţimea rară exclusă, mulţimea S are o infinitate de soluţii ? Desigur, proprietăţile generice dau un răspuns de tipul celor date de teoria probabilităţilor.

În cele de mai sus am încercat să facem o prezentare elementară intuitivă a unor noţiuni abstracte complexe ; studiul lor matematic riguros reclamă însă o bună cunoaştere a multor ramuri ale matematicii moderne. În problema haoticităţii mişcării, există puţine rezultate din cauza absenţei rezultatelor corespunzătoare din matematica fundamentală. În studiul modelului lui Lorenz sînt încă multe goluri în demonstraţii, analiza sa, ca şi a altor sisteme sinergetice, impunînd introducerea unor noi noţiuni matematice de un înalt grad de abstractizare a căror analiză este departe de a fi încheiată, ea suscitînd un larg interes în lumea matematică. Sinergetica este astfel un viguros cîmp de cercetare a cărui dezvoltare este de neconceput fără aportul matematicienilor puri şi aplicativi alături de specialişti ai ştiinţelor particulare.

Primită la redacţie la 19 ianuarie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. Springer Series in Synergetics (vol. 1 *Synergetics*. An Introduction by H. Haken ; vol. 2 *Synergetics. A workshop*, ed. H. Haken ; vol. 3 *Synergetics. Far from equilibrium*, eds. A. Pacault and C. Vidal ; vol. 4 *Structural stability in physics*, ed. W. Guttinger, H. Eikemeier ; vol. 5 *Pattern formation by dynamic systems and pattern recognition*, ed. H. Haken ; vol. 6 *Dynamics of synergetic systems*, ed. H. Haken ; vol. 7 *Problems of biological physics* by L. A. Blumenfeld ; vol. 8 *Chaos. The world of non-periodic oscillations* by O. E. Rossler.)
2. R. THOM, *Stabilité structurelle et morphogénèse*, Benjamin-Addison Wesley Reading, Mass., 1972 (ed. engleză 1975).
3. S. SMALE, *The Mathematics of Time*, Springer-Verlag, New York, 1980.
4. A. GEORGESCU, *Catastrophe surfaces bounding the domain of linear hydromagnetic stability*, Central Institute of Physics, National Institute for Scientific and Technical Creation, FT—203—1981.
5. D. H. SATTINGER, *Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory*, LNM 762, Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1980.
6. A. GEORGESCU, *Hydrodynamic stability theory*, va apare în ed. Martinus Nijhoff.

VIBRATORUL MECANIC VMME — 250kN

de GH. BUZDUGAN, I. MINCĂ, D. CRAIFĂLEANU, N. CONSTANTIN, B. IONESCU

Institutul politehnic București

În articol este prezentat un vibrator mecanic cu mase excentrice în rotație, construit pentru sarcini dinamice mari. Dezechilibrul dinamic al vibratorului este realizat de către opt discuri montate pe două axe paralele care au mișcări de rotație sincronizate, în sensuri contrarii. Prin reglarea pozițiilor unghiulare ale discurilor se obțin diferite variante de funcționare ale vibratorului, acesta putînd produce forțe dinamice cu amplitudini pînă la 250 kN și momente dinamice cu amplitudini pînă la 112,5 kN·m. Domeniul frecvențelor de funcționare a vibratorului este cuprins între 4 Hz și 50 Hz.

1. INTRODUCERE

În perioada 1977—1981, la Catedra de rezistență a materialelor din Institutul politehnic București au existat preocupări permanente în domeniul studiului experimental al vibrațiilor fundațiilor de mașini și al determinării coeficienților elastici dinamici ai terenurilor de fundații. Aceste preocupări s-au încadrat într-un program mai larg de experimentări, la care au participat I.N.C.E.R.C. și alte instituții.

În cadrul Laboratorului de rezistență a materialelor a fost realizată o instalație experimentală pentru studiul vibrațiilor fundațiilor, în vederea determinării caracteristicilor dinamice ale terenurilor de fundații. Vibratorul VMME-250 kN a fost proiectat și realizat ca sursă de vibrații, fiind destinat atît încercărilor pe fundații experimentale mici și medii, cît și experimentărilor pe fundații mari și foarte mari.

Construcția vibratorului permite realizarea mai multor variante de funcționare a lui. El poate fi reglat pentru producerea unor forțe dinamice cu amplitudini pînă la 250 kN, sau pentru producerea unor momente dinamice cu amplituidini pînă la 112,5 kN·m. Amplitudinile sarcinilor dinamice produse de vibrator sînt proporționale cu pătratul frecvenței de funcționare, ele putînd fi reglate la zece nivele de valori pentru fiecare variantă de funcționare a vibratorului. Domeniul frecvențelor de funcționare a vibratorului este cuprins între 4 Hz și 50 Hz.

2. CONSTRUCȚIA VIBRATORULUI

Construcția de ansamblu a vibratorului VMME-250 kN este prezentată în figura 1.

Vibratorul propriu-zis are două axe paralele, pe care sînt montate cîte patru discuri. În timpul funcționării vibratorului, fiecare ax este antrenat în mișcare de cîte un motor electric de curent continuu. Mișcările axelor sînt sincronizate printr-un cuplaj cu roți dințate.

Discurile au forma și dimensiunile arătate în figura 2. Prin golurile create de cele cinci găuri cu diametrul $d = 65$ mm se realizează pentru fiecare disc un dezechilibru dinamic

$$r_0 m_0 = 0{,}95 \ \text{kg} \cdot \text{m} \qquad (1)$$

Rotirii discului cu viteza unghiulară ω [rad/s] îi corespunde o forţă centrifugă

$$F_c = r_0 \, m_0 \, \omega^2 = 0{,}95 \, \omega^2 \, [N]. \tag{2}$$

În timpul funcţionării vibratorului, discurile sînt blocate pe axe în anumite poziţii unghiulare. Blocarea se realizează prin strîngerea ce se obţine în urma deplasării axiale relative a suprafeţelor conice cu care sînt

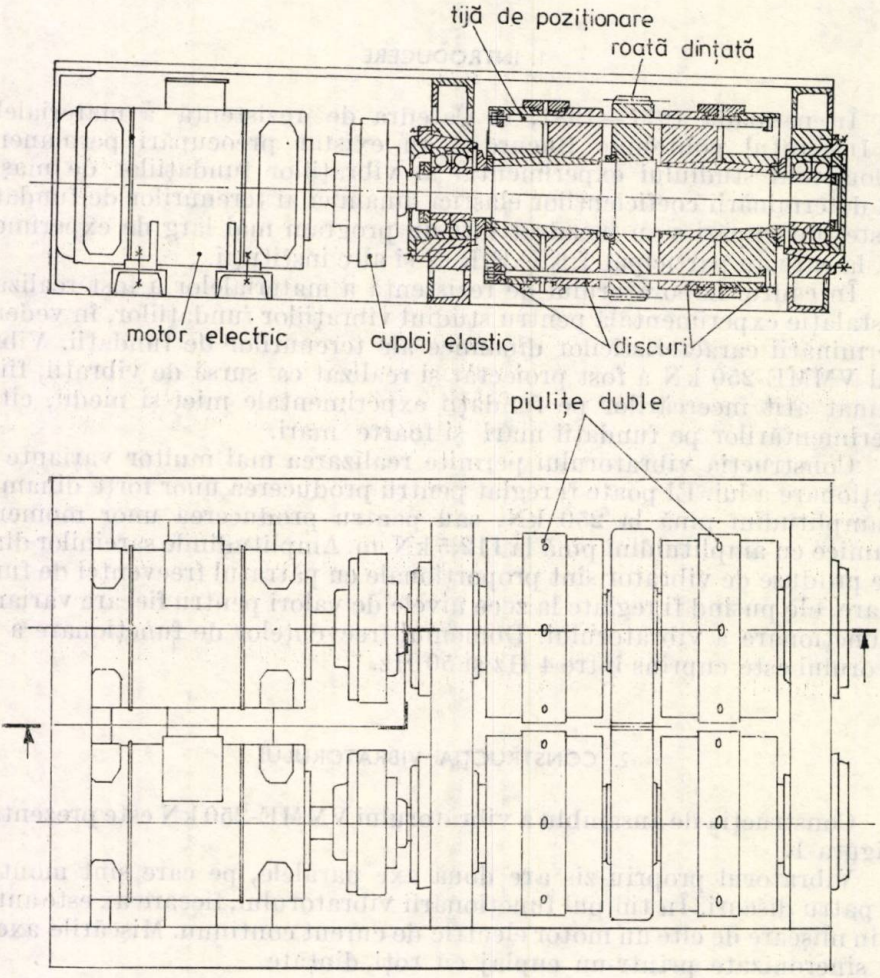


Fig. 1. — Construcţia de ansamblu a vibratorului mecanic VMME-250 kN.

prevăzute discurile şi axele. În acest scop, pe cîte două discuri alăturate sînt montate piuliţe duble, avînd filet dreapta la un capăt şi filet stînga la celălalt. Deblocarea discurilor se obţine prin rotirea piuliţei duble în sensul desfacerii de pe discuri.

Discurile pot fi fixate pe axe în diferite poziții unghiulare, care se aleg în funcție de tipul sarcinii dinamice pe care urmează să o realizeze vibratorul și de nivelul acesteia. Pentru poziționarea unghiulară, discurile sînt prevăzute cu cîte 12 găuri de diametru $d_1 = 15$ mm (fig. 2). Două astfel de găuri, avînd axele diametral opuse, sînt prelucrate și pe fiecare dintre cele două roți dințate de cuplare a mișcărilor axelor.

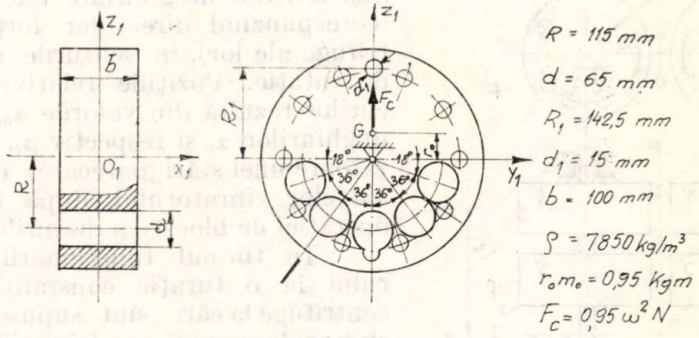


Fig. 2. — Forma discurilor cu mase excentrice.

În starea deblocată, discurile se rotesc pe axele pe care sînt montate în pozițiile dorite. Prin anumite găuri ale lor și prin găurile roților dințate de pe același ax sînt trecute tije drepte cu diametrul de 15 mm. Discurile sînt apoi blocate pe axe, prin rotirea piulițelor duble în sensurile de înșurubare pe discuri. După strîngerea tuturor piulițelor (blocarea tuturor discurilor pe axe), atît tijele de poziționare, cît și piulițele sînt asigurate împotriva desfacerii ce ar putea fi provocată de trepidațiile din timpul funcționării vibratorului.

Carcasa vibratorului este construită din profile de oțel, asamblate prin sudură și întărite cu pereți de tablă în zonele lagărelor. Axele sînt montate pe rulmenți cu bile. Carcasa este fixată pe o placă de bază cu grosimea de 60 mm, formînd împreună cu aceasta un ansamblu foarte rigid. Placa de bază a vibratorului are și rolul de a permite fixarea acestuia pe fundațiile pe care se efectuează experimentările.

Pentru alimentarea cu energie electrică (curent continuu) a motoarelor vibratorului, a fost proiectat la Catedra de mașini electrice din Institutul politehnic București, sub coordonarea conferențiarului Măgureanu Răzvan, un redresor cu tiristoare, care asigură reglarea turației axelor vibratorului între 60 și 3000 rot/min.

3. FUNCȚIONAREA VIBRATORULUI

Prin fixarea discurilor pe axele vibratorului în diferite poziții unghiulare, alese în mod corespunzător, forțele centrifuge care rezultă în mișcarea de rotație a lor au diferite direcții, efectele rezultante fiind și ele diferite.

În figura 3 sînt prezentate schematic cele opt discuri ale vibratorului; poziţiile unghiulare ale discurilor corespund unui moment oarecare al funcţionării vibratorului. S-au notat cu α_i şi respectiv cu β_i ($i = 1, 2, 3, 4$) poziţiile unghiulare ale discurilor de pe cele două axe ale vibratorului. Unghiurile α_i şi β_j se măsoară între direcţia Oz şi direcţiile razelor pe care se află centrele de greutate ale discurilor (corespunzînd direcţiilor forţelor centrifuge ale lor), în sensurile mişcărilor de rotaţie. Poziţiile relative ale discurilor rezultă din valorile α_{0i} şi β_{0i} ale unghiurilor α_i şi respectiv β_i, corespunzătoare unei stări (oarecare) de repaus a axelor vibratorului, după încheierea operaţiei de blocare a discurilor pe axe.

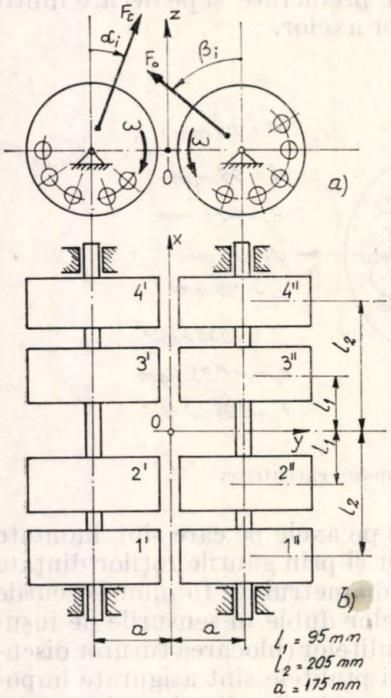


Fig. 3. — Notarea poziţiilor unghiulare ale discurilor vibratorului.

În timpul funcţionării vibratorului la o turaţie constantă, forţele centrifuge la care sînt supuse discurile sînt egale ca mărime. Direcţiile acestor forţe sînt variabile în timp, fiind determinate prin unghiurile α_i şi β_i, conform notaţiilor din figura 3.

Considerînd originea timpului într-unul din momentele în care discurile trec prin poziţiile corespunzătoare stării de repaus dinaintea funcţionării vibratorului, cînd $\alpha_i = \alpha_{0i}$ şi $\beta_i = \beta_{0i}$, se pot scrie relaţiile :

$$\alpha_i = \alpha_{0i} + \omega t,$$
$$\beta_i = \beta_{0i} + \omega t. \qquad (3)$$

Reducînd cele opt forţe centrifuge F_c ce acţionează asupra discurilor vibratorului în centrul O al acestuia, rezultă următoarele componente ale rezultantei, respectiv ale momentului rezultant, considerate în sistemul de referinţă $Oxyz$ (fig. 3) :

$$F_y = F_c \sum_{i=1}^{4} (\sin \alpha_i - \sin \beta_i),$$

$$F_z = F_c \sum_{i=1}^{4} (\cos \alpha_i + \cos \beta_i),$$

$$M_x = F_c a \sum_{i=1}^{4} (\cos \alpha_i - \cos \beta_i), \qquad (4)$$

$$M_y = F_c\,[l_1\,(-\cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 - \cos\beta_2 + \cos\beta_3) +$$

$$+ l_2(-\cos\alpha_1 + \cos\alpha_4 - \cos\beta_1 + \cos\beta_4)],$$

$$M_z = F_c[l_1(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_3 - \sin\beta_2 + \sin\beta_3) +$$

$$+ l_2\,(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_4 - \sin\beta_1 + \sin\beta_4)].$$

În cazul general se pot obține toate cele cinci componente ale torsorului sarcinilor dinamice reduse în centrul vibratorului. Prezintă interes deosebit anumite cazuri particulare de funcționare a vibratorului, corespunzătoare unor anumite poziții relative ale discurilor, ce vor fi prezentate în cele ce urmează.

3.1. PRODUCEREA FORȚELOR DINAMICE PE DIRECȚIA Oz

Dacă la reglarea pozițiilor discurilor pe axe se realizează unghiurile inițiale :

$$\alpha_{01} = \alpha_{04} = \beta_{01} = \beta_{04},$$

$$\alpha_{02} = \alpha_{03} = \beta_{02} = \beta_{03}, \tag{5}$$

în timpul funcționării vibratorului rezultă

$$\alpha_1 = \alpha_4 = \beta_1 = \beta_4 = \alpha_{01} + \omega t,$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_2 = \beta_3 = \alpha_{02} + \omega t. \tag{6}$$

În acest caz

$$F_z = 4F_c[\cos(\alpha_{01} + \omega t) + \cos(\alpha_{02} + \omega t)] =$$

$$= 8F_c \cos\frac{\alpha_{01} - \alpha_{02}}{2} \cos\left(\frac{\alpha_{01} + \alpha_{02}}{2} + \omega t\right), \tag{7}$$

$$F_y = 0,\quad M_x = 0,\quad M_y = 0,\quad M_z = 0.$$

Vibratorul produce numai forțe dinamice F_z, avînd amplitudinile F_{0z} reglabile prin alegerea corespunzătoare a unghiurilor α_{01} și α_{02} :

$$F_{0z} = 8F_c \cos\frac{\alpha_{01} - \alpha_{02}}{2} = 7{,}6\omega^2 \cos\frac{\alpha_{01} - \alpha_{02}}{2} =$$

$$= 300\,f^2 \cos\frac{\alpha_{01} - \alpha_{02}}{2}\ [N] \tag{8}$$

În relaţia (8) s-a folosit expresia (2) a forţei centrifuge F_c şi s-a înlocuit viteza unghiulară ω în funcţie de frecvenţa f, măsurată în Hz ($\omega = 2\pi f$).

Amplitudinile F_{0z} sînt variabile în timpul funcţionării vibratorului, fiind proporţionale cu pătratul frecvenţei f de funcţionare a acestuia. În tabelul 1 sînt prezentate valorile acestor amplitudini pentru diferite frecvenţe de funcţionare a vibratorului, respectiv pentru toate valorile pe care construcţia vibratorului le permite pentru diferenţa $(\alpha_{01} - \alpha_{02})$. Amplitudinile maxime, la frecvenţe date, corespund cazului cînd toate cele opt discuri au aceeaşi poziţie unghiulară măsurată prin unghiurile α_i şi β_i, respectiv aceeaşi poziţie unghiulară iniţială:

$$\alpha_{01} = \alpha_{02} = \alpha_{03} = \alpha_{04} = \beta_{01} = \beta_{02} = \beta_{03} = \beta_{04} \tag{9}$$

În acest caz se realizează dezechilibrul dinamic total maxim

$$8 r_0 m_0 = 7{,}6 \text{ kg} \cdot \text{m}. \tag{10}$$

respectiv amplitudinile maxime ale forţelor dinamice produse de vibrator

$$F_{0z_{\max}} = 300\, f^2 \text{ [N]}. \tag{11}$$

Condiţiile de rezistenţă ale elementelor vibratorului şi cerinţele impuse de buna funcţionare a lagărelor axelor determină limitarea amplitudinilor F_{0z} la 250 kN. Relaţiile (8) şi (11) se folosesc cu această restricţie, rezultînd că nu este permisă funcţionarea vibratorului decît la frecvenţe

$$f \leqslant \sqrt{\frac{833{,}56}{\cos \dfrac{\alpha_{01} - \alpha_{02}}{2}}} \text{ [Hz]}. \tag{12}$$

În tabelul 1 s-au trecut, pentru toate valorile $(\alpha_{01} - \alpha_{02})$, numai amplitudinile forţelor dinamice F_z pentru frecvenţele din domeniul în care este permisă folosirea, respectiv funcţionarea vibratorului.

3.2. PRODUCEREA MOMENTELOR DINAMICE ÎN RAPORT CU AXA Oz

Un al doilea caz particular de funcţionare a vibratorului VMME-250 kN se obţine pentru:

$$\alpha_{03} = \beta_{01} = \alpha_{01} + \pi; \qquad \beta_{03} = \alpha_{01}, \tag{13}$$

$$\alpha_{04} = \beta_{02} = \alpha_{02} + \pi; \qquad \beta_{04} = \alpha_{02},$$

Tabelul 1

Amplitudinile forțelor de excitație F_{0Z}

$\alpha_{01}-\alpha_{02}$ [grade]	Frecvența, în Hz									
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
	Amplitudinile forțelor de excitație, în N									
0	7498	29992	67482	119968	187449	—	—	—	—	—
18	7406	29623	66651	118490	185141	—	—	—	—	—
36	7131	28524	64179	114096	178275	—	—	—	—	—
54	6681	26723	60127	106892	167019	240507	—	—	—	—
72	6066	24264	54594	97056	151650	218375	—	—	—	—
90	5302	21207	47717	84830	132547	190867	—	—	—	—
108	4407	17629	39665	70515	110180	158659	215953	—	—	—
126	3404	13616	30636	54464	85100	122544	166797	217857	—	—
144	2317	9268	20853	37072	57925	83412	113533	148288	187677	231700
162	1173	4692	10557	18767	29324	42226	57474	75068	95009	117295
180	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Notă :

$\alpha_{01} = \alpha_{04} = \beta_{01} = \beta_{04}$ $\alpha_{02} = \alpha_{03} = \beta_{02} = \beta_{03}$

Se va evita funcționarea vibratorului cu amplitudinea forței de excitație mai mare de $2{,}5 \cdot 10^5$N

căruia îi corespund

$$M_z = 2F_c(l_1 + l_2)(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) =$$

$$= 4F_c (l_1 + l_2) \cos \frac{\alpha_{01} - \alpha_{02}}{2} \sin \left(\frac{\alpha_{01} + \alpha_{02}}{2} + \omega t \right), \qquad (14)$$

$$F_y = F_z = 0, \quad M_x = M_y = 0.$$

Amplitudinile momentului produs de vibrator,

$$M_{0z} = 4F_c(l_1 + l_2) \cos \frac{\alpha_{01} - \alpha_{02}}{2} = 1{,}14 \ \omega^2 \cos \frac{\alpha_{01} - \alpha_{02}}{2} =$$

$$= 45 f^2 \cos \frac{\alpha_{01} - \alpha_{02}}{2} \ [\text{N} \cdot \text{m}], \qquad (15)$$

sînt proporţionale cu pătratul frecvenţei de funcţionare f şi pot fi reglate prin alegerea corespunzătoare a poziţiilor iniţiale ale discurilor, respectiv a valorilor unghiurilor α_{01} şi α_{02}, cu respectarea relaţiilor (13). Distanţele l_1 şi l_2 au valorile înscrise în figura 3.

Pentru

$$\alpha_{01} = \alpha_{02} = \beta_{03} = \beta_{04}, \qquad \alpha_{03} = \alpha_{04} = \beta_{01} = \beta_{02}, \tag{16}$$

rezultă valorile max ime ale amplitudinilor M_{0z},

$$M_{0z_{max}} = 45 f^2 \ [\mathrm{N \cdot m}]. \tag{17}$$

În tabelul 2 sînt prezentate valorile amplitudinilor M_{0z} pentru diferite valori ale frecvenţelor f şi respectiv pentru toate variantele de funcţionare posibile, cu respectarea condiţiilor (13).

Tabelul 2

Amplitudinile momentelor de excitaţie M_{0z}

$\alpha_{01} - \alpha_{02}$ [grade]	Frecvenţa, în Hz									
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
	Amplitudinile momentelor M_{0z} în N·m									
0	1125	4499	10122	17995	28118	40489	55110	71981	91101	112470
18	1111	4443	9998	17774	27771	39991	54432	71095	89970	111085
36	1070	4279	9627	17114	26741	38508	52413	68458	86642	106965
54	1002	4008	9019	16034	25053	36076	49104	64135	81171	100212
72	910	3640	8189	14558	22748	32756	44585	58234	73702	90990
90	795	3181	7158	12725	19882	28630	38969	50898	64418	79528
108	661	2644	5950	10577	16527	23799	32393	42309	53548	66108
126	511	2042	4595	8170	12765	18382	25020	32679	41359	51060
144	348	1390	3128	5561	8689	12512	17030	22243	28152	34755
162	176	704	1583	2815	4399	6334	8621	11260	14251	17594
180	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Notă : $\alpha_{03} = \beta_{01} = \alpha_{01} + \pi$ $\quad \beta_{03} = \alpha_{01}$
$\alpha_{04} = \beta_{02} = \alpha_{02} + \pi$ $\quad \beta_{04} = \alpha_{02}$

Vibratorul poate funcţiona producînd numai momente în raport cu axa Oz şi în situaţia în care

$$\alpha_{02} = \beta_{01} = \alpha_{01} + \pi; \quad \beta_{02} = \alpha_{01}, \qquad \alpha_{04} = \beta_{03} = \alpha_{03} + \pi, \quad \beta_{04} = \alpha_{03}, \tag{18}$$

cînd

$$M_z = 2F_c\,(l_2 - l_1)\,(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_3),$$

$$M_{0z} = 16{,}5\,f^2 \cos\frac{\alpha_{01} - \alpha_{03}}{2}\ [\mathrm{N\cdot m}]. \tag{19}$$

Valorile amplitudinilor M_{0z} în acest caz, pentru diferite situații de funcționare a vibratorului, sînt prezentate în tabelul 3. Aceste valori sînt mai mici decît cele din tabelul 2.

Tabelul 3

Amplitudinile momentelor de excitație M_{OZ}

$\alpha_{01}-\alpha_{03}$ [grade]	Frecvența, în Hz									
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
	Amplitudinile momentelor M_{0z}, în N·m									
0	412	1650	3712	6598	10310	14846	20208	26394	33404	41240
18	407	1629	3666	6517	10183	14664	19959	26069	32993	40732
36	392	1569	3530	6275	9805	14120	19219	25102	31769	39222
54	367	1470	3307	5879	9186	13228	18005	23517	29764	36745
72	334	1335	3003	5338	8341	12011	16348	21353	27025	33364
90	292	1166	2624	4666	7290	10498	14289	18663	23620	29161
108	242	970	2182	3878	6060	8726	11878	15514	19635	24240
126	187	749	1685	2996	4681	6740	9174	11982	15165	18723
144	127	510	1147	2039	3186	4588	6244	8156	10323	12744
162	64,5	258	581	1032	1613	2322	3161	4129	5226	6451
180	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Notă: $\alpha_{02} = \beta_{01} = \alpha_{01} + \pi$ $\quad \beta_{02} = \alpha_{01}$
$\alpha_{04} = \beta_{03} = \alpha_{03} + \pi$ $\quad \beta_{04} = \alpha_{03}$

3.3. PRODUCEREA SIMULTANĂ A UNOR FORȚE DINAMICE PE DIRECȚIA *Oy* ȘI A UNOR MOMENTE ÎN RAPORT CU AXA *Ox*

Un interes practic deosebit îl prezintă și funcționarea vibratorului avînd discurile fixate pe axe în pozițiile pentru care:

$$\alpha_{04} = \alpha_{01};\quad \beta_{01} = \beta_{04} = \alpha_{01} + \pi,$$
$$\alpha_{03} = \alpha_{02};\quad \beta_{02} = \beta_{03} = \alpha_{02} + \pi. \tag{20}$$

În acest caz se obţine :

$$F_y = 4F_c\ (\sin\ \alpha_1 + \sin\ \alpha_2) =$$

$$= 8F_c \cos \frac{\alpha_{01} - \alpha_{02}}{2} \sin\left(\frac{\alpha_{01} + \alpha_{02}}{2} + \omega t\right),$$

$$M_x = 4F_c\, a\ (\cos\ \alpha_1 + \cos\ \alpha_2) = \tag{21}$$

$$= 8F_c\, a \cos \frac{\alpha_{01} - \alpha_{02}}{2} \cos\left(\frac{\alpha_{01} + \alpha_{02}}{2} + \omega t\right),$$

$$F_z = 0, \quad M_y = M_z = 0.$$

Amplitudinile sarcinilor dinamice produse de vibrator sînt :

$$F_{0y} = 8F_c \cos \frac{\alpha_{01} - \alpha_{02}}{2} = 300\, f^2 \cos \frac{\alpha_{01} - \alpha_{02}}{2}\ [\mathrm{N}], \tag{22}$$

$$M_{0x} = 8F_c\, a \cos \frac{\alpha_{01} - \alpha_{02}}{2} = 52{,}5\, f^2 \cos \frac{\alpha_{01} - \alpha_{02}}{2}\ [\mathrm{N \cdot m}],$$

Expresia amplitudinii F_{0y} este identică cu cea pe care o are F_{0z} în relaţia (8). Ca urmare, pentru aceleaşi valori ale frecvenţei f şi respectiv ale diferenţei $(\alpha_{01} - \alpha_{02})$, valorile amplitudinii F_{0y} coincid cu cele ale amplitudinii F_{0z}, putînd fi extrase din tabelul 1. Amplitudinile momentului M_x sînt proporţionale cu F_{0y},

$$M_{0x} = 0{,}175\, F_{0y}[\mathrm{N \cdot m}]. \tag{23}$$

Este de menţionat diferenţa de fază dintre cele două sarcini dinamice F_y şi M_x, aceasta fiind de 90°.

4. DOMENIUL DE UTILIZARE A VIBRATORULUI VMME—250kN

Vibratorul VMME-250 kN a fost proiectat şi construit pentru producerea vibraţiilor fundaţiilor experimentale sau reale în cadrul încercărilor pentru determinarea coeficienţilor elastici dinamici şi a altor caracteristici dinamice ale terenurilor de fundaţii. Forţele şi momentele dinamice pe care le realizează pot fi reglate într-o gamă largă de amplitudini. Ca urmare, vibratorul poate fi utilizat atît în cadrul experimentărilor cu fundaţii mici, cît şi al celor efectuate pe fundaţii mari şi foarte mari.

În perioada 1979—1980, vibratorul VMME-250 kN a fost folosit pentru efectuarea experimentărilor din cadrul unui număr de şapte contracte de cercetare ştiinţifică ale Catedrei de rezistenţa materialelor din Institutul politehnic Bucureşti. Pe platformele combinatelor petrochimice de la Midia-Năvodari, Brazi, Teleajen şi pe platforma industrială de la

Cernavodă s-au efectuat experimentări pentru determinarea coeficienților elastici și a factorilor de amortizare ai solului. În cadrul acestor experimentări s-au folosit fundații avînd greutăți pînă la 10750 kN și suprafața de rezemare pe sol pînă la 221 m^2.

În cursul anului 1981, vibratorul VMME-250kN a fost folosit pentru efectuarea unor măsurări de vibrații pe două nave comerciale fabricate în țară, avînd deplasamentele de 15000 tdw și respectiv 7500 tdw.

Caracteristicile tehnice generale ale vibratorului sînt prezentate în tabelul 4.

Tabelul 4

Caracteristici tehnice ale vibratorului VMME-250 kN

Dezechilibrul dinamic total maxim		7,6 kg·m
Amplitudinea maximă a forței dinamice		250 kN
Numărul treptelor de reglare a amplitudinilor forțelor dinamice		10
Amplitudinea maximă a momentului dinamic		112,5 kN·m
Numărul treptelor de reglare a amplitudinilor momentelor dinamice		20
Domeniul frecvențelor de funcționare a vibratorului		4...50Hz
Puterea electrică maximă absorbită		14 kW
Dimensiunile de gabarit ale vibratorului	lungimea	1425 mm
	lățimea	884 mm
	înălțimea	415 mm
Dimensiunile plăcii de bază	lungimea	1750 mm
	lățimea	1415 mm
	grosimea	60 mm
Masa vibratorului		800 kg
Masa plăcii de bază		1400 kg

BIBLIOGRAFIE

1. GH. BUZDUGAN, *Izolarea antivibratorie a mașinilor*, Edit. Academiei R.S.România, București, 1980.
2. GH. BUZDUGAN, I. CONSTANTINESCU, I. MINCĂ, B. IONESCU, *Realizarea unei instalații pentru determinarea coeficientului elastic dinamic al solului C_z, folosit în proiectarea fundațiilor de mașini*, Construcții, 5 (1978).
3. GH. BUZDUGAN, I. CONSTANTINESCU, M. RADEȘ, I. MINCĂ, E. MIHĂILESCU, C. VOICU, B. IONESCU, *Determinări experimentale ale caracteristicilor elastice dinamice pentru diferite soluri*, în volumul de comunicări al Conferinței „Vibrații în construcția de mașini", Timișoara 1978.

Primită la redacție la 24 aprilie 1982

CÎTEVA OBSERVAȚII ASUPRA FUNCȚIONĂRII UNOR POMPE DE APĂ DE RĂCIRE DE TIP MV-1002 (RADIAL-AXIALE)

de DECEBAL VLĂDĂIANU, MARIA GIUȘCĂ

Institutul de studii și cercetări hidroenergetice, București

S-au efectuat încercări experimentale pe două modele, unul cu rotor în mișcare și altul fără, în vederea stabilirii dispozitivelor necesare pe aspirație, care să conducă la îmbunătățirea funcționării pompelor de tipul MV-1002 centrifuge cu ax vertical. Verificarea rezultatelor obținute pe model s-a efectuat în instalația industrială prin măsurători energetice și de cavitație (metoda vibroacustică) în situația inițială și după introducerea dispozitivelor.

1. GENERALITĂȚI

Stația de pompare pentru apă de răcire a grupului TA3 de la C.E.T. Galați este echipată cu două pompe centrifuge cu ax vertical de tipul MV-1002 și cu următorii parametri energetici : $Q = 2{,}8$ mc/s ; $H = 25$ m ; $P = 800$ kW ; $n = 600$ rot/min $D_1 = 1000$ mm și $H_{gs} = -2$m.

Pompele aspiră apa dintr-un bazin de $9{,}65 \times 5{,}15 \times 6{,}5$ m, alimentat prin două conducte laterale. Aspirația pompei este realizată cu tub de aspirație (fig. 1) sub forma unui cot convergent realizat din 10 segmente și

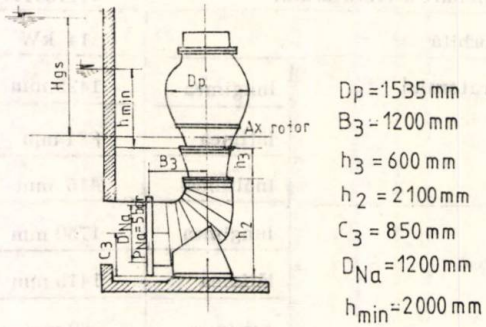


Fig. 1. — Dispoziția cu cot pe aspirație a pompei MV-1002 de la CET Galați.

pe interior cu un perete despărțitor pe direcția axului cotului. După cot mai este prevăzut un tronson cilindric cu trei aripioare la 120° pentru dirijarea curentului.

Încercările experimentale s-au efectuat pe două modele la aceeași scară 1 : 5, unul fără rotor în mișcare și altul cu rotor în mișcare.

Studiile efectuate pe model au avut ca scop următoarele :

— stabilirea dispozitivelor necesare a se introduce pe partea de aspirație pentru uniformizarea vitezelor la intrarea în rotor ;

— etalonarea cotului de pe aspirație (cu și fără rotor în mișcare) cu scopul de a-l utiliza la măsurarea debitului evacuat de pompe în instalația industrială ;

— determinarea gradului de funcționare la cavitație a pompei prin măsurători vibroacustice (metodă brevetată de autori ca invenție) ;

— compararea rezultatelor experimentale obținute pe un model cu și fără rotor în mișcare.

Pentru aceasta s-au efectuat următoarele măsurători :

— pierderile de sarcină pe partea de aspirație ;

— repartițiile de viteze spațiale într-o secțiune, înainte de intrarea în rotor ;

— presiunile la prizele de pe bisectoarea unghiului cotului ;

— vibrațiile într-un punct situat pe zona de aspirație ale modelului de pompă ;

— măsurători energetice pe modelul de pompă.

Încercările experimentale în instalația industrială s-au efectuat la cele două pompe, în situația în care una dintre pompe era fără modificări pe partea de aspirație și cealaltă cu modificări. Modificările efectuate nu au putut fi realizate în conformitate cu cele de pe model, din motive tehnologice.

Măsurătorile energetice și vibroacustice s-au efectuat la ambele pompe în variantele de funcționare : individuale sau în grup.

Pompele au funcționat în regim cu cavitație, întrucît așa cum s-a putut observa la demontarea lor pentru reparații, după un număr destul de mic de ore de funcționare (3000 ore) rotoarele aveau bordurile de atac ale palelor în întregime distruse.

2. REZULTATE EXPERIMENTALE OBȚINUTE PE MODEL

S-au efectuat încercări experimentale pe două modele și anume :

— un model de pompă tip MV cu rotor în mișcare, cu partea de aspirație similară cu aceea de la pompele de apă de răcire ale grupului TA3 (cu cot pe aspirație) ;

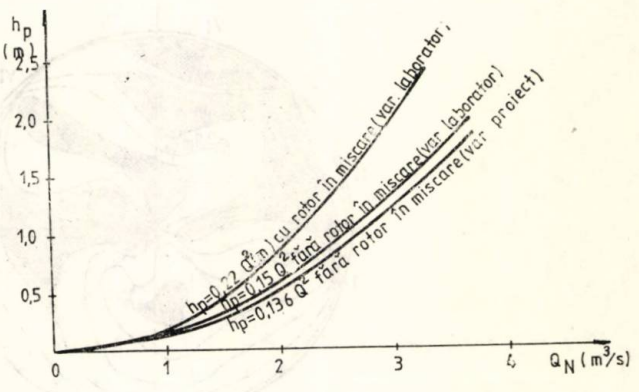


Fig. 2. — Pierderile de sarcină pe aspirația pompelor MV-1002 la CET Galați (varianta cu cot — determinată pe model).

— un model fără rotor în mișcare (fig. 1), unde s-au realizat ambele conducte de aspirație ale celor două pompe, curgerea pe model fiind asigurată prin sifonare.

Ambele modele au fost construite la aceeași scară de similitudine geometrică de 1 : 5.

Pe modele, din încercările experimentale efectuate, s-au determinat următoarele :

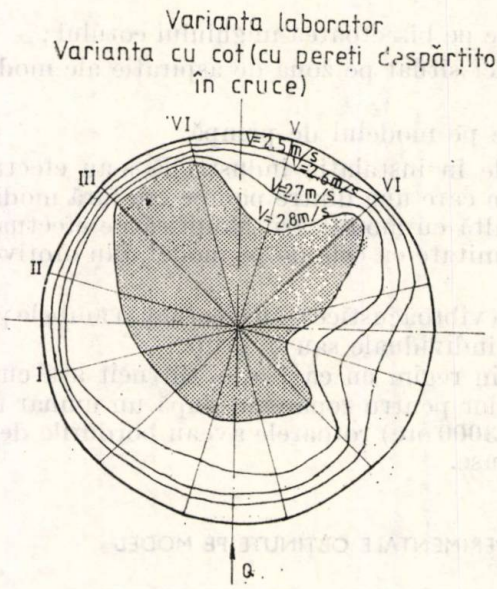
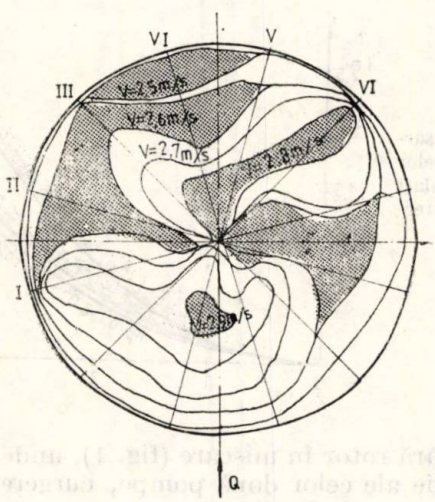


Fig. 3. — Repartițiile de viteze V = constant într-o secțiune din amonte de rotor.



— pierderile de sarcină pe partea de aspirație în trei variante și anume varianta proiect cu și fără rotor în mișcare, cotul de aspirație cu un perete despărțitor și în varianta laborator fără rotor în mișcare, cotul de aspirație cu pereți în cruce;

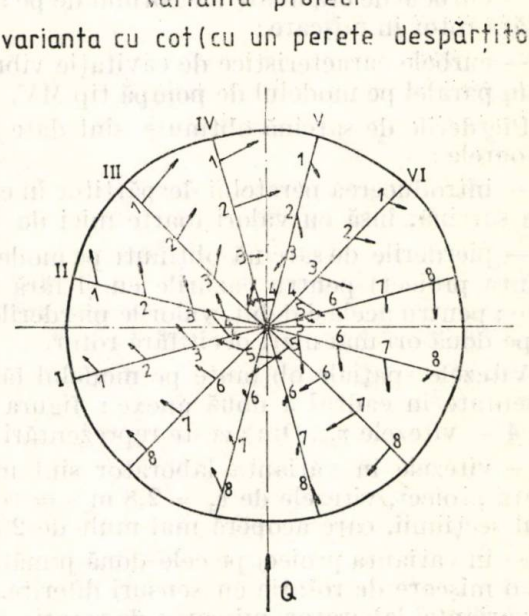
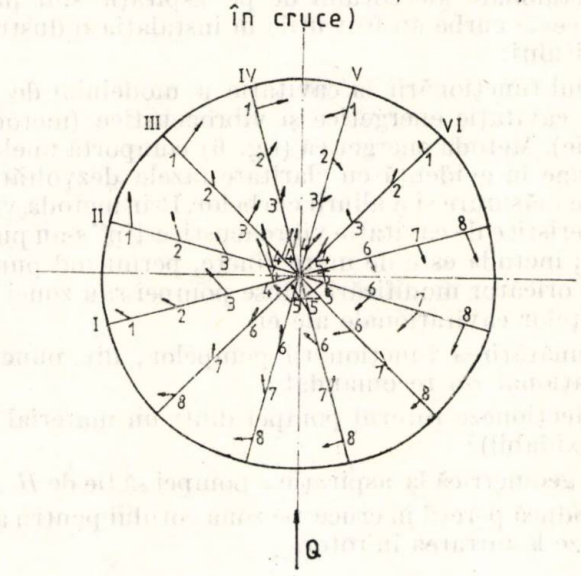


Fig. 4. — Repartițiile de viteze Vyz în punctele de măsurare, într-o secțiune din amonte de rotor.



— repartițiile de viteze spațiale într-o secțiune înainte de intrarea în rotor și anume : vitezele v_x = const. (perpendiculare pe secțiunea de măsurare) și vitezele v_{yz} din planul secțiunii de măsurare (încercările s-au efectuat pe modelul fără rotor în mișcare pentru cele două variante, proiect și laborator) ;

— curbele de etalonare ale cotului de pe aspirație în varianta proiect, cu și fără rotor în mișcare ;

— curbele caracteristice de cavitație vibroacustice și energetice efectuate în paralel pe modelul de pompă tip MV.

Pierderile de sarcină obținute sînt date în figura 2, de unde rezultă următoarele :

— introducerea peretelui despărțitor în cruce, face să crească pierderile de sarcină, însă cu valori foarte mici de 3—5 %, practic neglijabile ;

— pierderile de sarcină obținute pe model pentru o aceeași variantă (varianta proiect) pentru cazurile cu și fără rotor în mișcare sînt mult diferite ; pentru același debit, valorile pierderilor cu rotor în mișcare sînt de aproape două ori mai mari decît fără rotor.

Vitezele spațiale obținute pe modelul fără rotor în mișcare au fost reprezentate în cadrul a două anexe : figura 3 — vitezele v_x = const. și figura 4 — vitezele v_{zy}. Din aceste reprezentări rezultă următoarele :

— vitezele în varianta laborator sînt mult mai uniforme decît în varianta proiect, vitezele de $v_x = 2{,}8$ m/s = const. formează un nucleu în centrul secțiunii, care acoperă mai mult de 2/3 din suprafață ;

— în varianta proiect pe cele două jumătăți ale secțiunii de măsurare există o mișcare de rotație cu sensuri diferite. Această mișcare dispare în cazul variantei laborator, mișcarea de rotație existînd totuși, cu centrul în centrul secțiunii de măsurare și cu sensul de rotație identic cu cel al pompei, ceea ce este favorabil funcționării pompei.

Curbele de etalonare ale cotului de pe aspirație sînt prezentate în cadrul figurii 5. Aceste curbe au fost utile în instalația industrială, pentru determinarea debitului.

Pentru studiul funcționării la cavitație a modelului de pompă s-au făcut încercări de cavitație energetice și vibroacustice (metodă care este propusă ca invenție). Metoda energetică (fig. 6) comportă unele neajunsuri în sensul că nu pune în evidență cu claritate fazele dezvoltării cavitației datorită erorilor de măsurare și a aliurii curbelor. Prin metoda vibroacustică a „curbelor caracteristice de cavitație vibroacustice tip" s-au putut înlătura aceste neajunsuri ; metoda este de mare finețe, permițînd punerea în evidență a influenței oricăror modificări aduse pompei sau zonei de aspirație asupra performanțelor cavitaționale ale ei.

Pentru îmbunătățirea funcționării pompelor, din punct de vedere energetic și cavitațional s-a recomandat :

— să se confecționeze rotorul pompei dintr-un material rezistent la cavitație (oțel inoxidabil) ;

— înălțimea geometrică la aspirație a pompei să fie de $H_{gs} \leqslant -2{,}5$ m ;

— să se introducă pereții în cruce pe zona cotului pentru a uniformiza distribuția de viteze la intrarea în rotor.

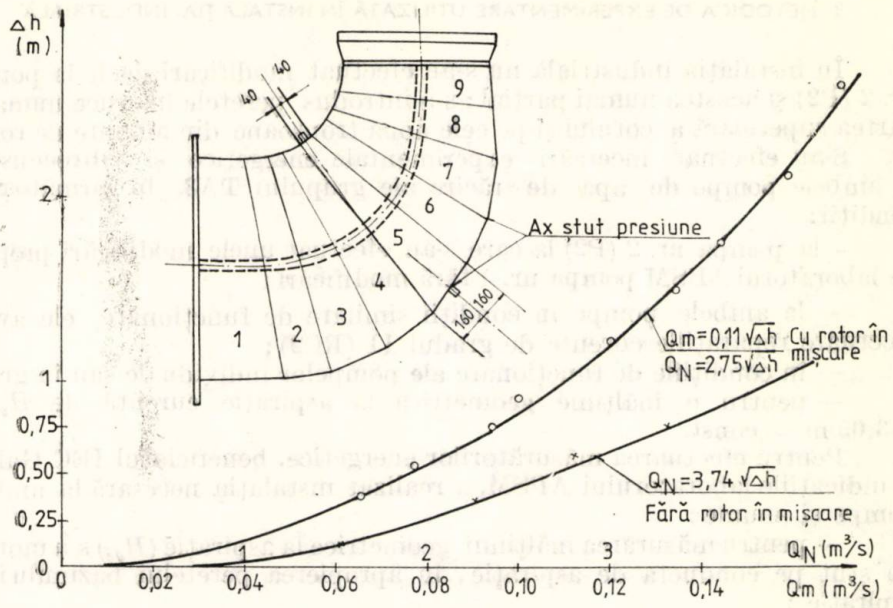


Fig. 5. — Curba de etalonare a cotului de pe aspirația pompei de tip MV.

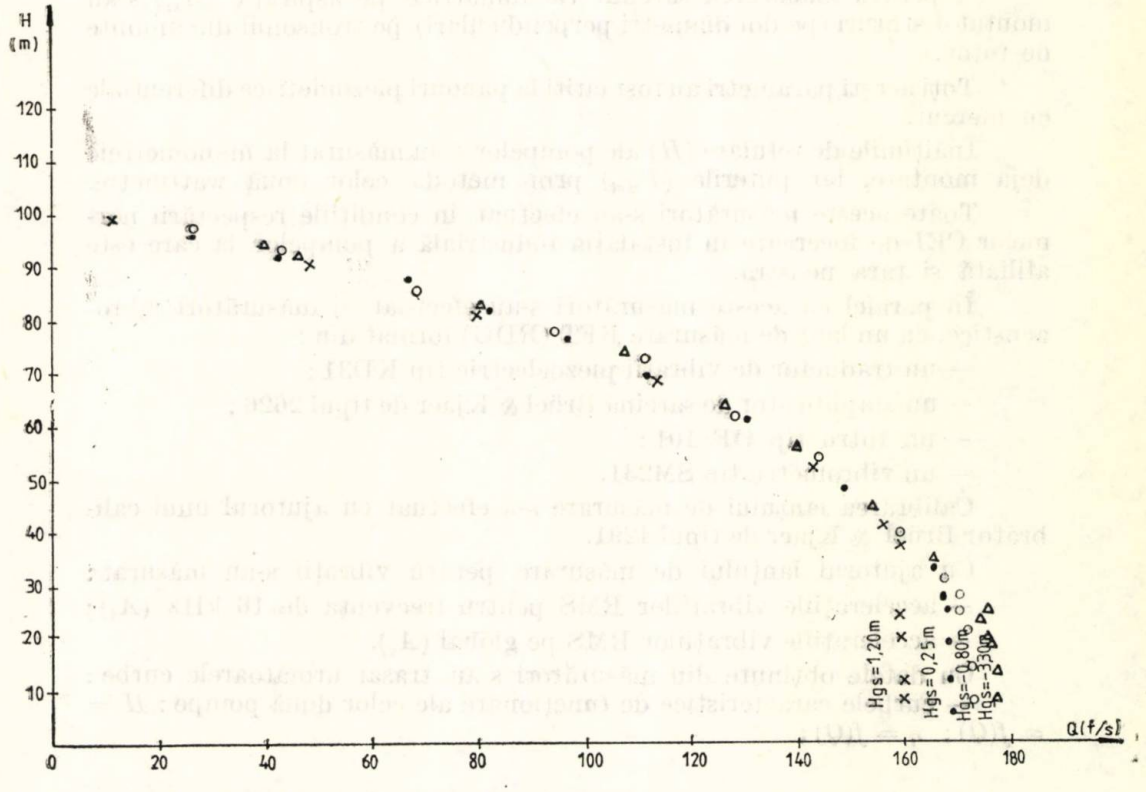


Fig. 6. — Curbele caracteristice interioare de funcționare a unei pompe centrifuge pentru valori Hgs = constant diferite.

3. METODICA DE EXPERIMENTARE UTILIZATĂ ÎN INSTALAȚIA INDUSTRIALĂ

În instalația industrială nu s-au efectuat modificări decît la pompa nr. 2 (P2) și acestea numai parțial; s-a introdus peretele în cruce numai la partea superioară a cotului și pe cele două tronsoane din amonte de rotor.

S-au efectuat încercări experimentale energetice și vibroacustice la ambele pompe de apă de răcire ale grupului TA3, în următoarele condiții:

--la pompa nr. 2 (P2) la care s-au efectuat unele modificări propuse de laboratorul APSM pompa nr. 1 fără modificări:

— la ambele pompe în condiții similare de funcționare, ele avînd efectuate reparațiile curente de gradul II (RC2);

— în condițiile de funcționare ale pompelor individuale sau în grup;

— pentru o înălțime geometrică la aspirație curentă de $H_{gs} = -3{,}05$ m = const.

Pentru efectuarea măsurătorilor energetice, beneficiarul IEC Galați, la indicațiile laboratorului APSM, a realizat instalația necesară la ambele pompe și anume:

— pentru măsurarea înălțimii geometrice la aspirație (H_{gs}) s-a montat un ștuț pe conducta de aspirație, în apropierea peretelui bazinului de aspirație;

— pentru măsurarea debitului (Q) s-au montat cele două ștuțuri pe bisectoarea unghiului cotului de aspirație;

— pentru măsurarea sarcinii vacuumatrice pe aspirație (H_{sv}) s-au montat 4 ștuțuri (pe doi diametri perpendiculari) pe tronsonul din amonte de rotor.

Toți acești parametri au fost citiți la panouri piezometrice diferențiale cu mercur.

Înălțimile de refulare (H) ale pompelor s-au măsurat la manometrele deja montate, iar puterile (P_{mot}) prin metoda celor două wattmetre.

Toate aceste măsurători s-au efectuat în condițiile respectării normelor CEI de încercare în instalația industrială a pompelor la care este afiliată și țara noastră.

În paralel cu aceste măsurători s-au efectuat și măsurători vibroacustice, cu un lanț de măsurare RFT (RDG) format din:

— un traductor de vibrații piezoelectric tip KD31;

— un amplificator de sarcină Brüel & Kjaer de tipul 2626;

— un filtru tip OF 101;

— un vibrometru tip SM231.

Calibrarea lanțului de măsurare s-a efectuat cu ajutorul unui calibrator Brüel & Kjaer de tipul 4291.

Cu ajutorul lanțului de măsurare pentru vibrații s-au măsurat:

— accelerațiile vibrațiilor RMS pentru frecvența de 16 kHz (A_i);

— accelerațiile vibrațiilor RMS pe global (A_g).

Cu datele obținute din măsurători s-au trasat următoarele curbe:

— curbele caracteristice de funcționare ale celor două pompe: $H = f(Q)$; $\eta = f(Q)$;

— pierderile de sarcină h_{pt} pe tubul de aspirație la cele două pompe cu și fără modificări, $h_{pt} = f(Q)$;

— curbele caracteristice de cavitație vibroacustice: $A_{i,g} = f(Q)$.

Din analiza rezultatelor experimentale astfel prezentate s-au putut trage concluzii în ceea ce privește;

— încadrarea curbei caracteristice interioare de funcționare a pompei în curbele de funcționare date de furnizorul pompei, pentru valori de diametri diferiți;

— compararea rezultatelor experimentale obținute în instalația industrială cu acelea de pe model;

— influența modificărilor aduse și modul de funcționare din punct de vedere energetic și cavitațional al celor două pompe, una cu modificări și alta fără modificări și pentru regimuri de funcționare diferite.

4. REZULTATELE EXPERIMENTALE OBȚINUTE ÎN INSTALAȚIA INDUSTRIALĂ

Rezultatele experimentale obținute au fost reprezentate grafic în cadrul a patru figuri (fig. 7 — fig. 10).

Randamentul pompelor este orientativ, el a fost calculat, considerînd randamentul motorului electric constant de 98%, întrucît furnizorul motorului electric nu a dat curbele caracteristice de funcționare ale lui.

Din analiza acestor rezultate s-au tras următoarele concluzii:

— pompele își schimbă punctul de funcționare în funcție de regimul lor de funcționare, individual sau în grup;

— randamentele obținute la cele două pompe le putem considera ca fiind similare, diferențiale existente fiind datorate erorilor de măsurare admisibile în conformitate cu normele CEI;

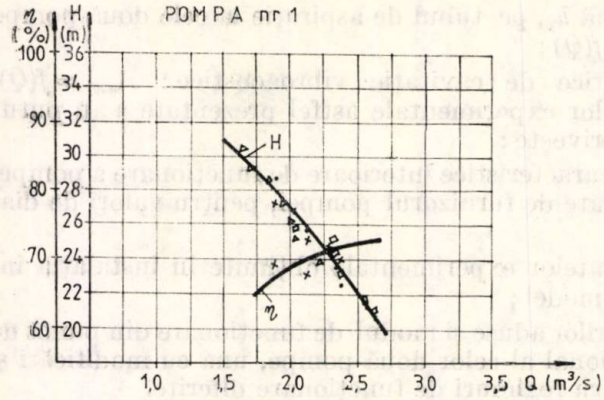
— din încadrarea curbei caracteristice de funcționare a pompei MV 1002 determinată pe cale experimentală în curbele caracteristice variabile în funcție de diametrul D al rotorului pompei, a rezultat că diametrul pompei este de $D = 910$ mm (fig. 8);

— pierderile de sarcină la pompa nr. 1 sînt mai mici ca la pompa nr. 2, diferența este de 0,25 m în punctul optim de funcționare, aceasta din cauza introducerii dispozitivelor de îmbunătățire a curgerii;

— pierderile de sarcină obținute la pompa nr. 1 fără modificări pe partea de aspirație, au rezultat ca fiind similare cu acelea obținute pe model (vezi fig. 2 și 9);

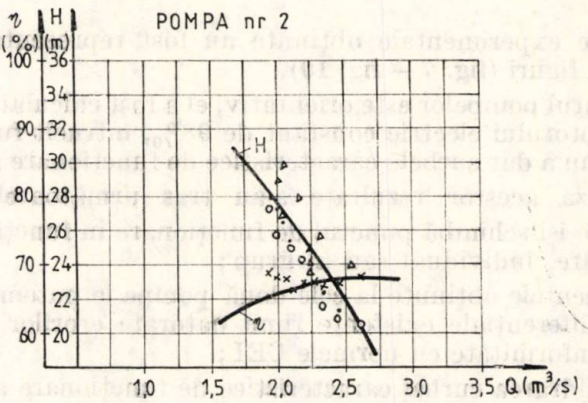
— din punct de vedere cavitațional, așa cum rezultă din figura 10, pompele funcționează în regim fără cavitație în cazul cînd sînt în grup;

— în regim de funcționare individuală, pompa nr. 1 are punctul critic de funcționare la cavitație la $Q = 2{,}55$ mc/s, iar pompa nr. 2 funcționează în regim de pseudocavitație, neajungînd la punctul critic, ceea ce înseamnă că necesită mărirea în valoare absolută a înălțimii geometrice de aspirație (funcționarea în regim de pseudocavitație a unei pompe nu are influență asupra parametrilor ei energetici).



• P_1 funcționează singură, în regim variabil;
▲ P_1 și P_2 funcționează în paralel, P_1 în regim variabil

Fig. 7. — Curbele caracteristice de funcționare ale pompelor determinate în instalația industrială.



• P_2 funcționează singură, în regim variabil;
▲ P_2 și P_1 funcționează în paralel, P_2 în regim variabil

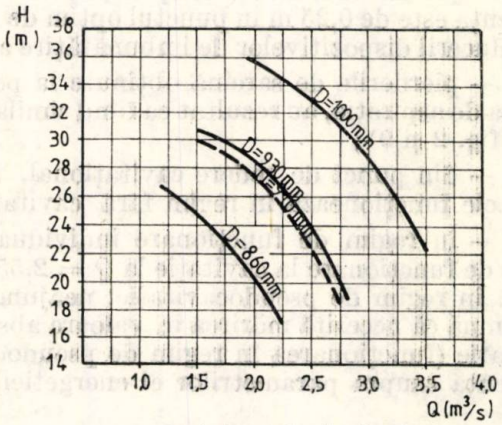


Fig. 8. — Curba caracteristică interioară de funcționare a pompei MV-1000 (n = 600 rot/min) de la CET Galați.

Din cele de mai înainte rezultă o îmbunătățire a performanțelor cavitaționale ale pompei nr. 2, dar nu suficientă. Rezultă că ar fi trebuit efectuate în totalitate modificările propuse de ISPH—APSM, în vederea asigurării performanțelor energetice și cavitaționale ale pompelor în orice regim de funcționare ale lor.

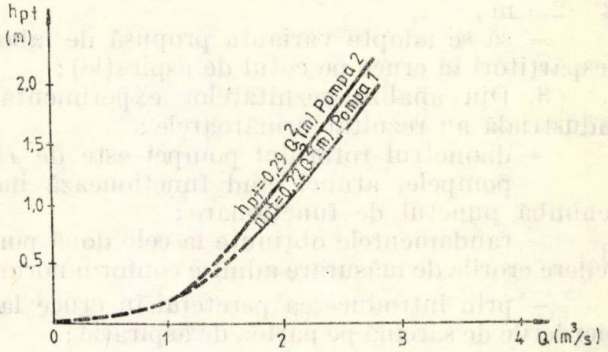


Fig. 9. — Pierderile de sarcină pe partea de aspirație determinate în instalația industrială.

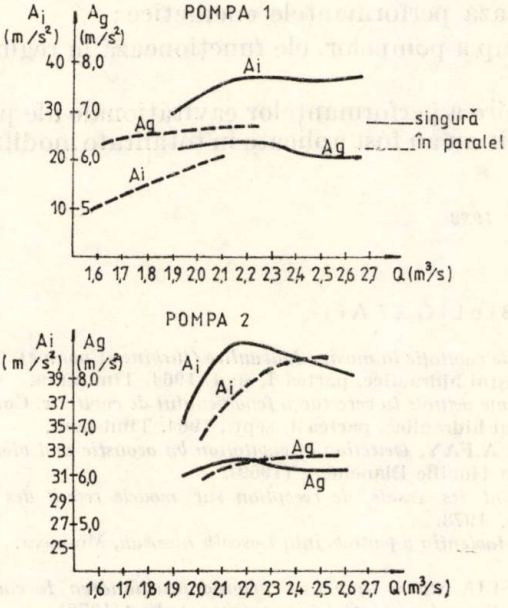


Fig. 10. — Curbele caracteristice vibroacustice de cavitație ale pompelor determinate în instalația industrială.

5. CONCLUZII

Din cele de mai înainte rezultă următoarele concluzii :

1. Din analiza rezultatelor experimentale obținute pe cele două modele a rezultat că introducerea peretelui în cruce face să crească cu puțin pierderile de sarcină pe aspirație, dar conduce la o repartiție de viteze mai

uniformă la intrarea în rotor şi la îmbunătăţirea performanţelor cavitaţionale ale pompei.

2. Avînd în vedere rezultatele experimentale obţinute pe model, s-au propus următoarele îmbunătăţiri :

— să se confecţioneze rotorul pompei dintr-un material mai rezistent la cavitaţie (inox) ;

— înălţimea geometrică la aspiraţie a pompei să fie de $H_{gs} \leqslant \leqslant -2{,}5$ m ;

— să se adopte varianta propusă de laboratorul APSM (cu pereţii despărţitori în cruce pe cotul de aspiraţie) ;

3. Din analiza rezultatelor experimentale obţinute în instalaţia industrială au rezultat următoarele :

— diametrul rotorului pompei este de $D = 910$ mm ;

— pompele, atunci cînd funcţionează individual sau în grup, îşi schimbă punctul de funcţionare ;

— randamentele obţinute la cele două pompe sînt similare avînd în vedere erorile de măsurare admise conform normelor CEI ;

— prin introducerea peretelui în cruce la pompa nr. 2 au crescut pierderile de sarcină pe partea de aspiraţie ;

— la funcţionarea individuală, pompa nr. 1 are punctul critic la cavitaţie $Q = 2{,}55$ mc/s, iar pompa nr. 2 funcţionează în regim pseudo-cavitaţional, care nu-i alterează performanţele energetice ;

— la funcţionarea în grup a pompelor, ele funcţionează în regim fără cavitaţie.

4. Rezultă o îmbunătăţire a performanţelor cavitaţionale ale pompei nr.2, dar nu suficientă, întrucît nu au fost aplicate în totalitate modificările propuse.

Primită la redacţie la 24 martie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. I. ANTON, *Curbele caracteristice de cavitaţie la maşini hidraulice (turbine şi pompe)*, Comunicările Conferinţei de maşini hidraulice, partea I, sept. 1964, Timişoara.
2. F. GYULAI şi alţii, *Cîteva probleme actuale în cercetarea fenomenului de cavitaţie*. Comunicările Conferinţei de maşini hidraulice, partea I, sept., 1964, Timişoara.
3. J. J. VARGA, G. SEBESTYEN, A.FAY, *Detection of cavitation by acoustic and vibration—measurement methods*, La Houille Blanche, *2* (1969).
4. * * * *Code international concernant les essais de reception sur modele reduit des pompes d'accummulation*, Suisse, 1973.
5. V. IA. KARELIN, *Kavitaţionnîe iavleniia v ţentrobejnîh i osevîh nasosah*, Moscova, Maşinostroenie, 1975.
6. D. VLĂDĂIANU, V. MARINESCU, *Studii în natură privind funcţionarea la cavitaţie a unor pompe centrifuge de dimensiuni mari*, St. cerc. mec. apl., *1* (1978).
7. D. VLĂDĂIANU, V. MARINESCU, *Etudes en nature concernant la fonctionnement à la cavitation des pompes axiales de grandes dimensions*, Rev. Roum. de Sci. Tech., Mecanique Appliqué, *1* (1979).
8. D. VLĂDĂIANU, M. GIUŞCĂ, *Studii privind forma zonei de aspiraţie a pompelor de apă caldă de la CTE Deva, fără încercări pe model*, mai 1979, referat intern ISPH.
9. R. R. CIUGAEV, *Ghidravlika*, Energhiia, Leningrad, 1970.
10. D. VLĂDĂIANU, V. MARINESCU, M. GIUŞCĂ, *Proceden de evidenţiere şi de evitare a apariţiei fenomenului de cavitaţie la funcţionarea unei pompe*, brevet de invenţie nr. 78.192, conform hotărîrii OSIM nr. 33.826 din 17.08.1981.

REGLEMENTAREA PAŞNICĂ A DIFERENDELOR INTERNAŢIONALE

Este aproape evident că dreptul fundamental al omului este acela de a trăi, de a trăi şi de a munci în pace. În condiţiile actuale datoria cea mai importantă a tuturor oamenilor şi mai ales a oamenilor politici ca şi a oamenilor de ştiinţă este de a menţine pacea. A menţine pacea, aceasta este echivalent astăzi cu a face să supravieţuiască întreaga omenire.

Situaţia politică şi economică mondială actuală foarte complexă a făcut uneori aproape inevitabile situaţii conflictuale între diferitele state ale lumii. Se întîmplă adesea că asemenea conflicte încep foarte uşor, dar totdeauna este foarte greu de a le găsi soluţii. Dacă se recurge la forţa militară sau la ameninţarea cu forţa problema devine şi mai grea şi, în condiţiile unor puternice tensiuni internaţionale existente, un conflict militar, în ori care loc din lume, poate constitui scînteia unui viitor război mondial, care, după opinia oamenilor de ştiinţă de autoritate recunoscută, este echivalent cu sfîrşitul omenirii.

Consideraţiile de mai sus arată importanţa reglementării conflictelor internaţionale prin mijloace paşnice. Acesta este motivul pentru care România a propus acum trei ani, la sesiunea Adunării generale a Organizaţiei Naţiunilor Unite din 1979 o asemenea reglementare a conflictelor internaţionale. Membrii O.N.U. au fost toţi de acord să se redacteze o declaraţie privind această reglementare. S-a început redactarea acestei declaraţii în anul 1980 şi, la 15 noiembrie 1982, Adunarea generală a O.N.U. a adoptat-o prin consens.

„Declaraţia" recomandă statelor membre în primul rînd să promoveze relaţii bazate pe încredere reciprocă şi să evite stări de tensiune care duc la afectarea relaţiilor prieteneşti. Dacă se ajunge la o astfel de stare, este necesar să se caute rapid o soluţie, fie prin negociere directă, fie prin mediaţie, conciliere, reglementare judiciară, bune oficii etc... Dacă nu se ajunge repede la o soluţie acceptabilă, statele trebuie să continue să caute mijloace paşnice pentru a rezolva conflictul şi pentru a respecta în relaţiile reciproce principiile fundamentale ale dreptului internaţional în ceea ce priveşte suveranitatea naţională, independenţa şi integritatea teritorială. Statele trebuie să evite orice acţiune care ar putea agrava situaţia, pune în pericol securitatea internaţională sau care să facă mai dificilă rezolvarea conflictului. În orice caz, statele trebuie să se abţină de a folosi forţa.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 2, 1983, P. 203—204

În a doua parte a „Declarației" se fac recomandări de a se folosi mai eficient mecanismul O.N.U., procedurile și mijloacele prevăzute în Carta Națiunilor Unite pentru reglementarea conflictelor, de a face cunoscut Adunării generale O.N.U. orice situație care ar putea conduce la un conflict internațional, de a supune conflictele Consiliului de Securitate, de a recurge la Curtea Internațională de Justiție pentru reglementarea conflictelor juridice. În același timp „Declarația" cere Secretarului general al O.N.U. să utilizeze mai bine posibilitățile pe care i le oferă Carta.

Toate aceste prevederi permit ca O.N.U. să joace un rol mai important, mai activ pentru a preveni și rezolva în mod pașnic conflictele internaționale.

În ultima parte a „Declarației" este prevăzut să se continue dezvoltarea dreptului internațional în ceea ce privește eficiența O.N.U. în acest domeniu. Rezultă că „Declarația" constituie în același timp un început, care deschide largi perspective și posibilități de a acționa pentru a rezolva pe cale pașnică conflictele internaționale.

Unanimitatea cu care Adunarea generală O.N.U. a adoptat „Declarația" pentru reglementarea pe cale pașnică a diferendelor internaționale, faptul că 39 de state s-au raliat în calitate de coautori ai textului „Declarației", aprecierile elogioase făcute de Secretarul general al O.N.U. toate acestea arată importanța acestui document.

Ceea ce este esențial în acest moment este de a-l aplica în viața internațională. Oamenii de știință din țara noastră au primit cu mare satisfacție această declarație. Ca toți oamenii de știință din întreaga lume, ei nu pot rămîne indiferenți la modul cum sînt folosite rezultatele cercetărilor lor : pentru progresul omenirii sau pentru distrugerea planetei noastre. Ei văd în această declarație un pas important pe drumul păcii, progresului și civilizației.

Acad. RADU P. VOINEA

RECENZII

E. KLAPP, *Apparate-und Anlagentechnik* (Tehnica utilajelor și instalațiilor), Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1980, 848 pagini cu 443 ilustrații.

Volumul „Tehnica utilajelor și instalațiilor" are ca temă planificarea, calculul, construcția și exploatarea instalațiilor pentru transformarea materialelor și energiei. Lucrarea se adresează specialiștilor din domeniul ingineriei tehnologice și proiectării diferitelor tipuri de instalații tehnologice și energetice.

Materialul este prezentat în zece capitole după cum urmează :

1. Indicatori tehnico-economici.
2. Materiale, procedee de îmbinare.
3. Efectele și condițiile impuse de procesele tehnologice asupra proiectării componentelor instalațiilor de producție pentru transformarea materialelor și energiei.
4. Calcule de verificare și dimensionare, principii constructive.
5. Procedee de calcul și fenomene referitoare la construcție, independente de piesele componente.
6. Calculul și stabilirea formei pieselor componente.
7. Conducte din țevi și elemente de conducte.
8. Calculul și stabilirea formei utilajelor componente ale instalațiilor.
9. Montajul, amplasarea și exploatarea instalațiilor.
10. Siguranța în exploatare și fiabilitate.

În primul capitol se dau o serie de criterii privind planificarea și deciziile ce trebuie luate pebaza unor indicatori tehnico-economici în privința realizării unei investiții în domeniul instalațiilor de transformare a materialelor și energiei.

Al doilea capitol tratează despre criterii pentru alegerea materialelor utilizate în construcția instalațiilor, proprietățile mecanice ale materialelor, efectele coroziunii, metode de tratare precum și metode de sudare a materialelor.

În capitolul trei se discută despre o serie de criterii care influențează proiectarea instalațiilor și a utilajelor, ca probleme de transport și depozitare, fluxuri tehnologice, asigurarea și evacuarea energiei calorice, procedee de izolare.

Capitolul patru tratează despre utilizarea metodelor modelării în construcția de utilaje și instalații, calculele de rezistență, proiectarea, ținînd seama de deformarea materialelor și de protecția mediului înconjurător precum și de proiectarea asistată de calculator.

În capitolul cinci sînt expuse : procedee de calcul ca metodele elementului finit și diferențelor finite, utilizarea matricelor de transfer ; problema vibrațiilor ; probleme de stabilitate a structurilor ; tensiuni termice ; transmiterea sarcinilor la învelitori și la plăci ; mecanica ruperii.

Capitolul șase se ocupă de proiectarea diferitelor elemente constructive ca învelitori cilindrice, țevi, coturi, ștuțuri, compensatoare de dilatare, legături prin flanșe, etanșări, lagăre, iar capitolul șapte de conducte, fittinguri, armături.

În capitolul opt se tratează calculul și proiectarea diferitelor utilaje, cu multe exemple, cum sînt schimbătoarele de căldură, rezervoare sub presiune, coloane.

Capitolul nouă se ocupă de structurile portante, fundații, precum și de dispunerea utilajelor și a conductelor în cadrul instalațiilor. Se tratează, de asemenea, probleme legate de montaj, punere în funcțiune și întreținere a instalațiilor.

În cadrul capitolului zece sînt prezentate probleme de siguranță în exploatare și fiabilitate, printre care disponibilitatea instalațiilor ; controlul și procedee de control ; defecte, cauzele și evaluarea acestora.

Lucrarea, bogat ilustrată, cuprinde întreaga problematică legată de proiectarea, construcția și exploatarea instalațiilor tehnologice din domeniul transformării materialelor și energiei.

Gerhard Winter

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 2, 1983, P. 205—206

FERIDUN KORKMAZ, *Hydrospeicher als Energiespeicher* (Acumulatoare hidraulice ca acumulatoare de energie), Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1982, 135 p. cu il.

Volumul „Acumulatoare hidraulice ca acumulatoare de energie", a cărui apariție o semnalăm, tratează un aspect de cea mai mare actualitate privind utilizarea acumulatoarelorhidraulice. În ultimii ani acționările și comenzile hidraulice au cîștigat din ce în ce mai mult teren în cele mai diferite domenii ale construcției de mașini dintre care citățm construcțiile aerospațiale, robotica, mașini unelte, mașini și utilaje de construcții, diferite instalații industriale. O aplicație foarte importantă, care este încă în stadiul de cercetare și experimentare, o constituie recuperarea energiei de frînare la anumite categorii de vehicule.

În aceste condiții cartea este foarte utilă pentru un număr mare de specialiști caretrebuie să rezolve probleme legate de acumularea energiei în vederea utilizării ei ulterioare în sisteme hidraulice.

Cartea epuizează întreaga problematică legată de utilizarea acumulatoarelor hidraulice ca acumulatoare de energie, pornind de la modul de utilizare și domeniul de aplicație, tipuri constructive, tratînd apoi proprietățile unor purtători de energie cu pernă de gaz, schimbările de stare și ecuațiile de schimb aferente pentru gaze ideale și reale, calculul unor acumulatoare de energie și diferite exemple din practică, probleme de randament termodinamic și de mărirea capacității de energie. Materia este tratată în nouă capitole cu o bibliografie bogată, o anexă care cuprinde transformarea unor unități de măsură și un program FORTRANpentru simularea în calculator a funcționării, în vederea alegerii tipului de acumulator hidraulic cel mai potrivit pentru rezolvarea problemei, precum și un repertoriu cu termenii de specialitate tratați în carte.

De certă utilitate pentru proiectant sînt numărul mare de exemple practice, precum și de grafice, reprezentînd variația diferitelor mărimi de stare și funcționale folosite în calculele de dimensionare a acumulatoarelor de energie.

Gerhard Winter

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 42, nr. 3 mai-iunie 1983

SUMAR

STUDII

M.M. NIŢĂ, A. M. C. RALAITSIZAFY, Unele consideraţii privind optimizarea zborului avioanelor de transport 209

ALEXANDRU CODOBAN, Determinarea comenzilor necesare pentru mişcarea unei rachete pe o traiectorie rectilinie dată în atmosferă 223

ELENA UNGUREANU-DAVID, Mişcări automodelice ale fluidelor în medii poroase 240

FELICIA POPESCU, Asupra jeturilor la viteză critică 245

I. SETEANU, M. ERHAN, Dinamica curgerii turbulente în bieful aval al C.H.E. de joasă cădere 251

ROZICA DUMITRU, Asupra efectului cîmpului magnetic indus într-un generator MHD 259

I. BERBENTEA, Unde de şoc în tuburi 265

IULIAN POPESCU, Legi de mişcare realizabile de mecanismul cu culisă oscilantă. . . . 279

I. CONSTANTINESCU, N. CONSTANTIN, M. AL. SANDU, Utilizarea modelării în biomecanica sistemului osteo-articular 284

LUCIA MIHĂILESCU, Model de element finit şi program de calcul pentru analiza stabilităţii plăcilor plane 299

ADALBERT NAHLIK, ALEXANDRU PASTIA, Calculul de rezistenţă al unui rotor de suflantă cu ajutorul metodei elementelor finite 307

I. SPULBER, C. SPULBER, Asupra unor condiţii de regim hidrodinamic la prelucrarea prin eroziune electrochimică 319

LUCIAN CĂPITANU, Stand pentru studiul anduranţei unor elemente de etanşare . . . 325

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 3, 1983, P. 207–328

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 42, nr. 3 mai-iunie 1993

SUMAR

STUDII

ANTONIU, A., M. CHALATENIAN, Limite conjugate ale unui optimum pentru sisteme de transport 209

CODOBAN, Determinarea coeficientilor necesari pentru calculul pierderilor de energie 223

DENCIU, I., Ecuatia de miscare a unui punct material in campul gravitational 240

FELECIA, Asupra formulei lui Gauss 245

LUPTALAN, M. BIHIAN, Dinamica curgerii turbulente in retele avand n noduri 251

Index 256

RONCA, Asupra efectului compresibilitatii lichidului asupra loviturii de berbec 259

I. IGNAT, Tuburi de soc in tuburi 265

ILIAN, Asupra unei probleme de miscare plana a unui corp 279

CONSTANTINESCU, M. AL. SAXD, Modelarea matematica in biomecanica sistemului osteo-articular 284

LICIA, Model de element finit si program de calcul pentru analiza elastoplastica plane 299

ALEXANDRU, Calculul de rezistenta al unei roti de turbina cu aburi 307

Asupra unei conditii de regim hidrodinamic la presocurgere prin orificiu electrohidraulic 319

ANT, Stand pentru studiul amortizorului unor elemente de cladiri 325

UNELE CONSIDERAȚII PRIVIND OPTIMIZAREA ZBORULUI AVIOANELOR DE TRANSPORT

de M. M. NIȚĂ, A. M. C. RALAITSIZAFY
Institutul politehnic București

Se analizează regimul optim de zbor considerînd ca indice de performanță costul direct de exploatare. Profilul de zbor este descompus în trei segmente : urcare, croazieră și coborîre, pentru fiecare segment folosind un grad de simplificare diferit. Se studiază apoi joncțiunile optime între segmentele astfel studiate.

1. CONSIDERAȚII INTRODUCTIVE

Studiul optimizării zborului avioanelor de transport în cazul general este foarte laborios și însoțit de multe dificultăți de calcul. Este, deci, util să fie formulate variante ale acestei probleme într-o formă mai simplă, care să reflecte, însă, cît mai realist fenomenul și să permită obținerea traiectoriei optimale pe o cale relativ mai simplă.

În acest sens, din analiza ecuațiilor de mișcare, și ținînd seama de particularitățile zborului avioanelor de transport, se desprind următoarele observații :

În cea mai mare parte a zborului, avionul execută mișcări de translație, mișcările de tangaj fiind comandate de pilot pe intervale scurte de timp, pentru schimbarea atitudinii longitudinale a avionului. Este deci justificat că din ecuațiile de mișcare să se renunțe la ecuația mișcării avionului în jurul centrului de masă, considerînd că pe întregul profil de zbor studiat, avionul are o mișcare de translație. Comanda privind bracajul de profundor va rezulta din condiția de echilibru, astfel că în ecuațiile respective, această mărime nu mai figurează în setul variabilelor de comandă, fiind înlocuită prin incidența de zbor.

Avionul de transport este caracterizat prin evoluții cu factor de sarcină redus. Este justificat să se considere că urcarea avionului are loc pe o traiectorie cvasirectilinie, cu un factor de sarcină foarte apropiat de unitate. Ecuația obținută prin anularea accelerației normale servește astfel pentru determinarea portanței și deci, și a rezistenței la înaintare. Variabilele de comandă pot fi, de această dată, panta γ (în locul incidenței) și admisia la motor.

În studiul mișcării avioanelor moderne, caracterizate prin viteze mari de zbor, se poate considera, cel puțin în prima aproximație, că evoluția aparatului are loc la incidențe mici, astfel că $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$.

Profilul de zbor poate fi descompus în trei segmente : urcarea, zborul de croazieră și coborîrea. Pentru fiecare segment pot fi introduse aproximații specifice : pe timpul urcării și coborîrii, masa avionului poate fi considerată constantă, în zborul de croazieră masa poate fi considerată constantă pe porțiuni, coborîrea se execută cu admisie constantă etc...

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 3, 1983, P. 209–222

În cele ce urmează, se vor studia separat regimurile optime de zbor pentru fiecare segment în parte, iar apoi, se va analiza modul de joncțiune a rezultatelor obținute, în vederea definirii profilului optim de zbor.

Cît privește criteriul de performanță pentru avioanele de transport, este mai rațional să se considere costul direct de exploatare (Direct Operating Cost — D.O.C.), care cuprinde atît costul combustibilului, cît și cheltuielile proporționale cu durata zborului. Vom exprima acest criteriu sub forma

$$J = \int_{t_i}^{t_f} (C_F\, C_{sp} \mathcal{T} + C_t)\, \mathrm{d}t, \tag{1}$$

în care C_F reprezintă costul unei unități de combustibil, C_t — costul unei unități de timp, C_{sp} — consumul specific de combustibil, $\mathcal{T}$ — tracțiunea motoarelor, t_i — timpul inițial, t_f — timpul final, sau, dacă C_F și C_t sînt constanți, sub forma Mayer:

$$J = C_F(m_i - m_f) + C_{t_i}(t_f - t_i), \tag{2}$$

în care m_i reprezintă masa inițială, iar m_f masa finală.

2. STUDIUL URCĂRII (COBORÎRII)

Urcarea și coborîrea sînt faze de zbor descrise de aceleași ecuații, cu aceleași aproximații; singura deosebire poate fi aceea că la coborîre, tracțiunea are valori mai mici; în principiu, poate fi chiar nulă.

Cu ipotezele menționate mai înainte, ecuațiile de mișcare devin:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathcal{T} - R}{m} - g \sin \gamma, \\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= v \sin \gamma, \\
\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= v \cos \gamma, \\
\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} &= - C_{sp} \mathcal{T}, \\
P - mg &= 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

cu condițiile inițiale $v(t_i) = v_i$; $h(t_i) = h_i$; $L(t_i) = L_i$; $m(t_i) = m_i$, pentru t_i dat, în care v reprezintă viteza de zbor, h—altitudinea, L — dis-

tanța parcursă pe orizontală, m — masa avionului, R — rezistența la înaintare, P — portanța, iar γ — panta traiectoriei de zbor.

Se observă că ultima ecuație din (3) permite ca în locul incidenței să se considere ca variabilă de comandă panta traiectoriei. Se poate, deci, considera sistemul ecuațiilor de mișcare fără această ecuație, care va servi doar pentru evaluarea rezistenței la înaintare. Așadar, componentele vectorului de stare x sînt v, h, L și m, iar componentele vectorului de comandă sînt admisia τ și panta traiectoriei γ.

Problema de comandă optimală se formulează:

„Printre comenzile admise τ și γ, care realizează deplasarea avionului dintr-o stare inițială specificată $x_i = (v_i, h_i, L_i, m_i)$ într-o stare finală nespecificată $x_f = (v_f, h_f, L_f, m_f)$, se cer cele care minimizează indicele de performanță (2), vectorul de stare, $x = (v, h, L, m)$, fiind definit de ecuațiile diferențiale (3)''.

Problema se reduce la găsirea minimului funcționalei J_1 definită de

$$J_1 = C_F(m_i - m_f) + C_t(t_f - t_i) + \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \lambda_1 \left(\frac{\mathscr{T} - R}{m} - g \sin \gamma - \dot{v} \right) + \right.$$

$$\left. + \lambda_3(v \sin \gamma - \dot{h}) + \lambda_4(v \cos \gamma - \dot{L}) + \lambda_5(- C_{sp}\mathscr{T} - \dot{m}) \right\} \mathrm{d}t +$$

$$+ \nu_{i_1}(v(t_i) - v_i) + \nu_{i_2}(h(t_i) - h_i) + \nu_{i_4}(L(t_i) - L_i) +$$

$$+ \nu_{i_5}(m(t_i) - m_i), \tag{4}$$

în care $\lambda_j(t)$ sînt multiplicatori Lagrange, iar ν_{ij} sînt multiplicatori constanți nedeterminați.

Se definește hamiltonianul

$$H = \lambda_1 \left(\frac{\mathscr{T} - R}{m} - g \sin \gamma \right) + \lambda_3 v \sin \gamma + \lambda_4 v \cos \gamma - \lambda_5 C_{sp} \mathscr{T},$$

astfel că se poate scrie:

$$\mathrm{d}J_1 = - (C_F + \lambda_{f_5}) \, \mathrm{d}m_f + (H_f + C_t) \, \mathrm{d}t_f - \lambda_{f_1} \mathrm{d}v_f - \lambda_{f_3} \mathrm{d}h_f -$$

$$- \lambda_{f_4} \mathrm{d}L_f + \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial v} + \dot{\lambda}_1 \right) \delta v + \left(\frac{\partial H}{\partial h} + \dot{\lambda}_3 \right) \delta h + \left(\frac{\partial H}{\partial L} + \dot{\lambda}_4 \right) \partial L + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial H}{\partial m} + \dot{\lambda}_5 \right) \delta m + \frac{\partial H}{\partial \tau} \delta \tau + \frac{\partial H}{\partial \gamma} \delta \gamma \right\} \mathrm{d}t. \tag{5}$$

Din condiția ca $dJ_1 = 0$, oricare ar fi variațiile arbitrare ale variabilelor de stare, δv, δh, δL, δm și ale condițiilor finale dv_f, dh_f, dL_f, dm_f, rezultă :

a) Ecuațiile adjuncte :

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial v} = -\frac{\lambda_1}{m}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial v} - \frac{\partial R}{\partial v}\right) - \lambda_3 \sin\gamma - \lambda_4 \cos\gamma + \lambda_5\left[\frac{\partial C_{sp}}{\partial v}\mathcal{T} + C_{sp}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial v}\right],$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial h} = -\frac{\lambda_1}{m}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} - \frac{\partial R}{\partial h}\right) + \lambda_5\left[\frac{\partial C_{sp}}{\partial h}\mathcal{T} + C_{sp}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h}\right], \quad (6)$$

$$\dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial H}{\partial L} = 0,$$

$$\dot{\lambda}_5 = -\frac{\partial H}{\partial m} = \lambda_1\left[\frac{\mathcal{T} - R}{m^2} + \frac{\partial R}{\partial m}\right].$$

b) Condițiile de staționaritate :

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\lambda_1}{m}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau} - \lambda_5\left[\frac{\partial C_{sp}}{\partial \tau}\mathcal{T} + C_{sp}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau}\right] = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \gamma} = (-\lambda_1 g + \lambda_3 v)\cos\gamma = 0.$$

c) Condițiile de transversalitate :

$$H_f = C_t\,;\ \lambda_{f_1} = \lambda_{f_3} = \lambda_{f_4} = 0\,;\ \lambda_{f_5} = -C_F. \quad (8)$$

Deoarece hamiltonianul nu este o funcție explicită de timp, rezultă că H = const. pe toată traiectoria optimală ; prin urmare, ținînd seama de prima relație din (8), rezultă că, pe toată traiectoria optimală,

$$H = \text{const.} = -C_t. \quad (9)$$

De asemenea, din a treia ecuație (6), se observă că, întrucît hamiltonianul nu depinde de L și avînd în vedere condiția de transversalitate, rezultă că pe toată traiectoria optimală,

$$\lambda_4 = 0. \quad (10)$$

Din a doua condiție de staționaritate, rezultă că traiectoria optimală are loc pentru

$$\cos\gamma = 0, \tag{11}$$

$$\lambda_3 v - \lambda_1 g = 0, \tag{12}$$

condiția (11) implică $\gamma = \pm \frac{\pi}{2}$. Întrucît panta γ este limitată la $\gamma = \gamma_{max}$ și $\gamma = \gamma_{min}$, rezultă că valoarea optimală este $\gamma_{opt} = \gamma_{max}$ sau $\gamma_{opt} = \gamma_{min}$.

Condiția (12) indică o mișcare pe o traiectorie în care γ ia valori intermediare; acest caz prezintă un interes practic deosebit.

Deoarece egalitatea (12) este valabilă în orice moment al traiectoriei optimale, se poate scrie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda_1 g - \lambda_3 v) = 0,$$

de unde, înlocuind $\dot{\lambda}_1$ $\dot{\lambda}_3$, $\dot{v}$ cu expresiile lor date de (6) și exprimînd multiplicatorii în funcție de λ_1, se obține:

$$\lambda_1 \left\{ g \left[-\frac{1}{m}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial v} - \frac{\partial R}{\partial v}\right) - \frac{g}{v}\sin\gamma + \frac{1}{m}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau}\frac{\frac{\partial C_{sp}}{\partial v}\mathcal{T} + C_{sp}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial v}}{\frac{\partial C_{sp}}{\partial \tau}\mathcal{T} + C_{sp}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau}} \right] - \right.$$

$$- \frac{g}{v}\left[\frac{\mathcal{T} - R}{m} - g\sin\gamma\right] - v\left[-\frac{1}{m}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} - \frac{\partial R}{\partial h}\right) + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{m}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau}\frac{\frac{\partial C_{sp}}{\partial h}\mathcal{T} + C_{sp}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h}}{\frac{\partial C_{sp}}{\partial \tau}\mathcal{T} + C_{sp}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau}} \right] \right\}. \tag{13}$$

Întrucît condiția necesară ca un set de comenzi să fie optimal este ca nu toți multiplicatorii λ_j să fie nuli, rezultă în final, pentru urcarea optimă, ecuația

$$v\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial v} - \frac{\partial R}{\partial v}\right) - \frac{v^2}{g}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} - \frac{\partial R}{\partial h}\right) + (\mathcal{T} - R) +$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau}\frac{v}{\frac{\partial C_{sp}}{\partial \tau}\mathcal{T} + C_{sp}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau}}\left[\left(\frac{\partial C_{sp}}{\partial v}\mathcal{T} + C_{sp}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial v}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{v}{g}\left(\frac{\partial C_{sp}}{\partial h}\mathcal{T} + C_{sp}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h}\right)\right] = 0, \tag{14}$$

care reprezintă o generalizare a rezultatelor obținute de alți autori pe alte căi, pentru probleme particulare [3], [4], [5]. Într-adevăr, dacă se definește energia mecanică totală pe unitate de greutate,

$$E = h + \frac{v^2}{2g}, \tag{15}$$

ecuația (14) poate fi adusă la forma

$$\frac{\partial}{\partial v}[v(\mathscr{T} - R)]_{E,\tau,m} - \left(\frac{\dfrac{\partial}{\partial \tau}[v(\mathscr{T} - R)]_{E,v,m}}{\dfrac{\partial}{\partial \tau}[C_{sp}\mathscr{T}]_v} \right) \frac{\partial}{\partial v}[C_{sp}\mathscr{T}]_{E,\tau} = 0, \tag{16}$$

de unde, dacă indicele de performanță este consumul de combustibil ($C_t = 0$), rezultă condițiile

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{v(\mathscr{T} - R)}{C_{sp}\mathscr{T}}\right]_{E,\tau,m} = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{v(\mathscr{T} - R)}{C_{sp}\mathscr{T}}\right]_{E,\tau,m} = 0. \tag{18}$$

Este de observat că condiția (17) trebuie să fie însoțită de condiția (18). De obicei, în rezultatele semnalate de alți autori, condiția (18) lipsește, traiectoria optimală obținîndu-se invariabil pentru $\tau = \tau_{max}$. Acest rezultat respectă condiția (18) numai dacă consumul specific de combustibil este independent de admisie.

Pentru cazul particular în care $C_F = 0$ (urcare în timp minim), prin particularizarea ecuației (16) se regăsesc condițiile [4]:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{v(\mathscr{T} - R)}{mg}\right] = 0, \ \tau = \tau_{max}. \tag{19}$$

Relația generală (14) poate fi adusă la o formă mai simplă dacă se consideră că în timpul urcării, masa avionului nu variază sensibil, astfel că se poate considera masa avionului constantă. În acest caz, criteriul de performanță J se scrie sub forma (1). Ecuațiile traiectoriei optime rămîn neschimbate, cu excepția ultimei ecuații (6) care dispare, iar pe toată traiectoria optimă $\lambda_5 = -C_F$. Ecuația generală (14) rămîne

neschimbată și poate fi adusă la forma:

$$(C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t)\, v\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial v} - \frac{\partial R}{\partial v}\right) - (C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t)\frac{v^2}{g}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} - \frac{\partial R}{\partial h}\right) +$$

$$+ (C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t)(\mathcal{T} - R) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau}\frac{C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t}{\frac{\partial C_{sp}}{\partial \tau}\mathcal{T} + C_{sp}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau}}\left[v\left(\frac{\partial C_{sp}}{\partial v}\mathcal{T} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + C_{sp}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial v}\right) - \frac{v^2}{g}\left(\frac{\partial C_{sp}}{\partial h}\mathcal{T} + C_{sp}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h}\right)\right] = 0, \qquad (20)$$

de unde, avînd în vedere că $H = -C_t$, rezultă

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{v(\mathcal{T} - R)}{C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t}\right] - \frac{v}{g}\frac{\partial}{\partial h}\left[\frac{v(\mathcal{T} - R)}{C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t}\right] = 0. \qquad (21)$$

În ecuația (21) se poate considera admisia ca parametru. Valoarea minimă a criteriului de performanță corespunzătoare legii optime pentru cealaltă variabilă de comandă va fi, deci, o funcție de acest parametru; minimul acestei funcții, precum și valoarea optimă a parametrului pot fi ușor determinate.

3. STUDIUL CROAZIEREI

În cazul croazierei, se consideră că zborul are loc cu viteza constantă, pe segmente destul de mari ale traiectoriei; această ipoteză practică este pe deplin justificată în cazul avioanelor comerciale de transport. Problema croazierei optime constă deci în găsirea înălțimii și a vitezei de zbor pentru care costul direct de exploatare este minim.

Deoarece variația masei datorită consumului de combustibil are un efect dinamic neglijabil asupra traiectoriei optime, pe cînd variația masei de la un capăt la altul al traiectoriei poate fi foarte mare, se va considera masa ca un parametru constant pe porțiuni.

Ecuațiile de mișcare în timpul croazierei sînt:

$$\mathcal{T} - R = 0\,; \quad P - mg = 0\,; \quad \frac{dL}{dt} = v,$$

în care vectorul de stare este $x = (v, h, L)$, iar vectorul de comandă, $u = (\tau, P)$.

Hamiltonianul H are expresia

$$H = C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t + \lambda_1(\mathcal{T} - R) + \lambda_2(P - mg) +$$

$$+ \lambda_4 v + \mu[(\tau - \tau_{max})(\tau_{min} - \tau) - a^2], \qquad (22)$$

unde s-a folosit procedeul anterior de transformare a relațiilor de inegalitate asupra admisiei $\tau_{min} \leqslant \tau \leqslant \tau_{max}$ într-o relație de egalitate.

Ecuațiile croazierei optime sînt deci:

$$\dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial H}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}[C_F C_{sp}\mathscr{T} + C_t] + \lambda_1\left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial v} - \frac{\partial R}{\partial v}\right) +$$

$$+ \lambda_4 + \mu\frac{\partial}{\partial v}[(\tau - \tau_{max})(\tau_{min} - \tau) - a^2] = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}[C_F C_{sp}\mathscr{T} + C_t] + \lambda_1\left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial h} - \frac{\partial R}{\partial h}\right) +$$

$$+ \mu\frac{\partial}{\partial h}[(\tau - \tau_{max})(\tau_{min} - \tau) - a^2] = 0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}[C_F C_{sp}\mathscr{T} + C_t] + \lambda_1\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial \tau} +$$

$$+ \mu\frac{\partial}{\partial \tau}[(\tau - \tau_{max})(\tau_{min} - \tau) - a^2] = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial P} = -\lambda_1\frac{\partial R}{\partial P} + \lambda_2 = 0.$$

Din condiția de transversalitate corespunzătoare distanței fixate, rezultă că pe toată traiectoria optimală,

$$\lambda_4 = \nu,\ H = 0. \tag{24}$$

La acestea se mai adaugă condiția

$$\frac{\partial H}{\partial a} = 2\mu a = 0,$$

astfel că pentru $a = 0$ și $\mu \neq 0$, rezultă $\tau_{opt} = \tau_{max}$ sau $\tau_{opt} = \tau_{min}$, iar pentru $\mu = 0$, rezultă $\tau_{min} < \tau < \tau_{max}$.

În cele ce urmează se vor analiza aceste cazuri.

a) *Cazul* $a = 0$ ($\tau_{opt} = \tau_{max}$ sau $\tau_{opt} = \tau_{min}$)

În acest caz, valoarea lui τ este impusă. Alegerea lui τ între cele două posibilități, $\tau = \tau_{max}$ sau $\tau = \tau_{min}$, depinde de mulți alți factori cum sînt: domeniul de funcționare al motoarelor, înălțimea de zbor.

Dacă $\tau = \tau_{max}$, ecuațiile (23) devin:

$$\frac{\partial H}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}[C_F C_{sp} \mathscr{T}_{max} + C_t] + \lambda_1 \left(\frac{\partial \mathscr{T}_{max}}{\partial v} - \frac{\partial R}{\partial v} \right) + \lambda_4 = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}[C_F C_{sp} \mathscr{T}_{max} + C_t] + \lambda_1 \left(\frac{\partial \mathscr{T}_{max}}{\partial h} - \frac{\partial R}{\partial h} \right) = 0. \tag{25}$$

iar ecuațiile de mișcare capătă forma

$$\mathscr{T}_{max} - R = 0, \quad P - mg = 0.$$

Ecuația $\dfrac{\partial H}{\partial \tau} = 0$ dispare pentru că H nu mai depinde de τ, deoarece $\mathscr{T}_{max}$ nu mai depinde de τ.

Din a doua egalitate (25) rezultă

$$\lambda_1 = -\frac{\dfrac{\partial}{\partial h}[C_F C_{sp} \mathscr{T}_{max} + C_t]}{\dfrac{\partial \mathscr{T}_{max}}{\partial h} - \dfrac{\partial R}{\partial h}}$$

și deci traiectoria optimală este dată de setul de ecuații

$$\left(\frac{\partial \mathscr{T}_{max}}{\partial h} - \frac{\partial R}{\partial h} \right) \frac{\partial}{\partial v}[C_F C_{sp} \mathscr{T}_{max} + C_t] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial h}[C_F C_{sp} \mathscr{T}_{max} + C_t] \left(\frac{\partial \mathscr{T}_{max}}{\partial v} - \frac{\partial R}{\partial v} \right) -$$

$$- \left(\frac{\partial \mathscr{T}_{max}}{\partial h} - \frac{\partial R}{\partial h} \right) \left(\frac{C_F C_{sp} \mathscr{T}_{max} + C_t}{v} \right) = 0,$$

din care se pot determina variabilele v, h, R.

MUSZAKI EGYETEM 1848 BUDAPEST

b) *Cazul* $\mu = 0$; $\tau_{min} < \tau < \tau_{max}$

În acest caz ecuațiile mișcării optime sînt :

$$\frac{\partial H}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}[C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t] + \lambda_1\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial v} - \frac{\partial R}{\partial v}\right) + \lambda_4 = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}[C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t] + \lambda_1\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} - \frac{\partial R}{\partial h}\right) = 0, \tag{26}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}[C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t] + \lambda_1 \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial P} = -\lambda_1 \frac{\partial R}{\partial P} + \lambda_2 = 0.$$

Din a treia egalitate (23) se obține

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{\partial}{\partial \tau}[C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t]}{\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau}},$$

astfel că primele două ecuații (26) devin :

$$\frac{\partial}{\partial v}[C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t]\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tau}[C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t]\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial v} - \frac{\partial R}{\partial v}\right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial v}\left[\frac{C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t}{v}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial h}[C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t]\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tau}[C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t]\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} - \frac{\partial R}{\partial h}\right) = 0.$$

Valorile variabilelor v, h, τ, P corespunzătoare croazierei optime se obțin din ecuațiile

$$\frac{\partial}{\partial v}[C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t]\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tau}[C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t]\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial v} - \frac{\partial R}{\partial v}\right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau}\left[\frac{C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t}{v}\right] = 0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial}{\partial h}[C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t]\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tau}[C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t]\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} - \frac{\partial R}{\partial h}\right) = 0,$$

$$\mathcal{T} - R = 0\,;\; P - mg = 0.$$

Dacă se consideră că pilotul acţiogează astfel încît pentru orice v şi h se poate scrie

$$\frac{\partial}{\partial v}(\mathcal{T} - R) = 0\,; \quad \frac{\partial}{\partial h}(\mathcal{T} - R) = 0,$$

atunci sistemul de ecuaţii (27) devine

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t}{v}\right] = 0\,; \quad \frac{\partial}{\partial h}\left[\frac{C_F C_{sp}\mathcal{T} + C_t}{v}\right] = 0\,; \quad P - mg = 0\,;$$

$$\mathcal{T} - R = 0. \tag{28}$$

4. PROFILUL OPTIM DE ZBOR

În cele ce urmează, se analizează problema optimizării profilului de zbor corespunzător unei misiuni de transport între două localităţi situate la distanţa L_f una de alta.

Se disting două cazuri principale:

a) Dacă $L_f \leqslant L_u + L_c$, unde L_u este distanţa parcursă pe orizontală în zborul de urcare pînă la o înălţime $h < h_{cr}$, atunci profilul optim de zbor nu conţine un segment de croazieră, ci este format numai din urcare optimală pînă la înălţimea h, urmat de o coborîre optimală.

b) Dacă $L_f \geqslant L_u + L_c$ pentru $h = h_{cr}$, atunci profilul optim de zbor va fi format din trei segmente: urcare, croazieră şi coborîre.

În acest ultim caz, se pune problema realizării joncţiunii între curba $\Gamma_u(v, h)$, care exprimă urcarea optimă, şi punctul A_1 cu care începe croazierea, precum şi între punctul A_f cu care sfîrşeşte croaziera şi curba $\Gamma_c(v, h)$ care exprimă coborîrea optimă; în general, punctul A_1 nu se află pe curba Γ_u, iar punctul A_f nu se află pe curba Γ_c (fig. 1).

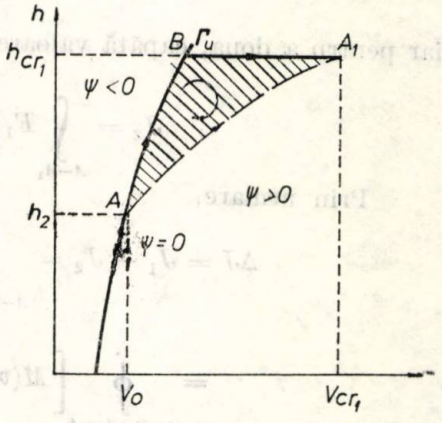


Fig. 1

În acest scop, să considerăm în planul v/h curba Γ_u dată de (21), care exprimă regimul optim de urcare. În principiu, se pot distinge două tipuri de joncţiuni:

— urcare pe curba optimală Γ_u pînă la înălţimea h_{cr_1} (punctul B), urmată de o accelerare în palier pînă la viteza v_{cr_1} corespunzătoare punctului A_1;

— urcare pe curba optimală Γ_u pînă la o înălţime oarecare h_2 (punctul A), urmată de o urcare cu o pantă mai mică, în decursul căreia avionul este accelerat pînă la viteza V_{cr_1} (arcul AA_1).

Trecînd de la variabila independentă t la variabila independentă h, expresia indicelui de performanță (1) poate fi adusă la forma

$$J = \int_{h_i}^{h_f} (C_F C_{sp} \mathscr{T} + C_t) \frac{1 + \frac{v}{g}\frac{dv}{dh}}{v(\mathscr{T} - R)} \, dh.$$

Se observă că funcția de sub semnal de integrare este liniară în raport cu derivata $\frac{dv}{dh}$, adică, poate fi scrisă sub forma

$$F_1\left(v, h, \frac{dv}{dh}\right) = M(v, h) + \frac{dv}{dh} N(v, h),$$

astfel că extremala lui Euler este, de fapt, dată de

$$\psi(v, h) = \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial h} \equiv 0.$$

Pentru prima variantă a profilului de zbor, indicele de performanță are valoarea J_1,

$$J_1 = \int_{A-B-A_1} F_1\left(v, h, \frac{dv}{dh}\right) dh,$$

iar pentru a doua, capătă valoarea

$$J_2 = \int_{A-A_1} F_1\left(v, h, \frac{dv}{dh}\right) dh.$$

Prin urmare,

$$\Delta J = J_1 - J_2 = \oint_{A-B-A_1-A} F_1\left(v, h, \frac{dv}{dh}\right) dh =$$

$$= \oint_{A-B-A_1-A} \left[M(v, h) + \frac{dv}{dh} N(v, h)\right] dh.$$

În baza formulei lui Green se poate scrie:

$$\oint_{A-B-A_1-A} \left[M(v, h) + \frac{dv}{dh} N(v, h)\right] dh = \pm \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial h}\right) dv \, dh,$$

în care se ia semnul + dacă conturul ce mărginește suprafața este parcurs în sensul trigonometric. Ținînd seama și de semnul funcției $\psi(v, h)$ în zona considerată, rezultă, în final, $\Delta J < 0$, ceea ce înseamnă că prima evoluție asigură valoarea cea mai mică a costului direct de exploatare. Considerații similare pot fi făcute și cu privire la joncțiunea dintre curba Γ_c și punctul A_f, cu observația că în locul accelerării, trebuie să se considere o frînare pentru trecerea de la croaziera optimală la coborîre optimală.

În concluzie, profilul de zbor va fi format din următoarele segmente:

— urcare pînă la înălțimea h_{cr_1}, cu regim optim de urcare;

— accelerare în palier, la înălțimea h_{cr_1}, pînă la viteza v_{cr_1}, corespunzătoare croazierei optimale la masa inițială de croazieră;

— croazieră la viteze v_{cr_i} și înălțimi h_{cr_i}, corespunzător numărului de trepte în care se consideră divizat segmentul de croazieră;

— zbor orizontal frînat de la viteza v_{cr_f} pînă la viteza corespunză toare coborîrii optimale;

— coborîre optimală cu regimul optim de coborîre.

În vederea testării rezultatelor teoretice obținute, s-a considerat un avion convențional de transport avînd $m = 200\,000$ kg echipat cu 4 motoare turboventilatoare cu $\mathcal{T}_{max} = 9000$ daN (la nivelul mării și la punct fix). S-a considerat zborul între localități situate la diverse distanțe, începînd cu $L_f = 200$ km pînă la $L_f = 2000$ km.

În vederea comparării eficienței zborului cu diverse metode de calcul, s-au considerat traiectoriile optime corespunzătoare combustibilului minim și DOC-ului minim.

Evaluările numerice au vizat parametrii ce definesc evoluția optimă, precum și valorile atinse de indicii de performanță menționați; calculele au fost efectuate pentru $C_F = 0{,}0125$ \$/N și $C_t = 0{,}114$ \$/s. În figura 2 se reprezintă în planul (h, M) regimul de urcare cu DOC minim și cu combustibil minim și în timp minim, regimul de coborîre, precum și regimurile de croazieră cu combustibil minim (punctul A) și cu DOC minim pentru două mase distincte (punctele B, C).

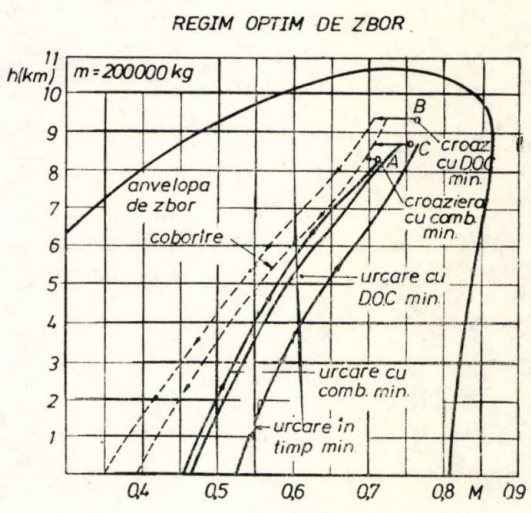


Fig. 2

Dintre rezultatele numerice obținute, rezultă că profilul de zbor obținut din condiția DOC-ului minim este superior profilului clasic de zbor din punctul de vedere al cheltuielilor de exploatare. Cîștigul obținut

este pentru cazul considerat de 4,6 % din valoarea DOC-ului pentru distanța considerată de 2 000 km,

Evident, acest cîștig este puternic influențat de costul unității de combustibil, C_F, și de costul unei unități de timp, C_t, valori care se schimbă în timp și de la companie la companie, de tipul de avion, și de evoluția prețului petrolului.

În orice sens s-ar manifesta aceste influențe, rezultatele obținute atestă necesitatea considerării DOC-ului în elaborarea profilului optim de zbor.

Primită la redacție la 24 ianuarie 1983

BIBLIOGRAFIE

1. A. E. BRYSON, YU-CHI-HO, *Applied Optimal Control*, Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1976.
2. H. ERZBERGER, H. Q. LEE, *Contrained Optimum Trajectories With Specified Range*, NASA Ames Research Center, 1980.
3. H. ERZBERGER, J. F. BARMAN, *Fixed Range Optimum Trajectories for Short Haul Aircraft*, NASA TN D 8115, 1975.
4. L. GEORGE, J. F. VERNET, J. C. WANNER, *La Mécanique du vol*, Dunod, 1969.
5. R. L. SCHULTZ, N. R. ZAGALSKY, *Aircraft Performance Optimization*, Journal of Aircraft, 1972.

DETERMINAREA COMENZILOR NECESARE PENTRU MIȘCAREA UNEI RACHETE PE O TRAIECTORIE RECTILINIE DATĂ ÎN ATMOSFERĂ

de ALEXANDRU CODOBAN
Institutul politehnic București

În lucrare se determină variația în timp a unghiului de bracaj al suprafețelor de comandă ale unei rachete astfel încît aceasta să se miște pe o traiectorie rectilinie dată în atmosferă. Se iau în considerare variația coeficienților aerodinamici cu numărul Mach, precum și variația în timp (în perioada de ardere a combustibilului) a momentelor de inerție și a poziției centrului de masă ale rachetei. Densitatea aerului și viteza sunetului în atmosferă sînt presupuse variabile cu altitudinea. Este prezentat un exemplu numeric de calcul care este tratat prin algoritmul elaborat în lucrare.

1. NOTAȚIILE PRINCIPALE FOLOSITE

Oxy reprezintă sistemul de referință fix în raport cu Pămîntul, avînd axa Ox dirijată în lungul traiectoriei rectilinii impuse (fig. 1);

θ — unghiul de înclinare, față de orizontală, a traiectoriei rectilinii impuse rachetei;

t — timpul măsurat din momentul începerii arderii combustibilului;

$V = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}$ — viteza centrului de masă al rachetei;

g — accelerația gravitațională;

h — altitudinea de zbor a rachetei;

ρ — densitatea atmosferei la altitudinea de zbor;

a — viteza sunetului în atmosferă la altitudinea de zbor;

M — numărul Mach de zbor;

$O'\xi\eta$ — sistem de referință fix în raport cu corpul rachetei a cărei axă $O'\xi$ coincide cu axa de simetrie a corpului rachetei (fig. 1);

m — masa rachetei, variabilă în timpul funcționării motorului

J — momentul de inerție al rachetei față de axa de tangaj (care trece prin centrul de masă), variabil în timpul funcționării motorului;

$Q = -\dfrac{\dot{m}}{m_0}$ — debitul adimensional de gaze al motorului rachetei;

ξ_C — abscisa centrului de masă al rachetei în sistemul $O'\xi\eta$;

ξ_F — abscisa, în sistemul $O'\xi\eta$, a punctului F în raport cu care sînt calculați coeficienții aerodinamici de moment;

$\xi = \xi_C - \xi_F$;

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 3, 1983, P. 223–239

T — forța de tracțiune a motorului rachetei;

t_a — timpul de ardere a combustibilului (inclusiv t_{tr});

t_{tr} — timpul de tranziție de la faza activă de funcționare a motorului la cea pasivă;

S — suprafața de referință la care sînt raportați coeficienții aerodinamici;

l — lungimea de referință la care este raportat coeficientul de moment de tangaj;

α — unghiul de incidență al rachetei (unghiul dintre direcția vitezei și axa de simetrie a corpului rachetei (fig. 1));

β — unghiul de bracaj al suprafețelor de comandă (fig. 1);

$q = \dot{\alpha}$ — viteza unghiulară de rotație de tangaj a rachetei;

$\varepsilon = \ddot{\alpha}$ — accelerația unghiulară de rotație de tangaj a rachetei;

$\hat{q} = \frac{ql}{2V}$ — viteza adimensională de rotație de tangaj a rachetei;

L — forța aerodinamică de portanță a rachetei;

D — forța aerodinamică de rezistență la înaintare a rachetei;

M_m — momentul aerodinamic de tangaj al rachetei în raport cu punctul F;

$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}$ — coeficientul aerodinamic de portanță al rachetei;

$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}$ — coeficientul aerodinamic de rezistență la înaintare al rachetei;

C_{D_0} — coeficientul aerodinamic de rezistență la înaintare al rachetei la incidență nulă;

$C_{D_{fd}}$ — coeficientul de rezistență de fund al rachetei;

k_D — constantă în expresia lui C_D;

$C_m = \frac{M_m}{\frac{1}{2}\rho V^2 S l}$ — coeficientul de moment de tangaj al rachetei raportat la punctul F;

$C_L^{\alpha} = \frac{dC_L}{d\alpha}$, $C_m^{\alpha} = \frac{dC_m}{d\alpha}$ — derivatele coeficienților aerodinamici de portanță și de moment de tangaj în raport cu incidența rachetei;

$C_L^\beta = \frac{dC_L}{d\beta}$, $C_m^\beta = \frac{dC_m}{d\beta}$ — derivatele coeficienților aerodinamici de portanță și de moment de tangaj în raport cu unghiul de bracaj al suprafețelor de comandă;

$C_m^{\hat{q}} = \frac{dC_m}{d\hat{q}}$ — derivata coeficientului de moment de tangaj al rachetei în raport cu viteza adimensională de rotație de tangaj (coeficientul de amortizare de tangaj).

SEMNE DE DERIVARE ȘI INDICI

$(\cdot)$ = derivare în raport cu timpul;
$(\ )_0$ = valoarea la momentul inițial $t_0 = 0$;
$(\ )_f$ = valoarea la momentul final t_f.

2. INTRODUCERE

În lucrare se urmărește rezolvarea unei probleme de dinamica zborului rachetei în atmosferă, problemă întîlnită în anumite cazuri practice și anume aceea a determinării legii de variație a unghiurilor de bracaj ale suprafețelor de comandă necesare pentru ca racheta să parcurgă o traiectorie rectilinie dată, în atmosferă, traiectorie care trebuie urmărită de rachetă atît în perioada activă a zborului (de funcționare a motorului rachetei), cît și în cea pasivă (fără forță de tracțiune).

În studiul acestei probleme este luată în considerație variația coeficienților aerodinamici cu numărul Mach, precum și variația în timp, în funcție de consumul de combustibil, a momentelor de inerție și a poziției centrului de masă ale rachetei. Acestea sînt considerate cunoscute ca funcții numerice de numărul Mach și, respectiv, de timp, fiind determinate pe cale teoretică sau experimentală.

Forța de tracțiune a rachetei este considerată constantă în perioada de funcționare a motorului (faza activă), iar în perioada scurtă de trecere de la faza activă la cea pasivă (fără tracțiune) se presupune că ea scade liniar cu timpul pînă la anulare.

3. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE DE MIȘCARE ALE RACHETEI

Se presupune că distanțele parcurse de rachetă în timpul zborului sînt mici în raport cu raza Pămîntului astfel încît accelerația gravitațională poate fi considerată constantă ca mărime și direcție ($\bar{g}$ = const.) și că mișcarea rachetei are loc pe o traiectorie rectilinie înclinată cu unghiul θ față de orizontală, situată în planul vertical definit de direcția vitezei

inițiale a centrului de masă al rachetei și de vectorul accelerației gravitaționale (fig. 1).

Ecuațiile diferențiale de mișcare ale rachetei în acest plan sînt:

$$T\cos\alpha - D - mg\sin\theta = m\ddot{x}, \tag{1.a}$$

$$T\sin\alpha + L - mg\cos\theta = 0, \tag{1.b}$$

$$M_m - \xi(L\cos\alpha + D\sin\alpha) = J\ddot{\alpha}. \tag{1.c}$$

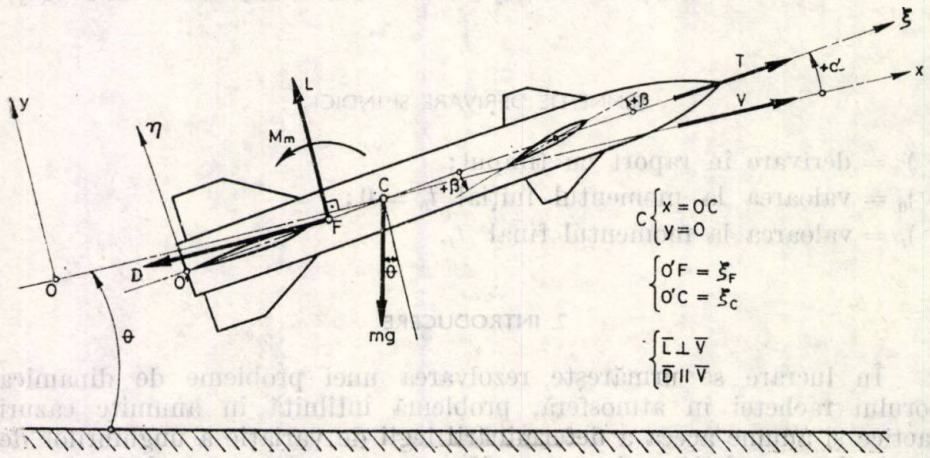


Fig. 1

În aceste ecuații masa m a rachetei are o variație liniară în raport cu timpul în perioada de funcționare a motorului, rămînînd constantă în perioada pasivă, adică

$$m = \begin{cases} m_0(1 - Qt) \text{ pentru } t \in [0, t_a), & \text{(2.a)} \\ m_f = \text{const. pentru } t \geqslant t_a, & \text{(2.b)} \end{cases}$$

unde debitul adimensional de gaze arse Q al motorului este constant, fiind dat de relația

$$Q = -\frac{\dot{m}}{m_0} = \frac{1}{t_a}\left(1 - \frac{m_f}{m_0}\right) = \text{const.} \tag{3}$$

Forța de tracțiune T este considerată constantă pe durata funcționării motorului, iar în perioada de trecere de la faza activă a motorului la cea pasivă se consideră că ea scade continuu în timp pînă la anulare, adică

$$T = \begin{cases} T_0 = \text{const. pentru } t \in [0, t_a - t_{tr}], \\ T_{tr}(t) \quad \text{pentru } t \in [t_a - t_{tr}, t_a], \\ 0 \quad \text{pentru } t \geqslant t_a. \end{cases} \tag{4}$$

În exemplul numeric de calcul prezentat la sfîrșitul lucrării s-a considerat, pentru perioada de trecere, o variație liniară a forței de tracțiune în raport cu timpul și anume :

$$T_{tr}(t) = T_0 \left[1 - \frac{t - (t_a - t_{tr})}{t_{tr}} \right]. \tag{5}$$

Forțele și momentele aerodinamice sînt date de expresiile :

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L ; \; C_L = \alpha C_L^{\alpha} + \beta C_L^{\beta}, \tag{6.a}$$

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D, \tag{6.b}$$

$$M_m = \frac{1}{2} \rho V^2 S l C_m ; \; C_m = \alpha C_m^{\alpha} + \beta C_m^{\beta} + \hat{q} C_m^{\hat{q}}, \tag{6.c}$$

în care coeficientul de rezistență la înaintare este dat de relațiile :

$$C_D = \begin{cases} C_{D_0} + k_D \alpha^2 & \text{pentru } t \in [0, t_a], \quad (7.a) \\ C_{D_0} + k_D \alpha^2 + C_{Dfd} & \text{pentru } t > t_a, \quad (7.b) \end{cases}$$

unde C_{Dfd} reprezintă coeficientul rezistenței de fund (base pressure drag) care apare după încetarea funcționării motorului rachetă.

În relațiile (6) au fost considerate neglijabile celelalte derivate ale coeficienților aerodinamici (ca, de exemplu, $C_L^{\hat{q}}$). De asemenea, luînd în considerație pentru rachetă o configurație de tip canard, cu suprafețele de comandă plasate în față, efectul defecției curentului produs de acestea asupra aripii a putut fi neglijat.

Coeficienții aerodinamici sau derivatele lor sînt funcții cunoscute de numărul Mach. Se presupun astfel cunoscuse valorile acestora, adică $C_{D_0}(M_i)$, $k_D(M_i)$, $C_{Dfd}(M_i)$, $C_L^{\alpha}(M_i)$, $C_m^{\alpha}(M_i)$, $C_L^{\beta}(M_i)$, $C_m^{\beta}(M_i)$, $C_m^{\hat{q}}(M_i)$ pentru diferite numere Mach M_i, $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n_M\}$, situate în domeniul vitezelor de zbor.

Se presupun de asemenea cunoscute valorile la diferite momente t_i ale distanței ξ între centrul de masă C al rachetei și punctul fix F în raport cu care este determinat momentul aerodinamic de tangaj M_m, precum și valorile momentului de inerție J al rachetei în raport cu axa de tangaj care trece prin centrul de masă al acesteia, adică sînt cunoscute $\xi(t_i)$ și $J(t_i)$ la diferite momente t_i, $i \in \{1,2,3,\ldots, n_t\}$, situate în perioada de ardere a combustibilului $[0, t_a]$.

Pentru determinarea valorilor coeficienților aerodinamici și ale derivatelor lor corespunzătoare unui număr Mach oarecare M, precum și a valorilor momentului de inerție J și ale distanței ξ care definește poziția

centrului de masă la un moment oarecare t, în exemplul numeric prezentat în lucrare este folosită o metodă de interpolare numerică de tip Spline.

Densitatea atmosferei ρ și viteza sunetului în atmosferă, notată cu a, sînt variabile cu altitudinea de zbor h a rachetei care este dată de relația

$$h = h_0 + x \sin \theta, \tag{8}$$

în care h_0 este altitudinea de lansare.

Introducînd în sistemul de ecuații diferențiale (1) expresia masei m dată de relația (2.a) și expresiile forțelor și momentelor aerodinamice și ale coeficienților aerodinamici, date de relațiile (6) și (7.a), acest sistem devine :

$$T \cos \alpha - \frac{1}{2} \rho V^2 S (C_{D_0} + k_D \alpha^2) - m_0 (1 - Qt)\, g \sin \theta = m_0 (1 - Qt)\, \ddot{x}, \tag{9.a}$$

$$T \sin \alpha + \frac{1}{2} \rho V^2 S (\alpha C_L^{\alpha} + \beta C_L^{\beta}) - m_0 (1 - Qt)\, g \cos \theta = 0, \tag{9.b}$$

$$\frac{1}{2} \rho V^2 S l (\alpha C_m^{\alpha} + \beta C_m^{\beta} + \hat{q} C_m^{\hat{q}}) - \frac{1}{2} \rho V^2 S \xi [(\alpha C_L^{\alpha} + \beta C_L^{\beta}) \cos \alpha +$$

$$+ (C_{D_0} + k_D \alpha^2) \sin \alpha] = J \ddot{\alpha}. \tag{9.c}$$

4. INTEGRAREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE DE MIȘCARE ALE RACHETEI

Sistemul de ecuații diferențiale (9) este un sistem neliniar a cărui integrare este posibilă numai prin metode numerice. În acest scop se explicitează unghiul β din ecuația (9.c). Rezultă :

$$\beta = \frac{1}{C_m^{\beta} - \frac{\xi}{l} C_L^{\beta} \cos \alpha} \left[\frac{J}{\frac{1}{2} \rho V^2 S l} \ddot{\alpha} - \alpha \left(C_m^{\alpha} - \frac{\xi}{l} C_L^{\alpha} \cos \alpha \right) - \right.$$

$$\left. - \hat{q} C_m^{\hat{q}} + \frac{\xi}{l} (C_{D_0} + k_D \alpha^2) \sin \alpha \right]. \tag{10}$$

Înlocuind această expresie în (9.b) și utilizînd notațiile :

$$T^* = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho V^2 S}; \quad G^* = \frac{m g \cos \theta}{\frac{1}{2} \rho V^2 S}; \quad J^* = \frac{J}{\frac{1}{2} \rho V^2 S l}, \tag{11}$$

se obține ecuația

$$(T^* \sin \alpha + \alpha C_L^\alpha - G^*) \left(C_m^\beta - \frac{\xi}{l} C_L^\beta \cos \alpha \right) + C_L^\beta \left[J^* \ddot{\alpha} - \right.$$

$$\left. - \alpha \left(C_m^\alpha - \frac{\xi}{l} C_L^\alpha \cos \alpha \right) - \dot{\alpha} \frac{l}{2V} C_m^{\hat{q}} + \frac{\xi}{l} (C_{D_0} + k_D \alpha^2) \sin \alpha \right] = 0, \quad (12)$$

care, împreună cu ecuația (9.a), formează un sistem neliniar de ecuații diferențiale de ordinul doi.

Introducînd apoi variabilele suplimentare $V = \dot{x}$ și $q = \dot{\alpha}$, sistemul de ecuații diferențiale de ordinul doi, format din ecuațiile (9.a) și (12), poate fi transformat în următorul sistem de ecuații diferențiale de ordinul întîi:

$$\dot{x} = V, \quad (13.a)$$

$$\dot{V} = g \left[\frac{T^* \cos \alpha - (C_{D_0} + k_D \alpha^2)}{G^*} \cos \theta - \sin \theta \right], \quad (13.b)$$

$$\dot{\alpha} = q, \quad (13.c)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{J^*} \left[\frac{G^* - T^* \sin \alpha - \alpha C_L^\alpha}{C_L^\beta} \left(C_m^\beta - \frac{\xi}{l} C_L^\beta \cos \alpha \right) + \right.$$

$$\left. + \left(C_m^\alpha - \frac{\xi}{l} C_L^\alpha \cos \alpha \right) \alpha + \frac{l}{2V} C_m^{\hat{q}} q - \frac{\xi}{l} (C_{D_0} + k_D \alpha^2) \sin \alpha \right]. \quad (13.d)$$

Acest sistem neliniar de ecuații diferențiale de ordinul întîi poate fi, în principiu, integrat numeric utilizînd o metodă adecvată cum ar fi metoda Runge-Kutta. La fiecare pas de integrare poate fi determinată și valoarea unghiului de bracaj β, folosind relația (10).

Se remarcă însă că, în multe cazuri concrete, derivata C_L^β a coeficientului de portanță în raport cu unghiul de bracaj β are valori foarte mici, putînd fi uneori chiar neglijată, ceea ce poate conduce la erori mari în aplicarea procedeului de integrare numerică menționat mai înainte (C_L^β apărînd în ecuația (13.d) la numitor), sau chiar la imposibilitatea aplicării acelei metode de integrare numerică (în cazul în care C_L^β este neglijabil).

Din acest motiv, în cele ce urmează va fi utilizat un procedeu de integrare numerică care să poată fi aplicat și în cazul valorilor foarte mici ale derivatelor C_L^β, precum și în cazul în care $C_L^\beta \approx 0$.

Acest procedeu constă în utilizarea concomitentă a metodei Runge-Kutta pentru integrarea numerică a sistemului de ecuații diferențiale (13.a) și (13.b) și a unei metode cu diferențe finite pentru integrarea ecuației diferențiale (12), care este echivalentă cu ecuațiile (13.c) și (13.d).

Se folosesc în acest scop diferențele regresive de ordinul doi pentru exprimarea derivatelor $\dot{\alpha}$ și $\ddot{\alpha}$ care apar în ecuația (12) și anume :

$$\dot{\alpha}_i = b_1\alpha_i + b_2, \tag{14.a}$$

$$\ddot{\alpha}_i = c_1\alpha_i + c_2, \tag{14.b}$$

unde s-a notat :

$$b_1 = \frac{3}{2\cdot\Delta t}\,;\quad b_2 = \frac{1}{2\cdot\Delta t}(-4\alpha_{i-1} + \alpha_{i-2}), \tag{15.a}$$

$$c_1 = \frac{2}{(\Delta t)^2}\,;\quad c_2 = \frac{1}{(\Delta t)^2}(-5\alpha_{i-1} + 4\alpha_{i-2} - \alpha_{i-3}), \tag{15.b}$$

iar Δt reprezintă pasul de integrare în raport cu timpul.

Pentru pasul de integrare $i = 1$ la care se cunosc numai valorile lui α notate cu $i - 1$ și pentru pasul $i = 2$ la care se cunosc numai valorile notate cu $i - 1$ și $i - 2$, valorile lui b_1, b_2, c_1, c_2 din relațiile (14) pot fi calculate cu următoarele formule *) :

$$b_1 = \frac{3}{2\cdot\Delta t}\,;\quad b_2 = \frac{1}{2\cdot\Delta t}\left[-3\alpha_{i-1} - \Delta t\cdot\dot{\alpha}_{i-1} + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{\alpha}_{i-1}\right], \tag{16.a}$$

$$c_1 = \frac{2}{(\Delta t)^2}\,;\quad c_2 = -\frac{2}{(\Delta t)^2}(\alpha_{i-1} + \Delta t\cdot\dot{\alpha}_{i-1}). \tag{16.b}$$

Se are în vedere faptul că se cunosc condițiile inițiale α_0, $\dot{\alpha}_0$ și $\ddot{\alpha}_0$.

Din ecuația (12) se poate obține apoi următoarea relație cu ajutorul căreia se poate determina valoarea α_i a unghiului de incidență corespunzător pasului i de integrare numerică :

$$(T^* \sin\alpha_i + C_L^\alpha\alpha_i - G^*)\left(C_m^\beta - \frac{\xi}{l}C_L^\beta\cos\alpha_i\right) +$$

$$+ C_L^\beta\left[J^*(c_1\alpha_i + c_2) - \left(C_m^\alpha - \frac{\xi}{l}C_L^\alpha\cos\alpha_i\right)\alpha_i - \right.$$

$$\left. - \frac{l}{2V}\hat{C}_m^q(b_1\alpha_i + b_2) + \frac{\xi}{l}(C_{D_0} + k_D\alpha_i^2)\sin\alpha_i\right] = 0. \tag{17}$$

*) Relațiile (16) rezultă exprimînd pe α_{i-2} și α_{i-3} în funcție de α_{i-1}, $\dot{\alpha}_{i-1}$, $\ddot{\alpha}_{i-1}$, din formulele cu diferențe regresive de ordinul doi și unu care dau respectiv pe $\dot{\alpha}_{i-1}$ și $\ddot{\alpha}_{i-1}$ și înlocuind lezultatul în formulele (15).

Pentru a determina valoarea necunoscută α_i a unghiului de incidență din ecuația transcendentă (17), se folosește o metodă de aproximații succesive. În acest scop, ecuația (17) este scrisă sub forma :

$$\alpha_i = f(\alpha_i), \tag{18.a}$$

unde

$$f(\alpha_i) = \frac{E - F\cos\alpha_i + (A - B\cos\alpha_i + C\alpha_i^2)(\alpha_i - \sin\alpha_i)}{D + (A - B\cos\alpha_i + C\alpha_i^2)}, \tag{18.b}$$

iar

$$A = T^* C_m^\beta + \frac{\xi}{l} C_L^\beta C_{D_0}, \tag{19.a}$$

$$B = \frac{\xi}{l} T^* C_L^\beta, \tag{19.b}$$

$$C = \frac{\xi}{l} k_D C_L^\beta, \tag{19.c}$$

$$D = C_m^\beta C_L^\alpha - C_L^\beta \left(C_m^\alpha - J^* c_1 + \frac{l}{2V} C_m^{\hat{q}} b_1 \right), \tag{19.d}$$

$$E = G^* C_m^\beta - C_L^\beta \left(J^* c_2 - \frac{l}{2V} C_m^{\hat{q}} b_2 \right), \tag{19.e}$$

$$F = \frac{\xi}{l} G^* C_L^\beta. \tag{19.f}$$

Se poate arăta că pentru domeniul obișnuit de incidențe ($-12°, +12°$), adică ($-0{,}2$ rad, $+0{,}2$ rad), și pentru valorile uzuale ale caracteristicilor aerodinamice, geometrice și inerțiale ale rachetei, funcția $f(\alpha_i)$ definită prin relația (18.b) satisface condiția

$$\sup |f'_{\alpha_i}(\alpha_i)| = \lambda, \quad \lambda < 1,$$

$$\alpha_i \in (-0{,}2, +0{,}2). \tag{20}$$

În aceste condiții, aplicația f este o contracție, și în virtutea teoremei Picard-Banach, punctul fix α_i al funcției $f(\alpha_i)$, adică rădăcina ecuației (17), există și este unică, putînd fi determinată printr-un procedeu iterativ cu ajutorul șirului de valori construit prin relația :

$$\alpha_{i,n} = \frac{E - F\cos\alpha_{i,n-1} + (A - B\cos\alpha_{i,n-1} + C\alpha_{i,n-1}^2)(\alpha_{i,n-1} - \sin\alpha_{i,n-1})}{D + (A - B\cos\alpha_{i,n-1} + C\alpha_{i,n-1}^2)}. \tag{21}$$

Se poate demonstra că oricare ar fi valoarea inițială $\alpha_{i,0}$ aleasă în intervalul $(-0{,}2, +0{,}2)$ rad, șirul (21) este convergent către punctul fix α_i căutat, iar eroarea comisă $d(\alpha_i, \alpha_{i,n})$, dacă în locul rădăcinii α_i se ia valoarea $\alpha_{i,n}$, este evaluată prin relația;

$$d(\alpha_i, \alpha_{i,n}) \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot d(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,0}). \tag{22}$$

Ca valoare de start, $\alpha_{i,0}$, în procesul iterativ, prin care se determină unghiul de incidență, α_i, poate fi utilizată valoarea incidenței la pasul precedent, adică

$$\alpha_{i,0} = \alpha_{i-1} \approx \alpha_{i-1,n}. \tag{23}$$

Se menționează că prin scrierea ecuației (17) sub forma (18), procesul iterativ folosit pentru determinarea valorii α_i a unghiului de incidență al rachetei devine foarte rapid convergent în toate cazurile concrete analizate.

În funcție de valoarea α_i a incidenței astfel stabilită se poate determina, din ecuația (10), la fiecare pas de integrare, unghiul de bracaj β_i al suprafețelor de comandă. (Valorile lui $\dot{\alpha}_i = q_i$ și $\ddot{\alpha}_i$ care intervin în ecuația (10) sînt date de relațiile (14).

a) STABILIREA CONDIȚIILOR INIȚIALE ALE MIȘCĂRII

Pentru inițierea procedeului de integrare numerică prezentat, este necesară cunoașterea condițiilor inițiale ale mișcării rachetei, adică a următorilor parametri cinematici, corespunzători momentului lansării: h_0, x_0, V_0, α_0, q_0.

Dacă se presupune că startul rachetei are loc de pe o rampă fixă sau de pe un lansator mobil (de exemplu un avion) a cărui mișcare este cunoscută, atunci se cunosc, în momentul părăsirii lansatorului, parametrii cinematici inițiali h_0, x_0, V_0, $q_0 = \dot{\alpha}_0$, precum și accelerația unghiulară inițială $\varepsilon_0 = \ddot{\alpha}_0$.

În ceea ce privește valoarea inițială α_0 a unghiului de incidență și a unghiului de bracaj inițial β_0 al suprafețelor de comandă, acestea trebuie determinate astfel încît racheta să urmărească chiar din momentul părăsirii lansatorului traiectoria rectilinie prescrisă. (Se precizează că în prezentul studiu se consideră că racheta se mișcă pe traiectoria rectilinie impusă chiar din momentul părăsirii lansatorului. Într-o lucrare ulterioară se va analiza cazul în care racheta are, imediat după lansare, o mișcare curbilinie după care ea intră pe traiectoria rectilinie prescrisă. Condițiile inițiale ale mișcării considerate în lucrarea prezentă corespund, în acest caz, punctului de racordare dintre porțiunea curbilinie și cea rectilinie ale traiectoriei).

Pentru a determina pe α_0 se introduc condițiile inițiale ale mișcării în ecuația (12). Se obține o ecuație transcendentă în α_0 pentru rezolvarea căreia se folosește aceeași metodă de aproximații succesive ca și în cazul

ecuației (17). În acest scop ecuația transcendentă obținută se pune sub forma :

$$\alpha_0 = f_0(\alpha_0), \tag{24.a}$$

în care

$$f_0(\alpha_0) = \frac{E_0 - F_0 \cos \alpha_0 + (A_0 - B_0 \cos \alpha_0 + C_0 \alpha_0^2)(\alpha_0 - \sin \alpha_0)}{D_0 + (A_0 - B_0 \cos \alpha_0 + C_0 \alpha_0^2)} \tag{24.b}$$

și în care s-a notat :

$$A_0 = T_0^* C_{m_0}^{\beta} + \frac{\xi_0}{l} C_{D_{00}} C_{L_0}^{\beta}, \tag{25.a}$$

$$B_0 = T_0^* \frac{\xi_0}{l} C_{L_0}^{\beta}, \tag{25.b}$$

$$C_0 = \frac{\xi_0}{l} k_{D_0} C_{L_0}^{\beta}, \tag{25.c}$$

$$D_0 = C_{L_0}^{z} C_{m_0}^{\beta} - C_{L_0}^{\beta} C_{m_0}^{\alpha}, \tag{25.d}$$

$$E_0 = G_0^* C_{m_0}^{\beta} - C_{L_0}^{\beta} \left(J_0^* \varepsilon_0 - \frac{l}{2V_0} q_0 C_{m_0}^{\hat{q}} \right), \tag{25.e}$$

$$F_0 = G_0^* \frac{\xi_0}{l} C_{L_0}^{\beta}. \tag{25.f}$$

Se poate arăta că și în acest caz funcția $f_0(\alpha_0)$ este o contracție astfel încît poate fi aplicată teorema Picard-Banach construind șirul convergent al aproximațiilor succesive :

$$\alpha_{0.n} = \frac{E_0 - F_0 \cos \alpha_{0.n-1} + (A_0 - B_0 \cos \alpha_{0.n-1} + C_0 \alpha_{0.n-1}^2)(\alpha_{0.n-1} - \sin \alpha_{0.n-1})}{D_0 + (A_0 - B_0 \cos \alpha_{0.n-1} + C_0 \alpha_{0.n-1}^2)}. \tag{26}$$

Valoarea de start a procesului iterativ pentru determinarea unghiului de incidență inițial se obține făcînd $n = 1$ și $\alpha_{0.0} \cong 0$ în relația (26).

Rezultă

$$\alpha_{0.1} = \frac{E_0 - F_0}{D_0 + A_0 - B_0}. \tag{27}$$

Procesul iterativ, care este foarte rapid convergent, se oprește la numărul n care dă pe α_0 cu precizia dorită ($\alpha_0 \approx \alpha_{0.n}$).

Avînd pe α_0, se poate calcula unghiul inițial de bracaj β_0 al suprafețelor de comandă cu ajutorul relației (10), în care se introduc valorile inițiale α_0, $\dot{\alpha}_0 = q_0$ și $\ddot{\alpha}_0 = \varepsilon_0$, precum și valorile inițiale ale coeficienților aerodinamici și ale celorlalte mărimi care sînt variabile cu timpul, cum ar fi : m_0, ξ_0, J_0, ρ_0 etc.

b. INTEGRAREA NUMERICĂ A SISTEMULUI DE ECUAȚII DIFERENȚIALE ALE MIȘCĂRII

Avînd condițiile inițiale ale mișcării : h_0, x_0, V_0, α_0 și q_0, sistemul de ecuații diferențiale (13. a) și (13.b) poate fi integrat prin una din metodele numerice cunoscute, de exemplu prin metoda Runge-Kutta-Gill de ordinul patru, metodă care permite realizarea preciziei de calcul dorite printr-un procedeu de înjumătățire a pasului de integrare prin care eroarea de calcul este redusă pînă la valoarea impusă.

Unghiul α, care intervine în ecuația (13. b), se determină la fiecare pas de integrare numerică prin procedeul iterativ indicat mai înainte.

În timpul integrării numerice, coeficienții aerodinamici și derivatele lor sînt considerați variabili cu numărul Mach, fiind dați prin valori numerice. Valorile lor corespunzătoare numărului Mach de zbor al rachetei la un moment oarecare sînt calculate utilizînd o metodă numerică de interpolare de tip Spline. O metodă asemănătoare de interpolare poate fi utilizată și pentru determinarea, la fiecare pas de integrare, a momentului de inerție J al rachetei față de axa de tangaj și a poziției ξ a centrului de masă, care sînt, de asemenea, variabile în raport cu timpul, fiind calculate anticipat și date prin valori numerice. Ele pot fi calculate și în cursul integrării numerice, la fiecare pas de integrare, dacă se cunoaște legea de ardere a combustibilului și modul de distribuire al acestuia în corpul rachetei.

Pentru calculul parametrilor termodinamici ai atmosferei (densitatea și viteza sunetului), care sînt variabile cu altitudinea h, poate fi utilizată, de asemenea, o metodă de interpolare numerică folosind valorile lor date de atmosfera standard sau pot fi folosite relații analitice de calcul așa cum s-a procedat în exemplul numeric prezentat la sfîrșitul lucrării.

La fiecare pas de integrare numerică, care corespunde unei anumite valori a timpului t, sînt determinate, prin algoritmul prezentat în paragraful 4, valorile necunoscutelor x, V, α, q, ε, cu ajutorul cărora se determină din relația (10) valoarea unghiului de bracaj β al suprafețelor de comandă.

Succesiunea în timp a valorilor unghiului de bracaj β astfel determinate constituie legea de comandă necesară pentru ca mișcarea rachetei să aibă loc pe traiectoria rectilinie prescrisă.

5. MIȘCAREA RACHETEI ÎN PERIOADA PASIVĂ

După încetarea funcționării motorului ($t > t_a$), racheta trebuie să continue mișcarea pe traiectoria rectilinie impusă.

Ecuațiile diferențiale ale mișcării rachetei în această perioadă se obțin din ecuațiile corespunzătoare perioadei active a motorului în care

se înlocuiesc :

$$T = 0, \quad J = J_f = \text{const.},$$

$$m = m_0 (1 - Qt_a) = m_f = \text{const.}, \quad \xi = \xi_f = \text{const.}$$

și se adaugă coeficientul de rezistență de fund C_{Dfd} la coeficientul de rezistență la înaintare la portanță nulă C_{D_0} al rachetei.

Pentru trecerea de la perioada activă de mișcare a rachetei la cea pasivă se poate presupune că în perioada de trecere, care durează aproximativ timpul $t_{tr} = (0{,}2 \div 0{,}4)$ secunde, masa rachetei continuă să scadă liniar cu timpul ca și în perioada activă, iar forța de tracțiune notată în acest interval cu T_{tr} scade, de asemenea, liniar cu timpul de la valoarea T_0 la valoarea zero după o relație de forma (5). Ca urmare, pentru a obține ecuațiile diferențiale ale mișcării rachetei în această perioadă se va înlocui T prin T_{tr} în ecuațiile diferențiale de mișcare corespunzătoare perioadei active.

Pentru integrarea ecuațiilor diferențiale de mișcare ale rachete corespunzătoare ultimelor două perioade (de trecere și pasivă) se vor folosi aceleași metode numerice ca și pentru integrarea ecuațiilor diferențiale de mișcare corespunzătoare perioadei active.

6. EXEMPLU NUMERIC DE CALCUL

Pentru a ilustra algoritmul de calcul stabilit, este prezentat un exemplu numeric în care au fost folosite următoarele date :

— caracteristicile geometrice și inerțiale ale rachetei ;

$S = 1 \text{ m}^2$, $m_0 = 600$ kg,

$l = 0{,}7$ m, $m_f = 400$ kg,

$\xi_F = 1{,}8$ m, $J_0 = 124{,}53$ kg m^2,

$\xi_{C_0} = 1{,}86667$ m, $J_f = 100$ kg m^2 ;

$\xi_{Cf} = 1{,}8$ m,

— caracteristicile motorului (pentru forța de tracțiune au fost considerate succesiv trei valori) :

$T_0 = 25\,000$ N, $t_a = 5$ s,

$T_0 = 50\,000$ N, $t_{tr} = 0{,}4$ s ;

$T_0 = 100\,000$ N,

— condițiile inițiale ale mișcării:

$$h_0 = 1\,000 \text{ m}, \qquad V_0 = 200 \text{ m/s},$$

$$x_0 = 0, \qquad q_0 = \varepsilon_0 = 0;$$

— panta traiectoriei rectilinii impuse:

$$\theta = 15°;$$

— timpul în care racheta trebuie să se mențină pe traiectoria rectilinie impusă:

$$t_f = 25 \text{ s}.$$

Poziția ξ_c a centrului de masă al rachetei și momentul de inerție J față de axa de tangaj au fost calculate ca funcții numerice de timp considerînd o anumită așezare a combustibilului în corpul rachetei. Variația lor în funcție de timp este arătată în figura 2 și a fost introdusă în calcul sub formă numerică.

Variația în raport cu numărul Mach a coeficienților aerodinamici și a derivatelor acestora este indicată, pentru exemplul numeric prezentat, în figurile 3, 4 și 5. Valorile lor au fost introduse în calculul sub formă numerică. În exemplul numeric prezentat s-a considerat $k_D \approx C_L^z$ (1/rad) și $C_{Dfă} \approx 0$.

Densitatea aerului, considerată variabilă cu altitudinea, a fost calculată cu ajutorul relației

$$\rho = \rho_P \cdot e^{-k_\rho h}, \tag{28}$$

în care ρ_P este densitatea aerului la nivelul mării ($\rho_P = 1{,}229$ kg/m^3), iar k_ρ este o constantă pentru care au fost luate valori diferite pe intervale de înălțimi de 1 000 m, valori calculate cu ajutorul datelor oferite de atmosfera standard.

Pentru calculul vitezei sunetului în atmosferă au fost folosite relațiile:

$$a = a_P - k_S h \qquad \text{pentru } h < 10 \cdot 668 \text{ m},$$

$$a = 296{,}2656 \text{ m/s} \qquad \text{pentru } h \geqslant 10 \cdot 668 \text{ m}, \tag{29}$$

în care a_P este viteza sunetului în atmosferă la nivelul mării ($a_P = 340{,}1568$ m/s), k_S este o constantă ($k_s = 0{,}004114286$ s^{-1}), iar h este măsurat de la nivelul mării.

Rezultatele obținute sînt prezentate în diagramele din figurile 6—10 în care sînt reprezentate grafic, în funcție de timp, distanța x parcursă de rachetă în lungul traiectoriei impuse, viteza rachetei V, numărul Mach de zbor M, unghiul de incidență al rachetei α și unghiul de bracaj β al suprafețelor de comandă pentru cele trei valori considerate pentru forța de tracțiune.

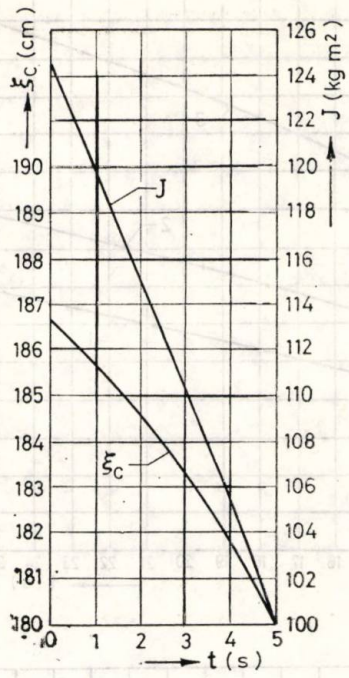


Fig. 2

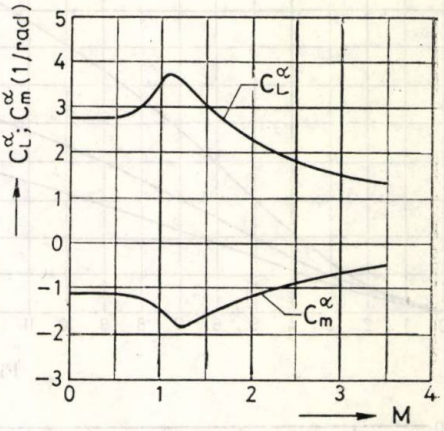


Fig. 3

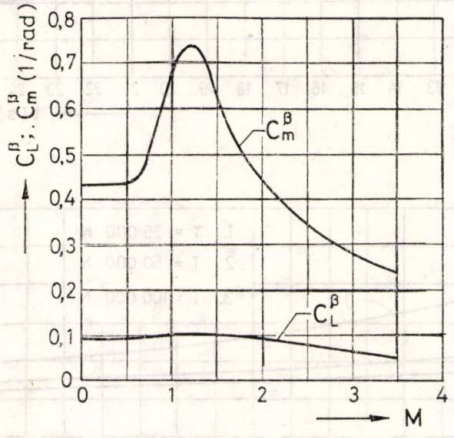


Fig. 4

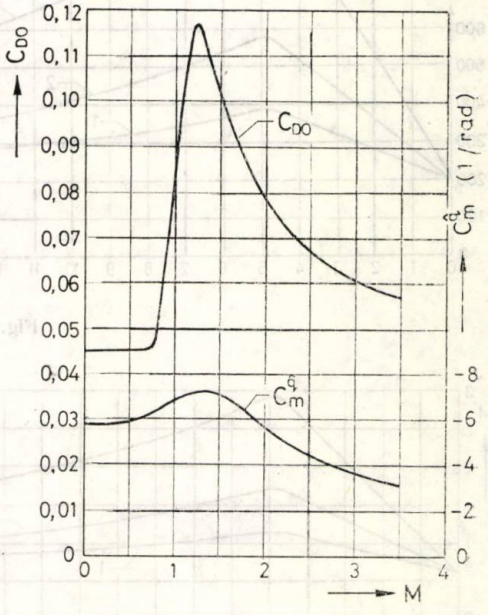


Fig. 5

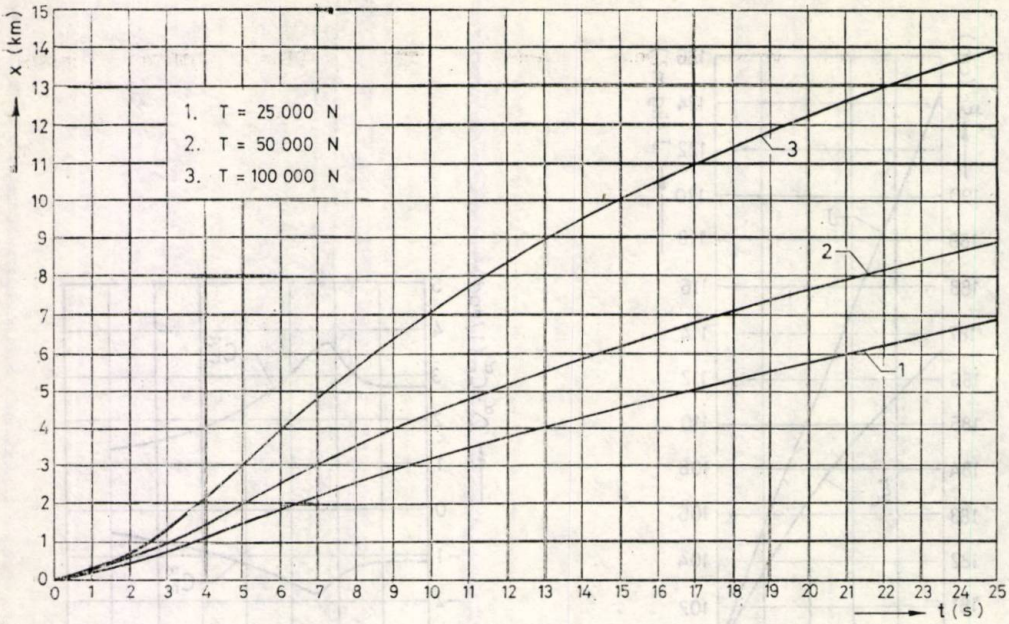


Fig. 6

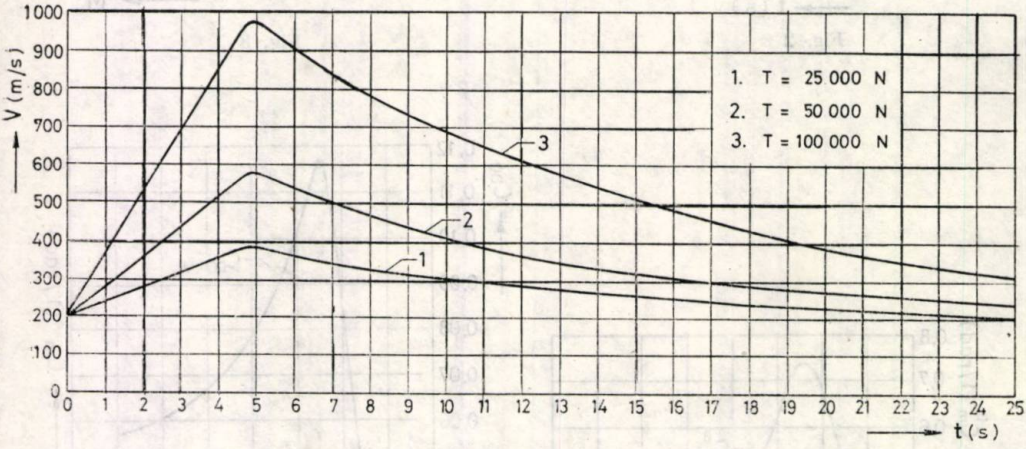


Fig. 7

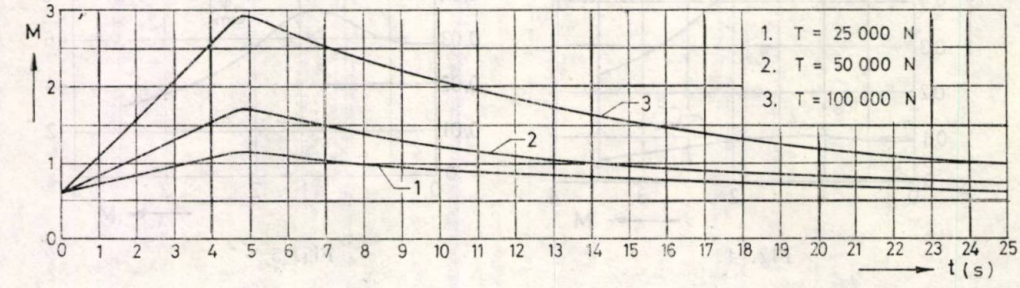


Fig. 8

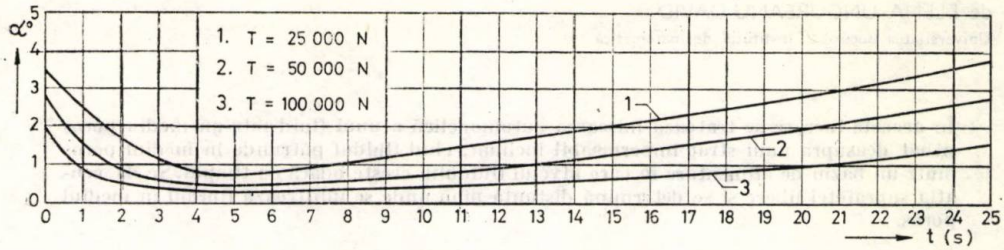


Fig. 9

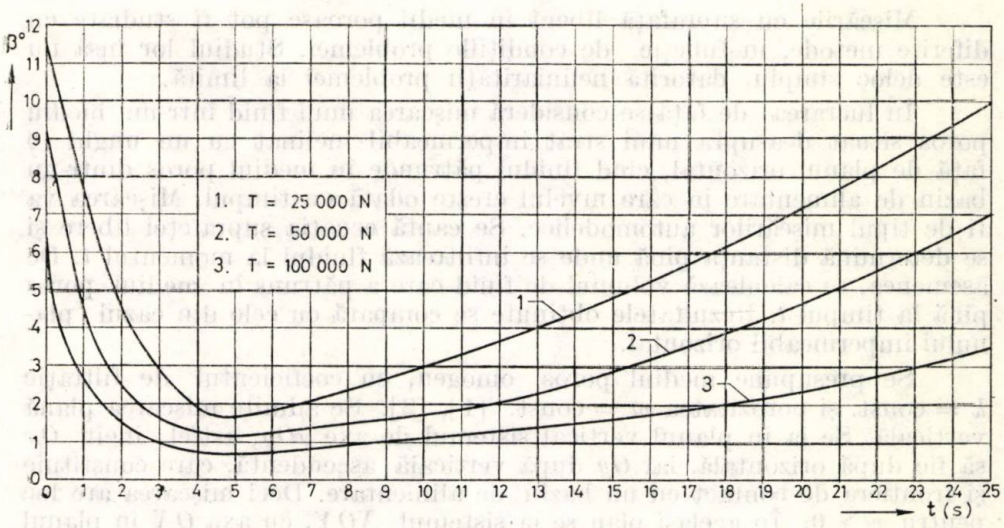


Fig. 10

Variația în timp a unghiului de bracaj β al suprafețelor de comandă, reprezentat în figura 10, indică legea de comandă necesară pentru ca racheta să urmărească în mișcarea sa traiectoria rectilinie impusă în exemplul numeric prezentat.

Primită la redacție la 8 noiembrie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI și colab., *Wing theory in supersonic flow*, Pergamon Press, London, New-York, 1969.
2. A. CODOBAN, *The rocket motion in resisting medium on a given trajectory*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **18**, *3*, p. 511—527 (1973).
3. AL. MARINESCU, *Introducere în dinamica rachetei*, Editura Academiei R. S. România, București, 1967.
4. M. M. NIȚĂ, D. ST. ANDREESCU, *Zborul rachetei*, Editura militară, București, 1964.
5. M. SALVADORI, M. BARON, *Metode numerice în tehnică*, Editura tehnică, București, 1972.

MIȘCĂRI AUTOMODELICE ALE FLUIDELOR ÎN MEDII POROASE

de ELENA UNGUREANU-DAVID
Universitatea București. Institutul de matematică

În această lucrare se tratează mișcarea automodelică a unui fluid într-un mediu poros situat deasupra unui strat impermeabil înclinat, cînd fluidul pătrunde în mediul poros dintr-un bazin de alimentare în care nivelul fluidului crește odată cu timpul. Se dă ecuația suprafeței libere și se determină distanța pînă unde se infiltrează fluidul în mediul poros.

1. FORMULAREA PROBLEMEI

Mișcările cu suprafață liberă în medii poroase pot fi studiate cu diferite metode, în funcție de condițiile problemei. Studiul lor însă nu este deloc simplu, datorită neliniarității problemei la limită.

În lucrarea de față se consideră mișcarea unui fluid într-un mediu poros situat deasupra unui strat impermeabil înclinat cu un unghi θ față de planul orizontal, cînd fluidul pătrunde în mediul poros dintr-un bazin de alimentare în care nivelul crește odată cu timpul. Mișcarea va fi de tipul mișcărilor automodelice. Se caută ecuația suprafeței libere și se determină distanța pînă unde se infiltrează fluidul la momentul t. De asemenea, se calculează volumul de fluid care a pătruns în mediul poros pînă la timpul t. Rezultatele obținute se compară cu cele din cazul planului impermeabil orizontal.

Se presupune mediul poros omogen, cu coeficientul de filtrație $k = \text{const.}$ și porozitatea $m = \text{const.}$ [1], [2]. Se admite mișcarea plană verticală. Se ia în planul vertical sistemul de axe xOy, astfel încît Ox să fie după orizontală, iar Oy după verticală ascendentă, care constituie și frontiera de contact cu un bazin de alimentare. Deci mișcarea are loc pentru $x \geqslant 0$. În același plan se ia sistemul XOY, cu axa OX în planul impermeabil, iar OY perpendiculară pe OX. Originea O a celor două sisteme de axe este aceeași. Unghiul θ este măsurat de la axa Ox la OX și poate fi pozitiv sau negativ, după cum axa OX este rotită față de axa Ox în sens trigonometric sau invers. Se presupune că acest unghi este mic.

Formulele care dau legătura între coordonatele unui punct în sistemul xOy și sistemul XOY sînt

$$\begin{aligned} x &= X\cos\theta - Y\sin\theta, \\ y &= X\sin\theta + Y\cos\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Relații asemănătoare sînt satisfăcute și de componentele vitezei de filtrație $\vec{v}$

$$\begin{aligned} u &= U\cos\theta - V\sin\theta, \\ v &= U\sin\theta + V\cos\theta, \end{aligned} \tag{2}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 3, 1983, P. 240–244

unde u, v sînt componentele vitezei după axele Ox, Oy, iar U, V sînt componentele după axele OX, OY.

Mișcarea în mediul poros este guvernată de legea lui Darcy [1], [2],

$$\vec{v} = -\frac{k}{\rho g}\operatorname{grad}(p + \rho g y), \tag{3}$$

unde p este presiunea, ρ — densitatea fluidului, g — accelerația gravitațională. De aici se pot scrie componentele vitezei de filtrație

$$\begin{aligned} u &= -\frac{k}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x}; & U &= -\frac{k}{\rho g}\left(\frac{\partial p}{\partial X} + \rho g \sin\theta\right), \\ v &= -\frac{k}{\rho g}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g\right), & V &= -\frac{k}{\rho g}\left(\frac{\partial p}{\partial Y} + \rho g \cos\theta\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Notăm cu $h(x, t)$, respectiv $H(X, t)$ cota suprafeței libere raportată la sistemul xOy sau XOY. Ecuația suprafeței libere se scrie deci

$$y = h(x, t) \text{ sau } Y = H(X, t). \tag{5}$$

Relația dintre cele două funcții rezultă din (1),

$$h = \frac{H + x\sin\theta}{\cos\theta}, \quad H = \frac{h - X\sin\theta}{\cos\theta}. \tag{6}$$

Ecuația cu derivate parțiale pentru funcția $H(X, t)$ a fost scrisă în [3], în aceleași ipoteze ca și ecuația lui Boussinesq, care descrie mișcarea cu suprafață liberă deasupra unui plan impermeabil orizontal.

În cazul nostru, planul impermeabil este înclinat cu un unghi θ mic față de planul orizontal și ecuația pentru $H(X, t)$ este cea dată în [3], cu unele notații schimbate

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{k}{m}\frac{\partial}{\partial X}\left[H\left(\cos\theta\frac{\partial H}{\partial X} + \sin\theta\right)\right] = 0. \tag{7}$$

Vom scrie acum condițiile inițială și la limită.

La momentul $t = 0$ nu se află deloc fluid în mediul poros, deci

$$H(X, 0) = 0. \tag{8}$$

În bazinul de alimentare nivelul fluidului crește proporțional cu timpul, astfel că

$$h(x, t)\big|_{x=0} = At, \tag{9}$$

unde A este o constantă. Pentru funcţia H această condiţie se scrie aproximativ. Unghiul θ fiind mic, din (9) şi prima relaţie (6) rezultă

$$H(X, t)|_{X=0} = At \cos \theta. \tag{10}$$

Suprafaţa liberă a fluidului din mediul poros coboară cu cît ne îndepărtăm de bazinul de alimentare şi ea întîlneşte planul impermeabil la distanţa $L = L(t)$ de bazin. Această distanţă trebuie şi ea determinată. Condiţia care se pune este

$$H(X, t)|_{X \geqslant L} = 0. \tag{11}$$

Problema este deci de a rezolva ecuaţia (7) cu condiţiile (8), (10), (11).

2. REZOLVAREA PROBLEMEI

Se procedează ca şi în cazul mişcărilor automodelice cînd mediul poros este situat pe un plan impermeabil orizontal. Se face următoarea schimbare de variabilă şi funcţie

$$H = At \cos \theta \, f(\zeta), \qquad \zeta = aX t^n. \tag{12}$$

Alegînd

$$a = \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\frac{m}{kA}}, \qquad n = -1, \tag{13}$$

ecuaţia (7) devine

$$(ff')' + f' + \sqrt{\frac{k}{Am}} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} f' - f = 0. \tag{14}$$

unde aceentul înseamnă derivata cu ζ.

Condiţiile la limită pentru f vor fi

$$f(0) = 1 \text{ şi } f|_{\zeta \geqslant \zeta_0} = 0, \tag{15}$$

unde ζ_0 corespunde lui $X = L(t)$, deci $\zeta_0 = aL(t)\, t^{-1}$.

Soluţia problemei se poate scrie sub forma

$$f(\zeta) = \begin{cases} C_0 + C_1 \zeta, & 0 \leqslant \zeta \leqslant \zeta_0; \\ 0 \qquad\quad , & \zeta > \zeta_0. \end{cases} \tag{16}$$

Funcția f variază între 1 și 0. Prin înlocuirea în ecuație și condiții la limită, rezultă C_0 și C_1. În final, soluția pentru H se scrie

$$H(X,t)=\begin{cases} At\cos\theta\left[1-\dfrac{X}{2At\cos\theta}\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\sqrt{\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{4mA}{k}}\right)\right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pentru } 0\leqslant X\leqslant L, \\ 0 \quad \text{pentru } X>L. \end{cases} \tag{17}$$

Distanța $L(t)$ pînă unde se infiltrează fluidul la momentul t se scoate din condiția $H(L,t)=0$,

$$L(t)=\frac{At\sqrt{k}\cos\theta}{\sqrt{mA}\,[N+\sqrt{1+N^2}]}, \qquad N=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mA}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}. \tag{18}$$

Cu aceasta funcția H devine

$$H(X,t)=\begin{cases} At\cos\theta\left[1-\dfrac{X}{L}\right], & 0\leqslant X\leqslant L(t), \\ 0, & X>L(t). \end{cases} \tag{19}$$

3. INTERPRETAREA SOLUȚIEI

Suprafața liberă dată de (19) este o dreaptă avînd panta egală cu

$$\operatorname{tg}\beta=-\frac{At\cos\theta}{L}. \tag{20}$$

Pentru $\theta=0$ se regăsește soluția din cazul mișcării deasupra planului impermeabil orizontal [1]. În particular, pentru funcția $L(t)$ avem valoarea $L_0(t)=\sqrt{\dfrac{kA}{m}}\,t$, acum L_0 fiind măsurată pe axa Ox. Comparînd distanțele $L(t)$ și $L_0(t)$ la un anumit timp, găsim că pentru θ pozitiv, deci patul impermeabil situat deasupra orizontalei,

$$L(t)<L_0(t). \tag{21}$$

Un lucru important de știut este cel al volumului total de fluid care pătrunde în mediul poros pînă la un anumit timp t. Considerînd că în direcția perpendiculară pe planul XOY se ia un strat de grosime egală cu unitatea, volumul de fluid este dat de formula

$$V(t)=\int_0^L H(X,t)\,dX=\frac{1}{2}At\,L\cos\theta=\frac{At^2\cos^2\theta\sqrt{kA}}{2\sqrt{m}\,[N+\sqrt{1+N^2}]}. \tag{22}$$

Este ușor de observat că dacă în locul mediului poros ar fi un mediu impermeabil, deci $k = 0$, volumul de fluid intrat este nul.

În cazul patului impermeabil orizontal, volumul de fluid este

$$V_0(t) = \frac{1}{2} A t L_0 = \frac{At^2}{2} \sqrt{\frac{kA}{m}} \tag{23}$$

și se deduce imediat că pentru $\theta > 0$

$$V(t) < V_0(t). \tag{24}$$

Primită la redacție la 24 iulie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. ȘT. I. GHEORGHIȚĂ, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*, Edit. Academiei R.S. România, București, 1966.
2. HORIA I. ENE, SORIN GOGONEA, *Probleme în teoria filtrației*, Edit. Academiei R. S. România București, 1973.
3. HORIA I. ENE, ELENA UNGUREANU-DAVID, *Asupra mișcării cu suprafață liberă într-un mediu poros*, St. cerc. mec. apl., **42**, 2, 1983.

ASUPRA JETURILOR LA VITEZĂ CRITICĂ

de FELICIA POPESCU
Direcția Apelor Jiu—Cerna, Craiova

Generalizînd rezultate ale lui K. G. Guderley [1], L. V. Ovseanikov [2], C. Roumieu [3], P. Germain și R. Bader [4], în prezenta lucrare se reia problema jetului considerată de C. Iacob [10], corespunzînd figurii 1, cu scopul de a se determina distanța dintre orificiu și linia sonică, în cazul în care viteza pe liniile libere este egală cu viteza critică. Metoda utilizată e aceea a lui S. Falcovici [12], astfel cum a fost ea generalizată de C. Iacob [11].

1. Studiind problema de jet în cazul pereților plani, perpendiculari pe direcția de mișcare a fluidului, Guderley [1] în anul 1947 și Ovseanikov [2] în anul 1949 au remarcat următoarea proprietate :

Dacă presiunea pe suprafața jetului devine critică, $p = p^*$, adică viteza pe liniile libere devine egală cu viteza critică $V = V^*$, atunci locul geometric al punctelor de pe diferitele linii de curent în jet, unde viteza devine egală cu viteza sunetului, este o linie dreaptă, situată la distanță finită de orificiu și această linie este normală la jet.

În 1952, Ch. Roumieu [3] s-a ocupat de calculul numeric al distanței de la orificiu pînă la linia de trecere pentru acest caz, și aceeași problemă este reluată pe o cale mai riguroasă de P. Germain și R. Bader [4].

Sedov [5], bazîndu-se pe rezultatele lui I. Rudnev [6], care în 1949 a dat generalizarea teoriei lui Ciaplîghin pentru legea

$$\rho = \rho(p), \tag{1}$$

demonstrează existența liniei de trecere și calculează distanța pînă la această linie în cazul jetului cu pereți de formă arbitrară considerînd legea de compresibilitate de forma (1).

Începînd din 1936, C. Iacob [7], [8] a dezvoltat studiul jetului cu pereți plani, înclinați cu un unghi μ față de axa de simetrie Ox.

Expresia distanței de la marginea vîrfului pînă la linia de trecere, în acest caz, a fost calculată de G. Camenski [9] în anul 1962.

2. Vom deduce expresia distanței de la orificiu pînă la linia de trecere în cazul configurației studiată de C. Iacob [10], [11], configurație reprezentată în figura 1.

Fie V_1 viteza curentului la infinit amonte, iar V_0 viteza pe liniile libere CD, $C'D'$.

Domeniul hodografic corespunzător este un sector de cerc, prevăzut cu o tăietură de-a lungul axei Ou (fig. 2), raza sectorului fiind egală cu V_0, iar abscisa punctelor A, A' fiind V_1.

Convenim să facem notațiile :

$\tau = \dfrac{V^2}{V_{max}^2}$, V fiind mărimea vectorului viteză; $\beta = (\gamma - 1)^{-1}$,

$\tau^* = (2\beta + 1)^{-1}$ valoarea lui τ corespunzătoare vitezei critice V^*,

θ — unghiul vectorului viteză cu axa Ox,

$\psi(\theta, \tau)$, $\varphi(\theta), \tau)$ funcţia de curent, respectiv funcţia de potenţial. $W(\tau) = -2\lambda_n \dfrac{(1-\tau)^\beta}{\tau}$ este wronskianul funcţiilor $Z(\tau, \lambda_n)$, $Z(\tau, -\lambda_n)$ unde

$$Z(\tau, \lambda_n) = \tau^{\lambda_n} Y(\tau, \lambda_n);\ Z(\tau, -\lambda_n) = \tau^{-\lambda_n} Y(\tau, -\lambda_n),$$

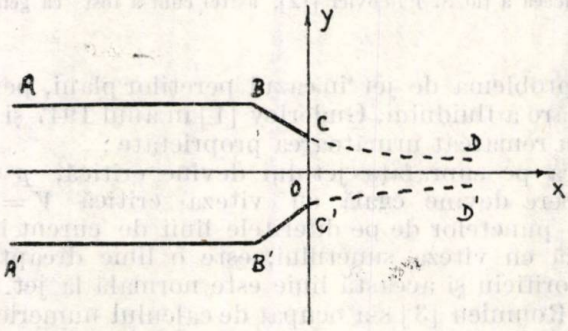


Fig. 1

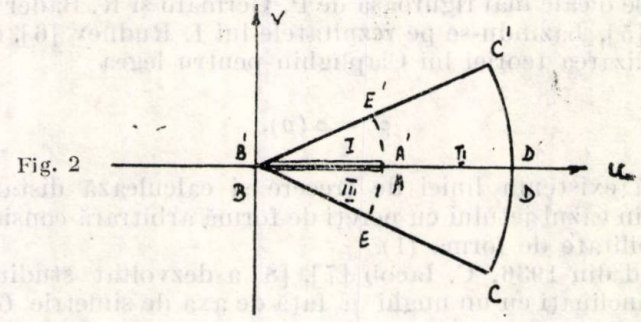


Fig. 2

cu $Y(\tau, \lambda_n)$, $Y(\tau, -\lambda_n)$ soluţii ale ecuaţiei:

$$\tau(1-\tau)\, y'' + [2\lambda_n + 1 - \tau(2\lambda_n + 1 - \beta)]\, y + \beta\lambda_n(2\lambda_n + 1) = 0,$$

şi avînd $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{2\mu}$,

$$X(\tau, \lambda_n) = \frac{\tau}{\lambda_n} \frac{Z'_\tau(\tau, \lambda_n)}{Z(\tau, \lambda_n)}.$$

Rezolvarea sistemului:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= \frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} &= -\frac{1 - (2\beta + 1)\,\tau}{2\tau\,(1-\tau)^{\beta+1}} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \end{aligned} \tag{2}$$

revine la rezolvarea problemei Dirichlet pentru ecuația lui Ciaplighin:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right]+\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0, \tag{3}$$

cu condițiile la limită.

$$\psi=\frac{q}{2} \text{ pe } ABCD; \qquad \psi=-\frac{q}{2} \text{ pe } A'B'C'D', \tag{4}$$

$\psi = 0$ pe AD (din motive de simetrie).

Prin trasarea arcului de cerc $E'A'AE$, domeniul din planul hodografic a fost împărțit în trei domenii I, II, III, pentru care s-au obținut următoarele expresii ale lui:

$$\psi_{\mathrm{I}}=-\frac{q}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n Z(\tau,\lambda_n)\sin\frac{n\pi\,\theta}{\mu},$$

$$\psi_{\mathrm{III}}=\frac{q}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n Z(\tau,\lambda_n)\sin\frac{n\pi\,\theta}{\mu}, \tag{5}$$

$$\psi_{\mathrm{II}}=-\frac{q\theta}{2\mu}-\frac{q}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\chi(\tau,\lambda_n)\sin\frac{n\pi\,\theta}{\mu},$$

cu

$$a_n=-\frac{q\theta}{\pi n}\left[1-\frac{Z(\tau_0,\lambda_n)\,Z'_{\tau}(\tau_1,-\lambda_n)-Z(\tau_0,-\lambda_n)\,Z'_{\tau}(\tau_1,\lambda_n)}{W(\tau_1)}\right]\frac{1}{Z(\tau_0,\lambda_n)}$$

și

$$\chi(\tau,\lambda_n)=\frac{Z(\tau,\lambda_n)}{Z(\tau_0,\lambda_n)}-\frac{(1-\tau)^{-\beta}}{2}\frac{Z(\tau_1,\lambda_n)}{Z(\tau_0,\lambda_n)}\begin{vmatrix}Z(\tau,\lambda_n) & Z(\tau,-\lambda_n)\\ Z(\tau_0,\lambda_n) & Z(\tau_0,-\lambda_n)\end{vmatrix}X(\tau_1,\lambda_n).$$

Din formula de trecere la planul fizic,

$$\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{V}\left[\mathrm{d}\varphi+\mathrm{i}(1-\tau)^{-\beta}\,\mathrm{d}\psi\right], \tag{6}$$

deducem

$$\mathrm{d}x=\frac{\cos\theta}{V}\,\mathrm{d}\varphi-(1-\tau)^{-\beta}\frac{\sin\theta}{V}\,\mathrm{d}\psi.$$

Dacă presupunem că pe suprafaţa jetului presiunea devine egală cu presiunea critică, formula de mai sus se scrie :

$$\mathrm{d}x = \frac{\cos\theta}{V^*}\,\mathrm{d}\varphi - (1-\tau^*)^{-\beta}\frac{\sin\theta}{V^*}\,\mathrm{d}\psi.$$

În lungul liniei de jet, ţinînd seama că avem $\psi = \text{const.}$ şi $\tau = \tau^* = \text{const.}$, rezultă

$$\mathrm{d}x = \frac{\cos\theta}{V^*}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Dar din sistemul (2) avem :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau},$$

de unde

$$\mathrm{d}x = \frac{\cos\theta}{V^*}\,\frac{2\tau^*}{(1-\tau^*)^{\beta}}\left.\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right|_{\tau=\tau^*}\mathrm{d}\theta.$$

Este evident faptul că expresia lui ψ pe care trebuie să o considerăm este ψ_{II}.

Vom avea deci :

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right|_{\tau=\tau^*} = -\frac{q}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\chi'_{\tau}(\tau^*, \lambda_n(\,\sin\frac{n\pi\,\theta}{\mu}\cdot$$

Rezultă

$$\mathrm{d}x = -\frac{q}{\pi V^*}\,\frac{2\tau^*}{(1-\tau^*)^{\beta}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\chi'_{\tau}(\tau^*, \lambda_n)\cos\theta\,\sin\frac{n\pi\,\theta}{\mu}\cdot \tag{7}$$

Folosind formula

$$\sin\frac{n\pi\,\theta}{\mu}\cos\theta = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{\mu}+1\right)\theta + \sin\left(\frac{n\pi}{\mu}-1\right)\theta\right],$$

şi integrînd relaţia (7) de la $x = 0$, $\theta = \mu$ pînă la $x = x^*$, $\theta = 0$, obţinem distanţa x^* de la orificiu pînă la linia de trecere

$$x^* = \frac{2q\,\mu}{V^*}\,\frac{\tau^*}{(1-\tau^*)^{\beta}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cos\mu}{n^2\pi^2-\mu^2}\,\chi'_{\tau}(\tau^*, \lambda_n),$$

ţinînd seama de faptul că

$$\int_{\mu}^{0}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{\mu}+1\right)\theta+\sin\left(\frac{n\pi}{\mu}-1\right)\theta\right]d\theta=-\frac{2n\,\pi\mu}{n^2\pi^2-\mu^2}\,[1-(-1)^n\cos\mu].$$

Deoarece $q = V^*(1-\tau^*)^{\beta}h'$, unde h' este lăţimea jetului în dreptul liniei de trecere, se poate scrie:

$$x^* = 2h'\,\mu\tau^*\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cos\mu}{n^2\pi^2-\mu^2}\,\chi'_{\tau}(\tau^*,\lambda_n).$$

Coeficientul de contracţie al acestui jet, Γ, fiind dat de formula [10],

$$\frac{1}{\Gamma}=1+4\mu\sin\mu\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\chi'_{\tau}(\tau^*,\lambda_n)}{n^2\pi^2-\mu^2}, \tag{8}$$

scriem

$$x^*=\frac{h'\cos\mu}{2\sin\mu}\left[4\mu\sin\mu\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\tau^*\,\chi'_{\tau}(\tau^*,\lambda_n)}{n^2\pi^2-\mu^2}\right]+$$

$$+2\mu h'\,\tau^*\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi'_{\tau}(\tau^*,\lambda_n)}{n^2\pi^2-\mu^2},$$

şi ţinînd seama de (8), avem

$$x^*=h'\left[\frac{\cos\mu}{2\sin\mu}\left(\frac{1}{\Gamma}-1\right)+2\mu\,\tau^*\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi'_{\tau}(\tau^*,\lambda_n)}{n^2\pi^2-\mu^2}\right]. \tag{9}$$

De aici se pot obţine expresiile distanţei de la marginea orificiului pînă la linia de trecere pentru cîteva cazuri particulare.

Astfel, pentru $\tau_1 = 0$ avem cazul ajutajului convergent.

Înlocuind în expresia lui Γ pe $\tau_1 = 0$, obţinem coeficientul de contracţie în acest caz, pe care îl notăm cu Γ_∞ şi avînd în vedere că

$$\chi'_{\tau}(\tau^*,\lambda_n)\big|_{\tau_1=0}=\frac{Z'_{\tau}(\tau^*,\lambda_n)}{Z(\tau^*,\lambda_n)}\quad\text{şi}\quad X(\tau^*,\lambda_n)=\frac{\tau^*}{\lambda_n}\,\frac{Z'_{\tau}(\tau^*,\lambda_n)}{Z(\tau^*,\lambda_n)},$$

obţinem

$$x^*h='\left[\frac{\cos\mu}{2\sin\mu}\left(\frac{1}{\Gamma_\infty}-1\right)+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nX(\tau^*,\lambda_n)}{n^2\pi^2-\mu^2}\right]. \tag{10}$$

Luînd $\mu = \frac{\pi}{2}$ în formula (9), avem pentru cazul studiat de Falkovici [12]:

$$x^* = \frac{4\tau^* h'}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi'_\tau(\tau^*, \lambda_n)}{4n^2 - 1}.$$

Notînd cu K coeficientul de contracţie corespunzătoare acestui caz ştim că $\frac{h'}{h} = K$, h fiind lăţimea orificiului CC'.

Rezultă astfel

$$x^* = \frac{4Kh\,\tau^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi'_\tau(\tau^*, \lambda_n)}{4n^2 - 1}. \tag{11}$$

Dacă în (11) considerăm $\tau_1 = 0$, obţinem expresia distanţei de la marginea orificiului pînă la linia de trecere în cazul jetului cu pereţi perpendiculari pe direcţia de mişcare a fluidului, studiat de Ciaplighin:

$$x_1^* = \frac{4K_\infty h\tau^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \frac{Z'_\tau(\tau^*, \lambda_n)}{Z(\tau^*, \lambda_n)}, \tag{12}$$

unde prin K_∞ s-a notat coeficientul de contracţie corespunzător.

Primită la redacţie la 5 august 1928

BIBLIOGRAFIE

1. K. G. GUDERLEY, *Theorie Schallnaher Strömungen*, Springer-Verlag, Berlin, 1957, 136.
2. L. V. OVSEANIKOV, *Ob odnom gazovom tecenii s priamoi liniei perehoda*, P. M. M., **XII**, *B—5*, 537—542 (1949).
3. CH. ROUMIEU, *Recherches sur le jet critique plan*, C— R. Acad. Sci. Paris, **234**,52—54 (1952).
4. P. GERMAIN, R. BADER, *Problèmes elliptiques et hyperboliques singuliers pour une équation du type mixte* O.N.E.R.S. Publ. nr. *60*, 22—27 (1952).
5. L. I. SEDOV, *Ploskie zadaci gidrodinamiki i aerodinamiki*, Moscova—Leningrad, 1950, 436—439.
6. I. RUDNEV, SBOKRIK, *Teoreticeskaia gidrodinamika*, Oboronghiz, *4* (1949).
7. C. IACOB, Comptes redus, Paris **203**, 423 (1936).
8. C. IACOB, Portugaliae Mathematica, *1*, 209—257 (1939).
9. G. CAMENSKI, *Asupra jeturilor convergente de viteză critică*, Comunicările Academiei R. S. România, 1962.
10. C. IACOB, Archiwum Mechaniki Stosowanej, *3/4*, 603—619 (1962).
11. C. IACOB, Atti della 2-a Riunione del Groupement de Mathémaciens d'expression latine, Firenze, 1961.
12. S. V. FALKOVICI, P.M.M., **21**, 459—464 (1957).

DINAMICA CURGERII TURBULENTE ÎN BIEFUL AVAL AL C.H.E. DE JOASĂ CĂDERE

de I. SETEANU, M. ERHAN
Institutul politehnic București

Se analizează evazarea curgerii în bieful aval al amenajărilor hidroelectrice de joasă cădere în ipoteza curgerii macroturbulente, modelînd adecvat intensitatea turbulenței. Se prezintă metodele numerice de calcul și rezultatele pentru un caz concret analizat.

INTRODUCERE

Determinarea spectrului hidrodinamic al evazării curgerii în bieful aval al amenajărilor hidroelectrice de joasă cădere prezintă un interes major datorită influenței regimului hidraulic asupra eficienței exploatării hidroagregatelor, întrucît se constată că randamentul hidraulic al unui grup este influențat sensibil de programul de funcționare a agregatelor vecine.

Regimul turbulent de curgere în bieful aval prezintă două zone caracteristice :

— zona de ejecție, în aval de aspiratoare, unde, datorită vîrtejului indus remanent al rotorului, intensitatea turbulenței este accentuată, dar se amortizează spațial rapid prin difuzie ;

— zona de evazare a curentului în plan orizontal, în care gradienții intensității turbulente sînt comparativ mai scăzuți, avînd ca rezultat racordarea curgerii de la regim de jet înecat la regimul fluvial uniform în secțiunea transversală a biefului. În această zonă este caracteristică prezența apei moarte și a curgerii inverse.

Procesul hidrodinamic al curgerii în prima zonă (interacțiunea jeturilor) a fost analizat în lucrarea [1], curgerea în regim de jet înecat în [2], [3] etc., iar evazarea curgerii în plan orizontal în lucrarea [4].

În prezentul studiu se descrie un model simplificat pentru determinarea parametrilor hidrodinamici ai curgerii în zona de evazare, insistîndu-se asupra ipotezelor fizice legate de caracterul regimului macroturbulent. Se prezintă metode analitice și numerice de calcul adecvate, precum și rezultatele numerice pentru un caz concret. Existența unei suprafețe de separație la frontiera zonei de apă moartă impune modificări substanțiale ale ipotezei lui Levi [4] relativ la variația intensității turbulenței în secțiunea transversală a curgerii, dar adoptarea modelului difuziv al lui Reichardt [5] se dovedește justificată cu o bună aproximație. Rezultatele obținute reflectă cu o precizie acceptabilă fenomenul real, impunîndu-se totuși un studiu aprofundat al parametrilor locali ai microturbulenței.

1. MODELUL MATEMATIC

Admițînd curgerea bidimensională în plan orizontal și notînd prin U viteza longitudinală medie pe verticală, sistemul de ecuații al lui Rey-

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 3, 1983, P. 251–258

nolds, pentru ipoteza unei distribuţii hidrostatice a presiunii, se reduce la relaţia :

$$\frac{\partial \overline{U^2}}{\partial x} = -g\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{g\overline{U^2}}{C^2 h} - \frac{\partial}{\partial y}(\overline{U'V'}), \tag{1}$$

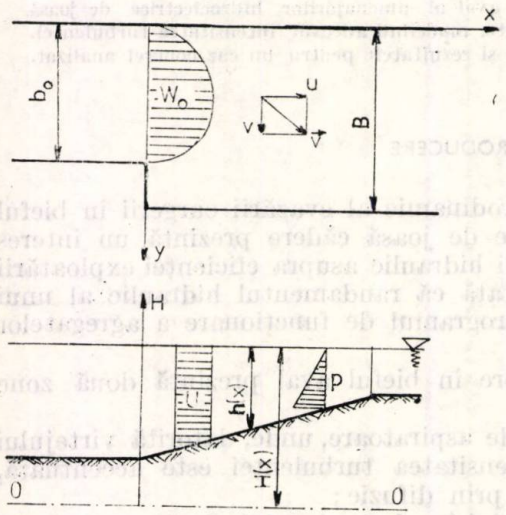


Fig. 1.

unde V este viteza transversală medie pe verticală, h — adîncimea locală, H — cota suprafeţei libere faţă de un plan orizontal de referinţă, U' şi V' sînt pulsaţiile vitezei, iar C este coeficientul lui Chèzy (după Manning $C = \frac{1}{n} R^{1/6}$, unde R este raza hidraulică locală, iar n — coeficientul de rugozitate), g — acceleraţia gravitaţională (fig. 1).

În continuare, se va utiliza ipoteza de transfer difuziv a lui Reichardt [5]

$$\overline{U'V'} = l(x)\frac{\partial \overline{U}^2}{\partial y}, \tag{2}$$

în care $l(x)$ joacă un rol similar lungimii de amestec. Introducînd expresia (2) în relaţia (1), se elimină din analiză pulsaţiile turbulente ale vitezei, obţinîndu-se ecuaţia

$$\frac{\partial \overline{U^2}}{\partial x} = -g\frac{\partial H}{\partial x} - g\frac{\overline{U^2}}{C^2 h} + l(x)\frac{\partial^2 \overline{U^2}}{\partial y^2}. \tag{3}$$

Admiţînd că nivelul suprafeţei libere este constant în secţiunea transversală ($H = H(x)$), se obţine relaţia echivalentă :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -g\frac{w}{C^2 h} + l(x)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{4}$$

unde funcţia w are expresia :

$$w = \overline{U^2} + g\int_0^x \frac{\partial H}{\partial x}\,dx \tag{5}$$

şi verifică următoarele condiţii la limită :

a) în lungul pereţilor laterali, $y = 0$, respectiv $y = B$, $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$, datorită anulării efortului de frecare vîscoasă, $\tau = \mu\frac{\partial U}{\partial y}$ la frontiera stratului limită ; al doilea termen din expresia (5) nu depinde de y ;

b) în secţiunea transversală de intrare ($x=0$) epura funcţiei $w|_{x=0} = \overline{U^2}|_{x=0}$ este cunoscută ; în cazul curgerii uniforme cu viteza U_0, $w = U_0^2$ pentru $y \leqslant b_0$ şi $w = 0$ în rest.

Introducînd variabilele adimensionale şi următoarele notaţii auxiliare :

$$v = \frac{w}{U_0^2} ; \quad \xi = \frac{x}{B} ; \quad \varepsilon = \frac{gB}{C^2 h} ; \quad \eta = \frac{y}{B} ; \quad \beta = \frac{b_0}{B};$$

$$c = \frac{l}{B} ; \quad c_1 = \pi^2 c, \tag{6}$$

relaţia (4) devine :

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\varepsilon(\xi) v + c(\xi) \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}. \tag{7}$$

Notînd

$$v = \varphi \exp\left\{-\int_0^{\xi} \varepsilon(\xi)\, \mathrm{d}\xi\right\}, \tag{8}$$

se obţine pentru funcţia φ ecuaţia de difuzie :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = c(\xi) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}. \tag{9}$$

În cazul unei epure uniforme în secţiunea de intrare, dacă variaţia coeficientului $c(\xi)$ este neglijabilă, soluţia ecuaţiei (7) se scrie :

$$v = \left(\beta + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-k^2 c_1 \xi}}{k} \cos k\pi\, \eta \sin k\pi\beta\right) \exp\left\{-\int_0^{\xi} \varepsilon(\xi)\, \mathrm{d}\xi\right\}. \tag{10}$$

Evaluarea numerică a funcţiei v, în cazuri concrete, evidenţiază convergenţa extrem de lentă a seriei trigonometrice.

În continuare s-a preferat integrarea numerică în diferenţe finite într-o schemă explicită, a ecuaţiei parabolice cu derivate parţiale (9), inclusiv pentru cazurile în care epura de intrare a funcţiei w nu este uniformă.

În diferenţe finite, ecuaţia (9) devine :

$$\frac{\varphi_{i,n+1} - \varphi_{i,n}}{\Delta\xi} = c \frac{\varphi_{i+1,n} - 2\varphi_{i,n} + \varphi_{i-1,n}}{(\Delta\eta)^2}$$

$$(i = 1,2,3,\ldots, I\,;\; n = 1,2,3,\ldots, N),$$

în nodul de centrare, $\xi_i = n\,\Delta\xi$, $\eta_n = i\,\Delta\eta$.

Notînd prin r parametrul rețelei:

$$r = c\frac{\Delta\xi}{(\Delta\eta)^2}, \tag{11}$$

se obține sistemul de relații explicite pentru funcția φ pe linia ξ_{n+1}, discretizată în nodurile rețelei rectangulare alese (fig. 2):

$$\varphi_{i,n+1} = (1 - 2r)\,\varphi_{i,n} + r(\varphi_{i-1,n} + \varphi_{i+1,n}), \tag{12}$$

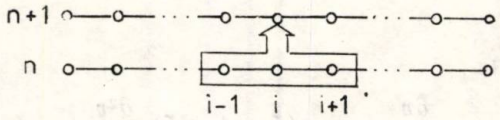


Fig. 2

Condițiile la limită (pe pereții laterali) se scriu:

$$\varphi_{-1,n+1} = \varphi_{1,n+1} \text{ și } \varphi_{I+1,n+1} = \varphi_{I-1,n+1}, \tag{13}$$

unde pentru comoditate s-au introdus nodurile fictive $i = -1$ și $i = I + 1$ pentru modelarea condiției Neumann omogene, $\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0$ pentru $\eta = 0$ și $\eta = 1$.

Cunoscînd funcția w, evaluată prin procedeul numeric de mai sus sau prin calculul direct al seriei (10), în cazul epurei uniforme în secțiunea de intrare, se va analiza în continuare determinarea cîmpului vitezei medii temporale $\overline{U}$ în planul curgerii, conform condiției:

$$\overline{U^2} = \overline{U}^2 + \sigma_u^2, \tag{14}$$

unde $\sigma_u = (\overline{U'^2})^{1/2}$ reprezintă intensitatea turbulenței.

Deși după unii autori [6] intensitatea turbulenței σ_u este admisă constantă în secțiunea transversală, măsurătorile experimentale evidențiază dependența acesteia de panta transversală $\frac{\partial\overline{U}}{\partial y}$ a epurei componentei longitudinale a vitezei:

$$\sigma_u = f\left(\frac{\partial\overline{U}}{\partial y}\right). \tag{15}$$

După Levi [4] se va admite, în prima aproximație, relația:

$$\sigma_u = \sigma_0 + m\frac{\partial\overline{U}}{\partial y}, \tag{16}$$

în care parametrii σ_0 și m, constanți în secțiunea transversală, pot varia de la o secțiune la alta. Relația (14) se scrie :

$$w - g\int_0^x \frac{\partial H}{\partial x}\,\mathrm{d}x = \overline{U}^2 + \left(\sigma_0 - m\frac{\partial \overline{U}}{\partial y}\right)^2. \tag{17}$$

Egalitatea (17) constituie o ecuație diferențială ordinară de ordinul întîi a cărei soluție $\overline{U}(y)$ reprezintă epura vitezei medii temporale în secțiunea transversală analizată.

Dacă se admite că nivelul suprafeței libere este constant ($H(x) = H = \text{const.}$) și se introduc mărimile adimensionale :

$$z = \frac{\overline{U}}{U_0}; \quad \alpha = \frac{B}{m}; \quad \delta = \frac{\sigma_0}{U_0}, \tag{18}$$

ecuația (17) devine, după explicitarea derivatei,

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\eta} = \alpha(\sqrt{v - z^2} - \delta). \tag{19}$$

Condițiile la limită impuse funcției z, datorită anulării pe pereții laterali a efortului de frecare vîscoasă, sînt :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\eta} = 0 \text{ pentru } \eta = 0 \text{ și } \eta = 1, \tag{20}$$

iar condiția de continuitate se scrie :

$$q = \frac{1}{\beta}\int_0^1 z\,\mathrm{d}\eta, \tag{21}$$

unde q reprezintă debitul unitar în secțiunea transversală.

Relațiile (20) și (21) alcătuiesc un sistem de condiții în exces pentru precizarea soluției ecuației diferențiale (19). Din acest motiv, prin alegerea convenabilă a parametrilor care caracterizează configurația epurei vitezei, se poate obține cel mult o aproximare optimă a acestor restricții. Pe de altă parte, condițiile (20) sînt echivalente cu impunerea valorii funcției z pe pereții laterali :

$$z(0) = \sqrt{v(0) - \delta^2} \text{ și } z(1) = -\sqrt{v(1) - \delta^2}, \tag{22}$$

unde semnul minus a fost atribuit din considerente fizice (prezența mișcării inverse în zona de apă moartă). Dincolo de punctul A (fig. 3), în care se produce tranziția pe peretele lateral ($\eta = 1$) la curgerea directă, expresia funcției z este :

$$z(1) = \sqrt{v(1) - \delta^2}. \tag{23}$$

Astfel, în punctul de tranziție A se impun două condiții :

$$z = 0 \text{ și } \frac{dz}{d\eta} = 0 \quad \text{pentru} \quad \eta = 1, \tag{24}$$

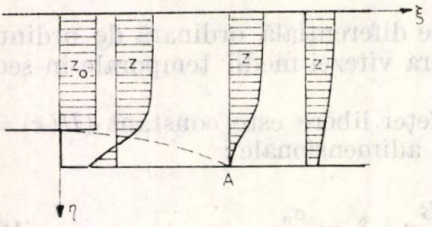


Fig. 3

iar parametrul δ în acest punct are valoarea :

$$\delta(\xi_A) = \sqrt{v_A(1)}. \tag{25}$$

În zona de apă moartă, unde valorile funcției v sînt mai scăzute, condiția de existență a soluției este :

$$\varepsilon(\xi) \leqslant \sqrt{v(1)}, \tag{26}$$

evidențiindu-se cu necesitate cerința ca parametrul δ să fie diferit de o constantă. Examinînd soluția analitică (10) a funcției v se poate infera următoarea expresie funcțională a parametrului δ :

$$\delta = \lambda \ \xi^n \, e^{-b\xi}, \tag{27}$$

în care parametrul λ se alege din condiția (25), obținînd :

$$\delta = \sqrt{v_A(1)} \left(\frac{\xi}{\xi_A}\right)^n e^{-b(\xi-\xi_A)} . \tag{28}$$

Întrucît dincolo de punctul A se poate presupune că intensitatea turbulenței rămîne neschimbată de la o secțiune la alta, se va admite că parametrul δ își atinge valoarea maximă în punctul de tranziție. Expresia funcțională finală a acestui parametru este :

$$\delta = \sqrt{v_A(1)} \left(\frac{\xi}{\xi_A}\right)^n e^{n\left(1-\frac{\xi}{\xi_A}\right)}, \tag{29}$$

n fiind un coeficient adimensional de calibrare ($n \simeq 15$).

Parametrul m din relația (16) se va alege, de la o secțiune la alta, astfel încît condiția la limită pe peretele lateral $\eta = 0$ să fie verificată cu o precizie optimizată. În acest scop s-a folosit un procedeu de optimizare necondiționată de tip Hooke și Jeeves, urmînd ca neîndeplinirea ecuației de continuitate să fie acceptată în acest stadiu al cercetării. Rezultatele numerice au indicat o abatere a debitului unitar de la valoarea sa medie cu circa 15 %, evidențiindu-se astfel necesitatea unei evaluări mai adecvate decît (16) a dependenței funcționale pentru intensitatea turbulenței.

Condiția la limită (20) pe peretele lateral $\eta = 1$ a fost îndeplinită prin inițializarea vitezei conform (22).

Pentru integrarea ecuației (19) s-a folosit procedeul Runge-Kutta de ordinul patru într-o schemă în diferențe finite de tip „backward".

S-a verificat soluția prin integrare directă, admițind că funcția v, obținută prin integrarea ecuației difuziei (9), are o variație în trepte, fiind constantă pe porțiuni. În aceste condiții, soluția ecuației (19) se scrie, pentru $v = v_k$, în sectorul de la $\eta = \eta_{k-1}$ la $\eta = \eta_k$:

$$\alpha\eta + K = \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{v_k}}\right) + a \ln \left| \frac{bz + \sqrt{v_k} - \sqrt{v_k - z^2}}{bz - \sqrt{v_k} + \sqrt{v_k - z^2}} \right|, \tag{30}$$

unde

$$a = \frac{\delta}{\sqrt{v_k - \delta^2}}, \quad b = \sqrt{\frac{\sqrt{v_k} - \delta}{\sqrt{v_k} + \delta}}, \tag{31}$$

iar constanta K se determină din condiția $\eta = \eta_{k-1}$ pentru $z = z_{k-1}$.

2. REZULTATE NUMERICE

S-a testat modelul pentru următoarele valori numerice ale parametrilor :

$$\beta = 0{,}8\,; \quad \varepsilon = 0{,}04\,; \quad c_1 = 0{,}1\,; \quad n = 15\,; \quad \xi_A = 1{,}5. \tag{32}$$

S-a elaborat un program numeric în limbaj FORTRAN IV cu următoarele blocuri :

— integrarea numerică în diferențe finite a ecuației difuziei (9);

— integrarea numerică (Runge-Kutta IV) a ecuației (19). Acest bloc a funcționat ca subrutină apelată de blocul de optimizare;

— blocul de optimizare necondiționată (Hooke și Jeeves) pentru tararea parametrului α.

Succesiunea epurelor vitezelor transversale este reprezentată în figura 4, iar unele rezultate numerice pentru funcția z sînt cuprinse în următorul tabel :

η \ ξ	0,4	0,8	1,2	1,5	2,0
0,00	0,983384	0,972016	0,881777	0,768481	0,756111
0,10	0,944310	0,934827	0,881324	0,768108	0,755444
0,20	0,866718	0,850654	0,879736	0,766811	0,753316
0,30	0,755485	0,772169	0,874313	0,762502	0,747115
0,40	0,614985	0,554964	0,855074	0,749134	0,730725
0,50	0,450674	0,357762	0,787716	0,710797	0,691994
0,60	0,269087	0,142354	0,596466	0,612738	0,613333
0,70	0,079197	—0,074496	0,267105	0,422471	0,488731
0,80	—0,100698	—0,267169	—0,083430	0,191799	0,352869
0,90	—0,232677	—0,401635	—0,300235	0,040384	0,265327
1,00	—0,287860	—0,454862	—0,355287	0,000000	0,240881

Curba de tarare a parametrului α este reprezentată în figura 5. Pentru îmbunătățirea modelului propus, se impune completarea relației funcționale (16) cu termeni suplimentari. De asemenea, este posibil

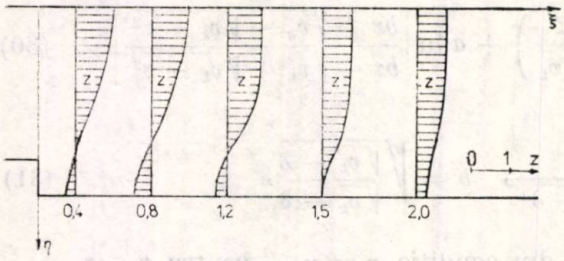


Fig. 4

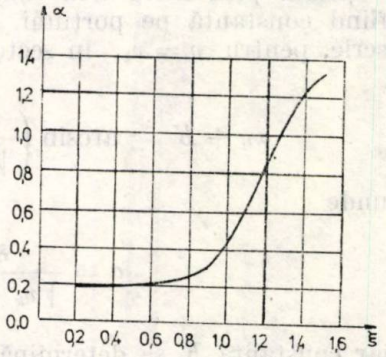


Fig. 5

să se introducă în analiză și influența contrapantei. În aceași timp, se impune o examinare de detaliu a evoluției dispersiei jetului înecat în zona de evazare în vederea fundamentării teoretice a expresiei funcționalei cvasiempirice a intensității turbulenței.

Primită la redacție la 7 decembrie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. I. SETEANU, V. COLIBAN, R. POPA, *Analiza influenței pulsațiilor curgerii turbulent asupra erodării albiilor*, St. cerc. mec. apl., **38**, 3 (1979).
2. A. M. RAHMANOV, G. V. STEFANOVICI, *Pulsaționie harakteristiki tranzitnoi strui rassipaiușciegosia v plane spokoinogo potoke pri razlicinth stepeniah ee turbulentnosti v nacealnogo stvore*, Izv. VNIIG, *100* (1972).
3. R. MENTA PRABULAL, *Flow characteristics in two-dimensional expansions*, Journ. of Hydr. Dib., *HY 5*, May (1979).
4. I. I. LEVI, *Razvitie planovoi zadaci ghidravliki*, Trudi K.S.G., **XV** (1964).
5. H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, Mc. Graw Hill Co., New York, 1960.
6. K. I. ROSSINSKI, *Mestnie razmîv recinogo dna v nijnth biefah krupnth ghidrotehniceskih soorujenii*, Izdatelstvo A.N. S.S.S.R., *6*, (1956).

ASUPRA EFECTULUI CÎMPULUI MAGNETIC INDUS ÎNTR-UN GENERATOR MHD

de ROZICA DUMITRU

Universitatea București

În lucrarea de față se studiază mișcarea fluidului electroconductor într-un generator MHD cu o pereche de electrozi de lungime finită, plasat în cîmp magnetic neomogen, luînd în considerare și influența cîmpului magnetic indus. Se determină condițiile la limită și condițiile de racordare pentru potențialul electric φ, funcția de curent ψ și cîmpul magnetic indus b_z, cu care se exprimă puterea generatorului.

În [1] și [2] profesorul L. Dragoș ia în studiu pentru prima dată influența cîmpului magnetic indus într-un generator MHD. În aceste lucrări se consideră un generator MHD cu o pereche de electrozi *semiinfiniți*, plasat în cîmp magnetic *neomogen*. De asemenea, în [3], Gh. Alexe consideră un generator MHD cu o pereche de electrozi *finiți* plasat în cîmp magnetic *omogen* și determină funcțiile φ și b_z prin metoda elementului finit. Aici, studiem cazul electrozilor *finiți* în cîmp magnetic *neomogen*.

Considerăm un canal de conversie de secțiune dreptunghiulară cu dimensiunile $2l\,L_0$, $\pi\,L_0$, cu o pereche de electrozi de lungime $2aL_0$, plasată pe pereții $y = 0$, $y = \pi L_0$, în prezența cîmpului magnetic de forma :

$$\vec{B} = B_0\,\varepsilon\,\vec{i}_3, \tag{1}$$

unde

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & x \in (-a, a), \\ 0, & x \in \mathbb{C}(-a, a), \end{cases} \tag{2}$$

axele fiind luate astfel încît Ox să fie paralelă cu axa generatorului, Oy perpendiculară pe electrozi, iar Oz paralelă cu aceștia.

Fluidul este presupus simplu, nevîscos, incompresbil, ohmic, de viteză $\vec{V}_0$. Deoarece condițiile problemei nu se schimbă în timp, mișcarea va fi staționară. Avînd în vedere presupunerile făcute, ecuațiile de mișcare ale fluidului în variabile adimensionale vor fi [4];

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\ \vec{V} = 0, \\ &(\vec{V}\cdot\nabla)\,\vec{V} = -\ \operatorname{grad}\ p + Rh\,\vec{J}\times\vec{B}, \qquad (3) \\ &\operatorname{rot}\,\vec{E} = 0,\ \operatorname{div}\,\vec{B} = 0,\ \operatorname{rot}\,\vec{B} = \vec{J}\ (\operatorname{div}\,\vec{J} = 0); \\ &\vec{J} = Rm(\vec{E} + \vec{V}\times\vec{B}), \qquad (4) \end{aligned}$$

iar condiţiile de racordare pe suprafeţele de discontinuitate $x = \pm a$:

$$[\![\vec{E}]\!] \cdot \vec{s} = 0, \quad [\![\vec{B}]\!] \cdot \vec{n} = 0, \quad [\![\vec{B}]\!] \cdot \vec{s} = 0, \quad [\![\vec{J}]\!] \cdot \vec{n} = 0,$$

$$[\![\vec{V}]\!] \cdot \vec{n} = 0, \quad [\![\vec{V}]\!] \cdot \vec{s} = 0, \quad p = -\frac{1}{2} Rh[\![\varepsilon]\!] - Rh[\![\varepsilon b_z]\!]. \tag{5}$$

Mişcarea uniformă a fluidului injectat e modificată de prezenţa cîmpului magnetic şi de natura diferită a pereţilor canalului. De aceea scriem :

$$\vec{V} = \vec{i}_1 + \vec{v}; \; \vec{B} = \varepsilon \vec{i}_3 + \vec{b}; \; \vec{E} = \vec{e}_0 + \vec{e}; \; \vec{J} = \vec{j}_0 + \vec{j}. \tag{6}$$

Neglijînd produsele de perturbaţie şi considerînd mişcarea plană, obţinem

$$\vec{j}_0 = -\varepsilon' \vec{i}_2; \; \vec{e}_0 = \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon'}{Rm}\right) \vec{i}_2, ; \vec{e}_2 = 0. \tag{7}$$

Introducînd funcţia de potenţial, funcţia de curent şi funcţia de forţă prin

$$e_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad e_y = -\varepsilon + \frac{\varepsilon'}{Rm} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \; \varphi = \varphi(x, y),$$

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \; \psi = \psi(x, y), \tag{8}$$

$$b_x = \frac{\partial \chi}{\partial y}; \quad b_y = -\frac{\partial \chi}{\partial x}; \; \chi = \chi(x, y),$$

obţinem ecuaţiile :

$$\Delta\varphi + \varepsilon\Delta\psi + \varepsilon' \frac{\partial \psi}{\partial x} - Rm\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\psi) = 0,$$

$$\Delta b_z - Rm\left(\varepsilon' - \varepsilon''/Rm + \varepsilon' \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial x}\right) = 0, \tag{9}$$

$$\Delta\chi - Rm \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0.$$

Urmînd calea din [4], formulînd problema pe porțiuni și impunînd condițiile de racordare (5), obținem următoarele probleme la limită :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\psi) = 0,$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \lim_{x\to-\infty} \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \lim_{|x|\to\infty} \psi = 0, \tag{I}$$

$$\psi(x, 0) = \psi(x, \pi) = 0,$$

cu condițiile de racordare :

$$[\![\psi]\!] = \left[\!\!\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right]\!\!\right] = 0; \tag{10}$$

$$\Delta\varphi - Rm\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \text{ pentru } x \neq \pm a,$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0; \lim_{|x|\to\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \tag{II}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, \pi) = 0 \text{ pentru } |x| > a,$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_W,\ \varphi(x, \pi) = -\varphi_W \text{ pentru } |x| < a,$$

cu condițiile de racordare :

$$[\![\varphi]\!] = \left[\!\!\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right]\!\!\right] = 0 \text{ în } x = \pm a \tag{11}$$

și

$$\Delta b_z - Rm\frac{\partial b_z}{\partial x} = 0 \text{ pentru } x \neq \pm a,$$

$$\lim_{|x|\to\infty} b_z = 0, \lim_{|x|\to\infty} \frac{\partial b_z}{\partial y} = 0, \tag{III}$$

$$b_z(x, 0) = b_z(x, \pi) = 0 \text{ pentru } |x| > a,$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial b_z}{\partial y}(x, \pi) = 0 \text{ pentru } |x| < a$$

cu condiţiile de racordare :

$$[\![b_z]\!] = -[\![\varepsilon]\!], \left[\!\!\left[\frac{\partial b_z}{\partial y}\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\frac{\partial^2 b_z}{\partial y^2}\right]\!\!\right] = 0, \text{ în } x = \pm a. \tag{12}$$

Nu am scris şi problema la limită pentru funcţia de forţă deoarece, aşa cum vom vedea în continuare, ea nu intervine în calculul puterii generatorului. Aceasta este dată de formula :

$$W_r = \frac{L_0^2 B_0^2 V_0}{\mu} W, \tag{13}$$

unde

$$W = -\int_{-l}^{l}\int_{0}^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{E} \cdot \vec{J} \, dx \, dy \, dz.$$

Aplicînd aici formula lui Green şi ţinînd cont de legea lui Ohm :

$$\varphi(x, \pi) - \varphi(x, 0) = -2\varphi_W = IR = -I_0 R, \tag{14}$$

unde

$$I = \int_{-l}^{l}\int_{-a}^{a} j_y(x, \pi) \, dx \, dz, \; I_0 = -\int_{-l}^{l}\int_{-a}^{a} j_y(x, 0) \, dx \, dz,$$

$$j_y = -Rm\left(\varepsilon + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + b_z + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial y}\right),$$

R — rezistenţa din circuitul exterior, obţinem

$$W = \frac{4\varphi_W^2}{R}. \tag{15}$$

Deoarece la infinit vîrtejul este nul, aplicînd principiul de maxim pentru funcţii armonice, din problema la limită I obţinem

$$\psi \equiv 0. \tag{16}$$

Folosind metoda Fourier de separare a variabilelor, din problema la limită II obţinem :

$$\varphi = \begin{cases} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\beta(n)x} \cos ny, & \text{în } D_{-\infty}^{-a}, \\ -\frac{2}{\pi}\varphi_W y + \varphi_W + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{\beta(n)x} + D_n e^{\gamma(n)x}) \sin ny, & \text{în } D_{-a}^{a}, \\ B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{\gamma(n)x} \cos ny, & \text{în } D_{a}^{\infty}, \end{cases} \tag{17}$$

unde

$$\beta(n) = \frac{Rm + \sqrt{Rm^2 + 4n^2}}{2}, \quad \gamma(n) = \frac{Rm - \sqrt{Rm^2 + 4n^2}}{2}. \tag{18}$$

Analog, din III vom avea :

$$b_z = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \, e^{\beta(n)x} \sin ny, & \text{în } D_{-\infty}^{-a}, \\ G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (G_n \, e^{\beta(n)x} + H_n \, e^{\gamma(n)x}) \cos ny, & \text{în } D_{-a}^{a}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} F_n \, e^{\gamma(n)x} \sin ny, & \text{în } D_{a}^{\infty}. \end{cases} \tag{19}$$

Impunînd lui φ și b_z condițiile de racordare (11), respectiv (12), obținem următorul sistem de ecuații pentru determinarea constantelor ce intervin în (17) și (19) :

$$\begin{aligned}
&-\sum_{n=1}^{\infty} nA_n \, e^{-\beta(n)a} \sin ny = -\frac{2}{\pi} \varphi_W + \sum_{n=1}^{\infty} n(C_n \, e^{-\beta(n)a} + D_n \, e^{-\gamma(n)a}) \cos ny, \\
&\sum_{n=1}^{\infty} (C_n \, e^{-\beta(n)a} \beta(n) + D_n \gamma(n) \, e^{-\gamma(n)a}) \sin ny = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \beta(n) \, e^{-\beta(n)a} \cos ny, \\
&-\sum_{n=1}^{\infty} nB_n \, e^{\gamma(n)a} \sin ny = -\frac{2}{\pi} \varphi_W + \sum_{n=1}^{\infty} n(C_n \, e^{\beta(n)a} + D_n \, e^{\gamma(n)a}) \cos ny, \\
&+\sum_{n=1}^{\infty} (C_n \, \beta(n) \, e^{\beta(n)a} + D_n \, \gamma(n) \, e^{\gamma(n)a}) \sin ny = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, \gamma(n) \, e^{\gamma(n)a} \cos ny, \\
&\sum_{n=1}^{\infty} E_n \, e^{-\beta(n)a} \sin ny = 1 + G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (G_n \, e^{-\beta(n)a} + H_n \, e^{-\gamma(n)a}) \cos ny, \\
&-\sum_{n=1}^{\infty} n(G_n \, e^{-\beta(n)a} + H_n \, e^{-\gamma(n)a}) \sin ny = \sum_{n=1}^{\infty} nE_n \, e^{-\beta(n)a} \cos ny, \\
&\sum_{n=1}^{\infty} F_n \, e^{\gamma(n)a} \sin ny = 1 + G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (G_n \, e^{\beta(n)a} + H_n \, e^{\gamma(n)a}) \cos ny, \\
&-\sum_{n=1}^{\infty} n(G_n \, e^{\beta(n)a} + H_n \, e^{\gamma(n)a}) \sin ny = \sum_{n=1}^{\infty} nF_n \, e^{\gamma(n)a} \cos ny.
\end{aligned} \tag{20}$$

Pentru ca acest sistem să fie complet, se adaugă ecuația care se obține din legea lui Ohm prin înlocuirea necunoscutelor care apar :

$$\left(\frac{2}{R}+\frac{8al\,Rm}{\pi}\right)\varphi_W = 4alRm(1+G_0)+2l\,Rm\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nC_n+G_n}{\beta(n)}(e^{\beta(n)a}-e^{-\beta(n)a})+$$

$$+\frac{nD_n+H_n}{\gamma(n)}(e^{\gamma(n)a}-e^{-\gamma(n)a}). \tag{21}$$

Sistemul (20) este echivalent cu cel obținut din acesta prin înmulțirea ecuațiilor $(20)_1$, $(20)_3$, (20_5), $(20)_7$ cu sin my, $(m = 1,2,\ldots\ldots)$ și ecuațiile $(20)_2$, $(20)_4$, $(20)_6$, $(20)_8$ cu cos my, $(m = 0, 1, 2, \ldots\ldots)$ și integrarea lor în funcție de y pe intervalul $[0,\pi]$ ca în [5].
Pentru determinări numerice am sumat în seriile trigonometrice primii patru termeni obținînd un sistem de 33 de ecuații cu 33 de necunoscute. Luînd :

$$L_0 = 1\text{m},\quad V_0 = 1000\ \text{m/s},\quad B_0 = 5\ \text{tesla},\quad a = 0,6,$$

$$\mu = 4\pi\cdot 10^{-7},\ \sigma = 5\ \text{mho},\quad l = 0,25,\quad R = 0,8\ \text{ohm},$$

am obținut :

$$\varphi_w = 0,001509\ ;\quad W = 0,0000112.$$

Comparînd aceste rezultate cu cele obținute de L. Brînzănescu și L. Dragoș în [5], unde datele problemei sînt aceleași cu deosebire că se neglijează cîmpul magnetic indus, se pune în evidență influența acestuia. Se constată că potențialul electric φ_W scade cu două ordine de mărime.

Primită la redacție la 27 octombrie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. L. DRAGOȘ, *Sur l'influence des extremités des electrodes sur l'écoulement magnetohydrodynamique dans les cannaux. II*, C.R. Acad. Sci. Paris, **263 A**, 352 (1966).
2. L. DRAGOȘ, *Etude des effets d'extrémité et du champ magnétique induit, dans un generateur MHD*, Int. J. Engng. Sci., **5**, 919—938 (1967).
3. GH. ALEXE, *The influence of the induced magnetic field in a MHD generator placed in homogeneous magnetic field.*
4. L. DRAGOȘ, *Magnetofluid dynamics*, București, Ed. Academiei, Tunbridge Wells, Kent, Abacus Press, 1975.
5. L. BRINZĂNESCU and L. DRAGOȘ, *On the flow of on ionized gas in a MHD generator with segmented electrodes*, Acta Mechanica, **38**, 131 — 141 (1981).

UNDE DE ŞOC ÎN TUBURI

de I. BERBENTEA

Utilizînd teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale şi a ecuaţiilor diferenţiale neliniare, se determină tensiunile şi deformaţiile în cazul propagării undelor elasto-plastice în tuburi solicitate de forţe care variază brusc, în urma declanşării unei explozii în interiorul tubului.
Se tratează atît problema undelor elasto-plastice de încărcare, cît şi problema undelor de descărcare.
Se aplică rezultatele obţinute la calculul lucrului mecanic necesar lărgirii tubului prin explozie.

1. INTRODUCERE

În tehnica modernă sînt utilizate, din ce în ce mai mult, procedeele neconvenţionale de prelucrare a materialelor.

Dintre acestea foarte des sînt folosite procedeele de prelucrare prin explozie, obţinîndu-se pe această cale, sudura plăcilor, lărgirea tuburilor etc.

Analiza matematică a stării de deformaţie a unui tub lărgit prin explozie constituie obiectul prezentei lucrări.

În tratarea acestei probleme trebuie ţinut cont că solicitarea materialului este produsă de forţe exterioare aplicate brusc. Este cazul unui şoc aplicat pe o anumită frontieră a corpului. Experienţa arată că orice încărcare a unui material prin şoc mai intens sau mai puţin intens este însoţită de deformaţii plastice. De aceea, de un interes considerabil este problema propagării perturbaţiilor într-un mediu elasto-plastic.

Cele menţionate mai sus ne arată că problema lărgirii tuburilor prin explozie se înscrie în categoria problemelor de plasticitate dinamică. Timpul scurt în care decurge fenomenul (sutimi sau chiar miimi de secundă) are importanţă practică, deoarece de aici rezultă rapiditatea procedeului.

Ipotezele ce vor sta la baza studiului undelor elasto-plastice în tuburi prelucrate prin explozie sînt următoarele :

a) Curbele caracteristice ale materialului la întindere şi compresiune statică sînt identice. Acest fapt este admis pentru materiale plastice ca : oţeluri cu procent redus de carbon, oţeluri carbon de calitate, oţeluri aliate (din care se confecţionează şi tubul studiat) şi metalele neferoase. Această ipoteză nu este valabilă pentru fontă şi oţeluri de scule.

b) Materialul este cu ecruisare exponenţială.

c) Presiunea interioară rezultată în urma exploziei este uniformă în lungul axei tubului ; această ipoteză este îndeplinită prin măsurile luate la executarea exploziei.

d) Efectul temperaturii este neglijabil, fapt confirmat de experienţă.

e) Volumul este incompresibil în stare plastică.

f) Pereţii tubului sînt consideraţi relativ subţiri.

g) Materialul este omogen şi izotrop.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 3, 1983, P. 265–278

2. FORMULAREA PROBLEMEI

Datele problemei : Fie un tub cu raza cilindrului interior R_1 și raza cilindrului exterior R_2.

Lungimea l a tubului este mare în comparație cu R_1 și R_2.

Materialul este un oțel aliat cu titan, nichel și crom, cu pronunțate proprietăți plastice. Durata fenomenului este t_1, de ordinul sutimilor sau chiar miimilor de secundă.

La momentul $t = 0$, pe frontiera interioară a tubului se aplică un șoc de compresiune. Intensitatea șocului este dată de valoarea unei presiuni $p_i(t)$ (rezultată în urma unei explozii în interiorul tubului), uniforme în lungul axei tubului și pe circumferință, dar variabilă cu timpul t, conform relației :

$$p_i(t) = p_1^* \cdot h(t),$$

unde
$$h(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ 1, & 0 \leqslant t \leqslant t_1 \end{cases}$$

este funcția lui Heaviside.

Valoarea maximă p_i^* a presiunii este menținută constantă pe un interval de timp $0 \leqslant t < t_1$.

Se cer : mărimile fundamentale ce caracterizează fenomenul de deformație plastică la încărcare și descărcare și anume : tensorul tensiunilor σ_{ij}, tensorul deformațiilor ε_{ij} și vectorul deplasare $U_i (i, j = 1,2,3)$.

De asemenea, se cere expresia lucrului mecanic de deformație și deformațiile remanente (reziduale).

În cele ce urmează se va da rezolvarea problemei.

3. MĂRIMILE ȘI ECUAȚIILE DE BAZĂ ÎN CAZUL ÎNCĂRCĂRII TUBULUI

De la punctele (1) și (2) rezultă că avem de rezolvat o problemă plană de plasticitate dinamică în cazul stării de deformație plană. Adoptînd un sistem de coordonate cilindrice (r, θ, z), atunci mărimile necunoscute sînt următoarele :

tensiunile radiale și circumferențiale : σ_r, σ_θ ;

deplasarea radială : U_r ;

deformațiile radiale și circumferențiale : ε_r, ε_θ.

Toate mărimile de mai sus sînt funcțiuni de raza r și de timpul t. Ele nu depind însă de coordonata z din lungul tubului și nici de unghiul θ.

Ecuațiile de bază, sînt formate din următoarele grupuri :

3.1. *Ecuația de mișcare :*

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \tag{1}$$

ρ este densitatea materialului.

3.2. *Ecuaţiile geometrice:*

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}\ ;\ \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}\ ;\ \varepsilon_z = 0. \tag{2}$$

3.3. *Ecuaţiile fizice*, adică relaţiile între tensiuni şi deformaţii sînt reprezentate de ecuaţiile lui Hencky în ipoteza incompresibilităţii volumului:

$$\varepsilon_r = \frac{E}{S}(\sigma_r - \sigma);\ \varepsilon_\theta = \frac{E}{S}(\sigma_\theta - \sigma);\ \varepsilon_z = \frac{E}{S}(\sigma_z - \sigma) = 0;$$

unde

$$\sigma = \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta). \tag{3}$$

3.4. *Condiţia de plasticitate*, care în cazul unui material cu ecruisare exponenţială are forma

$$S = K E^n,\quad 0 < n < 1, \tag{4}$$

unde K, n sînt două constante ce se pot determina uşor cu ajutorul curbei caracteristice a materialului, determinată experimental pe o epruvetă din acelaşi material cu al tubului şi solicitată la tracţiune statică.

3.5. *Ecuaţia incompresibilităţii volumului*: $\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0$
Pentru relaţiile date la punctele 3.3 şi 3.4, avem

$$S = \sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2] + \tau_{r\theta}^2 + \tau_{rz}^2 + \tau_{\theta z}^2}, \tag{5}$$

$$E = \sqrt{\frac{1}{6}[(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_z)^2 + \varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2] + \gamma_{r\theta}^2 + \gamma_{rz}^2 + \gamma_{\theta z}^2}, \tag{6}$$

unde S şi E sînt cunoscute sub numele de intensitatea tensiunilor tangenţiale şi intensitatea deformaţiilor de lunecare.

Aceste mărimi sînt strîns legate de invarianţii pătratici ai deviatorilor tensorilor tensiunilor şi deformaţiilor.

În expresiile lui S şi E trebuie făcut:

$$\tau_{r\theta} = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0;\quad \gamma_{r\theta} = \gamma_{rz} = \gamma_{\theta z} = 0 \text{ şi } \varepsilon_z = 0. \tag{7}$$

La grupările de ecuaţii de mai sus, vom adăuga condiţiile iniţiale şi la limită, care sînt de forma:

pentru $t = 0$, $u_r(r, t) = 0$, $r \in [R_1, R_2]$,

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = 0,\quad r \in [R_1, R_2], \tag{8}$$

pentru $r = R_1$, $\sigma_r = -p_i^*$, $0 \leqslant t < t_1$.

Observație. Încărcarea este total ridicată la momentul $t = t_1$, avînd : $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$ pentru $t \geqslant t_1$.

Înainte de a trece la rezolvarea sistemului format din grupările 3.1 — 3.5 în vederea determinării celor cinci funcții necunoscute, vom determina caracteristicile sale, și în consecință vom putea stabili din ce tip de ecuații face parte.

4. CARACTERISTICILE ȘI TIPUL SISTEMULUI DE ECUAȚII 3.1—3.5. VITEZA DE PROPAGARE A UNDELOR ELASTOPLASTICE

Vom utiliza următorul rezultat din teoria ecuațiilor : dacă avem două funcțiuni $u(x, y)$ și $v(x, y)$ care sînt soluții ale unui sistem de două ecuații cvasiliniare cu derivate parțiale de ordinul întîi de forma

$$\begin{aligned} A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 \frac{\partial u}{\partial y} + C_1 \frac{\partial v}{\partial x} + D_1 \frac{\partial v}{\partial y} = E_1, \\ A_2 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 \frac{\partial u}{\partial y} + C_2 \frac{\partial v}{\partial x} + D_2 \frac{\partial v}{\partial y} = E_2, \end{aligned} \tag{9}$$

unde coeficienții $A_1, B_1, \ldots, E_2$ sînt funcțiuni de x, y, u, v și dacă la ecuațiile (9) adăugăm expresiile diferențiale,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{10}$$

atunci (9) și (10) formează un sistem neomogen de ecuații algebrice liniare prin raport la derivatele parțiale de ordinul întîi, a căror valoarea se poate determina cu ajutorul formulelor lui Cramer obținîndu-se :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\Delta_4}{\Delta}, \tag{11}$$

unde Δ este determinantul sistemului, iar $\Delta_1 \ldots \Delta_4$ sînt numărătorii formulelor lui Cramer.

Dacă L este o linie caracteristică, pe această linie derivatele parțiale sînt nedeterminate, adică

$$\Delta = 0 \text{ și } \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0. \tag{12}$$

Din $\Delta = 0$ se obțin totdeauna caracteristicile sistemului, iar din $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$ se obțin relațiile între funcțiunile u și v valabile

numai pe caracteristice ; aceste relații pot sta la baza studiului fenomenului legat de sistemul (9), prin metode numerice.

Notăm că pentru ecuațiile (9) liniare (cînd coeficienții $A_1, B_1, \ldots, E_2$ sînt funcțiuni numai de variabilele independente x, y) rețeaua de linii caracteristice nu depinde de soluția u, v a problemei. Pentru ecuațiile (9) neliniare, liniile caracteristice depind de soluția u, v a problemei.

Pentru a folosi acest rezultat în cadrul problemei tubului vom alege ca funcțiuni necunoscute u, v, deformația radială $\varepsilon_r(r, t)$ și viteza de deplasare radială $v_r(r, t) = \dfrac{\partial u_r}{\partial t}$.

Ecuațiile de tipul (9) pentru funcțiunile ε_r și v_r se obține din : ecuația de mișcare (1), prima ecuație din (2) derivată în raport cu timpul și condiția de plasticitate (4), care după particularizarea mărimilor S și E, devine :

$$\sigma_r - \sigma_\theta = 2K\,\varepsilon_r^n = f(\varepsilon_r). \tag{13}$$

În plus, vom aproxima derivata $\dfrac{\partial \sigma_\theta}{\partial r}$ prin $\dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}$, mărimile fiind de același ordin.

În final se obține pentru tub sistemul :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial t} - \frac{\partial v_r}{\partial r} = 0, \\ &a^2(\varepsilon_r)\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\Phi(r, \varepsilon_r), \end{aligned} \tag{14}$$

unde

$$a^2(\varepsilon_r) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\sigma_r - \sigma_\theta)}{\partial \varepsilon_r} = \frac{1}{\rho} 2K n.\ \varepsilon_r^{n-1}, \tag{15}$$

este viteza de propagare a undelor elasto-plastice.

$$\Phi(r, \varepsilon_r) = -\frac{2}{r}\tilde{f}(\varepsilon_r). \tag{16}$$

La (14) adăugăm expresiile diferențiale :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varepsilon_r &= \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial t}\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}v_r &= \frac{\partial v_r}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial v_r}{\partial t}\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{17}$$

Din (14) și (17) obținem liniile caracteristice:

$$dr \pm a\, dt = 0 \text{ pentru } \Delta = 0. \tag{18}$$

Relațiile verificate pe caracteristice se obțin din $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$ și au forma:

$$\begin{aligned} a \cdot d\,\varepsilon_r + dv_r - \frac{1}{\rho}\Phi \cdot dt = 0, \\ a \cdot d\,\varepsilon_r - dv_r - \frac{1}{\rho}\Phi \cdot dt = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Relațiile (18) și (19) referitoare la două familii diferite de caracteristici reale permit studiul *undei directe* (care se propagă de la interiorul tubului către exterior) și a *undei inverse*.

Caracteristicile date de (18) fiind reale, sistemul (14) este de tip hiperbolic.

Se observă din (18) că determinarea caracteristicilor depinde de soluția problemei $\varepsilon_r(r, t)$ din cauza vitezei de propagare $a(\varepsilon_r)$ care depinde de deformația radială (ε_r). Acest rezultat este normal deoarece sistemul (14) este neliniar în funcțiile necunoscute ε_r și v_r, din cauza vitezei de propagare a undelor, $a(\varepsilon_r)$.

5. DETERMINAREA FUNCȚIUNILOR u_r, ε_r ε_θ σ_r σ_θ ÎN CAZUL ÎNCĂRCĂRII TUBULUI

5.1. *Determinarea funcției* u_r

Ținînd cont de ecuațiile geometrice (2), condiția de incompresibilitate, $\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0$, devine:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} = 0.$$

Această ecuație se mai poate scrie sub forma:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot u_r) = 0.$$

Rezultă că $r \cdot u_r$ este o funcție numai de timpul t și putem scrie:

$$u_r(r, t) = \frac{F(t)}{r}. \tag{20}$$

Pentru determinarea funcției arbitrare $F(t)$ vom folosi ecuația de mișcare 3.1 care cu aproximarea făcută asupra funcției $\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial r}$ devine:

$$\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}. \tag{21}$$

Ţinînd cont de (20), de condiţia de plasticitate (13) şi de prima din ecuaţiile geometrice (2), obţinem ecuaţia ce determină funcţia $F(t)$ sub forma :

$$F''(t) = \lambda \cdot [F(t)]^n, \tag{22}$$

unde

$$\lambda = \frac{2A(1-n)}{r^{2n} \cdot \rho}, \quad A = 2K(-1)^n.$$

Observaţie. Mărimea (λ) este o constantă deoarece valoarea lui r^{2n} trebuie luată într-un anumit punct al intervalului R_1, R_2, ales convenabil, de exemplu din condiţia ca lucrul mecanic necesar pentru deformarea tubului să fie minim.

Integrarea exactă a ecuaţiei diferenţiale neliniare (22) se face schimbînd rolul variabilelor F şi t. Pentru aceasta introducem operatorul

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}F} \cdot \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$$

şi notăm

$$F' = p. \tag{23}$$

Atunci ecuaţia (22) devine o ecuaţie cu variabile separabile de forma :

$$p \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}F} = \lambda \cdot F^n.$$

Separînd variabilele şi integrînd, obţinem

$$\frac{p^2}{2} = \lambda \cdot \frac{F^{n+1}}{n+1} + C_1^*, \tag{24}$$

unde C_1^* este o constantă de integrare ce se determină din condiţiile iniţiale.

Din (23) şi (24) rezultă imediat soluţia soluţia generală a ecuaţiei (22) sub forma :

$$t = \pm \int \frac{\mathrm{d}F}{\sqrt{2\left(\frac{\lambda}{n+1} F^{n+1} + C_1^*\right)}} + C_2^*, \tag{25}$$

unde C_2^* este a doua constantă de integrare ce se determină din condiţiile iniţiale.

Utilizînd condiţiile iniţiale din (8) şi relaţiile (24) şi (25), rezultă $C_1^* = 0$ şi $C_2^* = 0$.

În aceste condiții, funcția $F(t)$ devine :

$$F(t) = \sqrt[\frac{1-n}{2}]{\frac{2\lambda}{n+1} \cdot \frac{1-n}{2} \cdot t}, \tag{26}$$

iar deplasarea $u_r(r, t)$, dată de (20), este complet determinată și cu aceasta vectorul deplasare este cunoscut.

Putem trece acum la determinare tensiunilor și deformațiilor.

5.2. *Determinarea deformațiilor* ε_r *și* ε_θ

Avem $\varepsilon_r = \dfrac{\partial u_r}{\partial r}$.

Ținînd cont că $u_r(r, t)$ este dat de (20), obținem

$$\varepsilon_r = -\frac{F(t)}{r^2} \; ; \; \varepsilon_\theta = -\varepsilon_r = \frac{F(t)}{r^2}, \tag{27}$$

unde $F(t)$ este dată de (26).

5.3. *Determinarea tensiunilor* σ_r, σ_θ

Se utilizează ecuațiile următoare :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} = K \varepsilon_r^n. \tag{28}$$

Din (20) rezultă $\dfrac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \dfrac{F''(t)}{r}$; $F''(t)$ este dată de (22).

Sistemul (28) devine :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left[\frac{A}{r^{2n}}(F(t))^n\right] = \rho \frac{\lambda}{r}[F(t)]^n,$$

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} = K \frac{(-1)^n [F(t)]^n}{r^{2n}}. \tag{29}$$

Integrînd prima ecuație din (29) în raport cu r, obținem :

$$\sigma_r(r, t) = [F(t)]^n \cdot \left(\rho \cdot \lambda \cdot \ln r + \frac{A}{2n} \frac{1}{r^{2n}}\right) + \psi(t), \tag{30}$$

unde $\Psi(t)$ este o funcție arbitrară ce se determină din condiția la limită (8).

Avem la $r = R_1$, $\sigma_r = -p_i^*$ pentru $0 \leqslant t < t_1$.

Rezultă imediat din (30) :

$$\Psi(t) = -p_i^* - [F(t)]^n \cdot \left(\rho \cdot \lambda \cdot \ln R_1 + \frac{A}{2n} \frac{1}{R_1^{2n}}\right). \tag{31}$$

A doua ecuație din (29) permite determinarea tensiunii σ_θ :

$$\sigma_\theta(r, t) = [F(t)]^n \cdot \left[\rho \cdot \lambda \cdot \ln r + \frac{2K(-1)^n}{r^{2n}} \left(\frac{1-2n}{2n} \right) \right] + \Psi(t), \quad (32)$$

unde $\Psi(t)$ este dată de (31). Cu aceasta problema încărcării tubului este încheiată.

Observație. Menționăm că prima și a doua relație din (3) se reduc la : $\varepsilon_r = \varepsilon_r$ și $\varepsilon_\theta = -\varepsilon_r$ astfel că singura legătură între tensiuni și deformații rămîne condiția de plasticitate.

6. PROBLEMA DESCĂRCĂRII TUBULUI

La $t = t_1$, un șoc de descărcare începe să se propage de la frontiera interioară $r = R_1$ către frontiera exterioară $r = R_2$ a tubului.

Se naște, în secțiunea transversală a tubului, o nouă undă numită undă de descărcare care ca și unda de încărcare produce, în punctele tubului și în timp, tensiuni, deformații și deplasări a căror valoare rezultă prin determinarea funcțiilor necunoscute $\tilde{u}_r$, $\tilde{\varepsilon}_r$, $\tilde{\varepsilon}_\theta$, $\tilde{\sigma}_r$, $\tilde{\sigma}_\theta$.

Ca și în cazul încărcării, aceste funcțiuni depind de r și t și sînt soluții ale unui sistem format din următoarele ecuații :

6.1. *Ecuațiile de mișcare* : $\dfrac{\partial \tilde{\sigma}_r}{\partial r} + \dfrac{\tilde{\sigma}_r - \tilde{\sigma}_\theta}{r} = \rho \cdot \dfrac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial t^2}$

6.2. *Ecuațiile geometrice* :

$$\tilde{\varepsilon}_r = \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} \; ; \quad \tilde{\varepsilon}_\theta = \frac{\tilde{u}_r}{r}, \quad \tilde{\varepsilon}_z = 0.$$

6.3. *Ecuațiile fizice ale descărcării*, care în cazul tubului iau următoarea formă în ipoteza incompresibilității materialului admisă și la descărcare :

$$\tilde{\varepsilon}_r - \varepsilon_r^* = \frac{1}{2G} [(\tilde{\sigma}_r - \tilde{\sigma}) - (\sigma_r^* - \sigma^*)],$$

$$\tilde{\varepsilon}_\theta - \varepsilon_\theta^* = \frac{1}{2G} [(\tilde{\sigma}_\theta - \tilde{\sigma}) - (\sigma_\theta^* - \sigma^*)],$$

$$\tilde{\sigma}_z = \tilde{\sigma},$$

unde :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\tilde{\sigma}_r + \tilde{\sigma}_\theta}{2}, \quad \sigma^* = \frac{\sigma_r^* + \sigma_\theta^*}{2}.$$

Semnul * se referă la valori ale tensiunilor și deformațiilor în momentul $t = t_1$ cînd începe descărcarea. Aceste valori sînt date de funcțiile

corespunzătoare de la încărcare pentru $t = t_1$. Rezultă că mărimile afectate de semnul * sînt funcțiuni de r; G este modulul de elasticitate transversal.

6.4. *Ecuația incompresibilității*: $\varepsilon_r + \tilde{\varepsilon}_\theta = 0$

La aceste ecuații trebuie adăugate condițiile de racordare a soluțiilor încărcării și descărcării și anume:

$$\text{la } t = t_1 \text{ avem: } \tilde{u}_r = u_r,$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial t} = \frac{\partial u_r}{\partial t}. \tag{33}$$

7. CARACTERISTICILE ȘI TIPUL SISTEMULUI DE ECUAȚII 6.1–6.4. VITEZA DE PROPAGARE A UNDELOR DE DESCĂRCARE

Vom remarca întîi că ecuațiile fizice 6.3 se reduc la:

$$\tilde{\varepsilon}_r(r\ t) = \frac{1}{4G}(\tilde{\sigma}_r - \tilde{\sigma}_\theta) + \varphi\,(r,\ t = t_1)$$

$$\tilde{\sigma}_z(r,\ t) = \tilde{\sigma}(r,\ t) = \frac{\tilde{\sigma}_r(r,\ t) + \tilde{\sigma}_\theta(r,\ t)}{2}, \tag{34}$$

unde

$$\varphi(r,\ t = t_1) = \varepsilon_r^*(r,\ t = t_1) - \frac{1}{2G} f_1(r,\ t{=}t_1),$$

$$f_1(r,\ t = t_1) = \frac{\sigma_r^* - \sigma_\theta^*}{2}.$$

Procedînd ca la încărcare obținem următorul sistem pentru determinarea caracteristicilor:

$$a_0^2 \cdot \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_r}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\,\tilde{\Psi}(r,\ \tilde{\varepsilon}_r),\ \mathrm{d}\tilde{\varepsilon}_r = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_r}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_r}{\partial t}\,\mathrm{d}t,$$

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}_r}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} = 0,\quad \mathrm{d}\tilde{v}_r = \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t}\,\mathrm{d}t, \tag{35}$$

unde $a_0^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\tilde{\sigma}_r - \tilde{\sigma}_\theta)}{\sigma \tilde{\varepsilon}_r}$ este viteza de propagare a undelor de descărcare. Derivata parțială se calculează cu ajutorul ecuației fizice.

$$\tilde{\Psi}(r,\ \tilde{\varepsilon}_r) = -\frac{8G}{r}\,[\tilde{\varepsilon}_r - \varphi(r,\ t{=}t_1)]. \tag{36}$$

Se observă că sistemele ce determină caracteristicile în cazul încărcării și descărcării sînt analoage.

Utilizînd formulele lui Cramer, obținem ecuațiile liniilor caracteristice la descărcare sub forma :

$$dr \pm a_0 \cdot dt = 0. \tag{37}$$

Relațiile verificate pe caracteristice vor fi :

$$\begin{aligned} a_0 \cdot d\tilde{\varepsilon}_r + d\tilde{v}_r - \frac{1}{\rho} \tilde{\Psi} \cdot dt = 0, \\ a_0 \cdot d\tilde{\varepsilon}_r - d\tilde{v}_r - \frac{1}{\rho} \tilde{\Psi} \cdot dt = 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Relațiile (37) și (38) referitoare la două familii diferite de caracteristicile reale permit studiul undei directe de descărcare și a undei inverse.

Caracteristicile fiind reale, sistemul (35) este de tip hiperbolic.

8. DETERMINAREA FUNCȚIUNILOR $\tilde{u}_r$ ε_r $\tilde{\varepsilon}_\theta$, ÎN CAZUL DESCĂRCĂRII TUBULUI

8.1. *Determinarea funcției* $\tilde{u}_r$

Din ecuația incompresibilității 6.4 și ținînd cont de ecuațiile geometrice 6.2, obținem, procedînd ca la încărcare,

$$\tilde{u}_r(r, t) = \frac{F_1(t)}{r}, \tag{39}$$

unde $F_1(t)$ este o funcție arbitrară de timpul t ce se determină folosind 6.1 — 6.3. Se obține în final

$$F_1''(t) = \lambda_1, \tag{40}$$

unde

$$\lambda_1 = \frac{-4G(\varphi' \cdot r + 2\varphi)}{\rho} \tag{41}$$

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dr},$$

λ_1 este o constantă deoarece r trebuie particularizat folosind o condiție suplimentară cum ar fi, de exemplu, condiția unei deformații remanente maxime.

Integrînd (40), se obține

$$F_1(t) = \lambda_1 \frac{t^2}{2} + \widetilde{C} \cdot t + \widetilde{C}_1 \tag{42}$$

unde $\widetilde{C}$, $\widetilde{C}_1$ sînt două constante arbitrare ce se determină utilizînd condițiile (33), obținîndu-se astfel :

$$\begin{aligned} \widetilde{C} &= F'(t_1) - \lambda_1 \cdot t_1 , \\ \widetilde{C}_1 &= F(t_1) - F'(t_1) \cdot t_1 + \frac{\lambda_1 \cdot t_1^2}{2} . \end{aligned} \tag{43}$$

8.2. *Determinarea funcțiilor* $\tilde{\varepsilon}_r$, $\tilde{\varepsilon}_\theta$

Avem :

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{F_1(t)}{r^2}, \\ \tilde{\varepsilon}_\theta &= -\tilde{\varepsilon}_r = \frac{F_1(t)}{r^2}. \end{aligned} \tag{44}$$

Observație. Pentru obținerea tensiunilor $\tilde{\sigma}_r$, $\tilde{\sigma}_\theta$ se procedează ca la încărcare.

9. UTILIZĂRI PRACTICE ALE TEORIEI

Funcțiile determinate mai sus, care descriu fenomenul de deformare plastică a tubului supus la șoc, au multiple utilizări. În cele ce urmează ne vom opri la unele probleme care interesează mai mult practica inginerească și anume :

a) Calculul deformațiilor remanente.

b) Relația între presiunea interioară (p_i^*) și cea exterioară (p_e) la starea pur plastică a secțiunii transversale a tubului.

c) Calculul lucrului mecanic de deformație la încărcarea tubului.

9.1. *Calculul deformațiilor remanente*

Pentru a efectua acest calcul vom ține cont că acest tip de deformații se produce la *descărcarea completă* a tubului, adică pentru $\tilde{\sigma}_r = \tilde{\sigma}_\theta = 0$.

Atunci, din prima relație din (34) obținem deformația remanentă radială care are expresia :

$$\varepsilon_r^{\text{rem.}}(r, t = t_1) = \varphi(r, t = t_1) ; \tag{45}$$

Rezultă imediat din ecuația de incompresibilitate

$$\overline{\varepsilon}_{\theta}^{\text{rem.}}(r, t = t_1) = -\overline{\varepsilon}_{r}^{\text{rem.}} = -\varphi(r, t = t_1). \tag{46}$$

Din (45) și (46) rezultă că deformațiile remanente variază în lungul razei r.

9.2. *Relația între p_i^* și p_e la starea pur plastică*

Pentru a obține relația căutată utilizăm (30), în care punem $\sigma_r = -p_e$; $r = R_2$ și $t = t_1$.

Obținem:

$$-p_e = [F(t_1)]^n \cdot \left[\rho \cdot \lambda \cdot \ln R_2 + \frac{A}{2n} \cdot \frac{1}{R_2^{2n}}\right] + \Psi(t_1), \tag{47}$$

unde $\Psi(t_1)$ este dată de (31) pentru $t = t_1$.

9.3. *Calculul lucrului mecanic de deformație la încărcarea tubului*

Pentru a efectua acest calcul utilizăm expresia lucrului mecanic elementar de deformație care, pentru unitate de volum și pentru deplasări elementare $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$, are expresia:

$$\mathrm{d}\mathscr{L} = \sigma_{ij} \cdot \mathrm{d}\varepsilon_{ij}, \tag{48}$$

unde σ_{ij} este tensorul tensiunilor, iar ε_{ij} tensorul deformațiilor, ambii tensori fiind corespunzători stării de încărcare a tubului.

În cazul problemei tubului avem:

$$\mathrm{d}\mathscr{L} = \sigma_r \cdot \mathrm{d}\varepsilon_r + \sigma_\theta \cdot \mathrm{d}\varepsilon_\theta. \tag{49}$$

Ținînd cont de ecuația de incompresibilitate, (49) devine:

$$\mathrm{d}\mathscr{L} = (\sigma_r - \sigma_\theta)\,\mathrm{d}\varepsilon_r.$$

Utilizînd condiția de plasticitate, obținem

$$\mathrm{d}\mathscr{L} = 2K\,\varepsilon_r^n \cdot \mathrm{d}\varepsilon_r.$$

Atunci lucrul mecanic de deformație pentru o deformație finită $0 - \varepsilon_r$ și pentru unitate de volum are expresia:

$$\mathscr{L} = \int_0^{\varepsilon_r} 2K\,\varepsilon_r^n \cdot \mathrm{d}\varepsilon_r = \frac{2K}{n+1} \cdot \varepsilon_r^{n+1}. \tag{50}$$

Lucrul mecanic pentru întregul volum V al tubului de lungime l este dat de relația :

$$\mathscr{L}_{total} = \int_V \mathscr{L} \cdot \mathrm{d}V \; ; \; \mathrm{d}V = r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r \cdot l \, .$$

Ținînd cont că $\varepsilon_r = -\dfrac{F(t)}{r^2}$, se obține în final

$$\mathscr{L}_{total} = \frac{2 K\pi \cdot [- F(t_1)]^{n+1} \cdot l}{- n(n+1)} (R_2^{-2n} - R_1^{-2n}). \qquad (51)$$

Din formula (51) se observă că lucrul mecanic total depinde de mulți factori și anume : de materialul tubului prin constantele K și n, de durata șocului prin funcția $F(t_1)$ și de dimensiunile tubului prin mărimile l, R_2 și R_1.

În încheiere remarcăm că problema undelor de șoc în tuburi admite o soluționare exactă în cadrul unor ipoteze admise de experiență.

Primită la redacție la 14 iunie 1982

BIBLIOGRAFIE

N. CRISTESCU, *Dynamic plasticity*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967.
V. GHIZDAVU, *Mașini unelte și prelucrări prin așchiere*, vol. I și II. Ed. A.M.
L. KATCHANOV, *Éléments de la théorie de la plasticité*, Editions de Moscou, 1975.
V. H. KENNER and W. GOLDSMITH, *Elastic waves in truncated cones*, „University of California, Berkeley, 1967.

LEGI DE MIȘCARE REALIZABILE DE MECANISMUL CU CULISĂ OSCILANTĂ

de IULIAN POPESCU
Universitatea din Craiova
Facultatea de mecanică

Se studiază posibilitățile cinematice ale mecanismului cu culisă oscilantă. Pe baza unor programe de calcul, se studiază 30 de mecanisme cu dimensiuni din domeniul uzual.

1. INTRODUCERE

Sinteza mecanismului cu culisă oscilantă (denumire uzuală pentru mecanismul din fig. 1) se poate face pentru un număr de maxim patru poziții asociate. Legea de mișcare completă realizabilă de un asemenea mecanism este însă mai complicată decît o lege impusă doar prin patru poziții. Din această cauză, pentru a se cunoaște dacă o lege cerută poate fi realizată cu un asemenea mecanism, trebuie studiate legile realizabile de mecanismele cu dimensiuni în domenii uzuale, adică la care lungimile elementelor să nu modifice precizia mecanismului.

2. ELEMENTE DE CALCUL

Se consideră mecanismul din figura *1*, pentru care se adoptă un sistem de axe convenabil.

Prin proiectarea conturului mecanismului pe axe, rezultă :

$$\begin{aligned} a\cos\varphi &= x + b\cos\psi\,; \\ a\sin\varphi &= b\sin\psi. \end{aligned} \tag{1}$$

Lungimea a fiind variabilă, se poate elimina, obținîndu-se

$$a = \frac{x + b\cos\psi}{\cos\varphi} = \frac{b\sin\psi}{\sin\varphi},$$

de unde

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b\sin\psi}{x + b\cos\psi}. \tag{2}$$

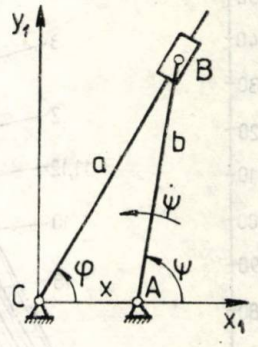


Fig. 1

Cu ajutorul relației (2), se poate calcula unghiul φ pentru valorile impuse lui ψ, cunoscîndu-se lungimile x și b.

Se constată că tangenta este infinită, dacă numitorul se anulează, adică dacă

$$x = -b\cos\psi, \quad \varphi = 90°. \tag{3}$$

3. POSIBILITĂȚI CINEMATICE

Cu ajutorul relației (2), cu restricția (3), se pot cunoaște valorile lui φ pentru valorile lui ψ iterate pentru o rotație completă. Iterîndu-se și lungimile x și b, se pot obține seturi de date $\varphi(\psi)$.

Cu datele din tabelul *1*, s-au obținut curbele din figura *2*, ce reprezintă legile uzuale $\varphi(\psi)$ realizabile de acest tip de mecanism.

Tabelul 1

Mecanismele studiate

Cod	x	b	Cod	x	b	Cod	x	b
1	5	10	11	15	50	21	35	30
2	5	20	12	15	60	22	35	40
3	5	30	13	25	10	23	35	50
4	5	40	14	25	20	24	35	60
5	5	50	15	25	30	25	45	10
6	5	60	16	25	40	26	45	20
7	15	10	17	25	50	27	45	30
8	15	20	18	25	60	28	45	40
9	15	30	19	35	10	29	45	50
10	15	40	20	35	20	30	45	60

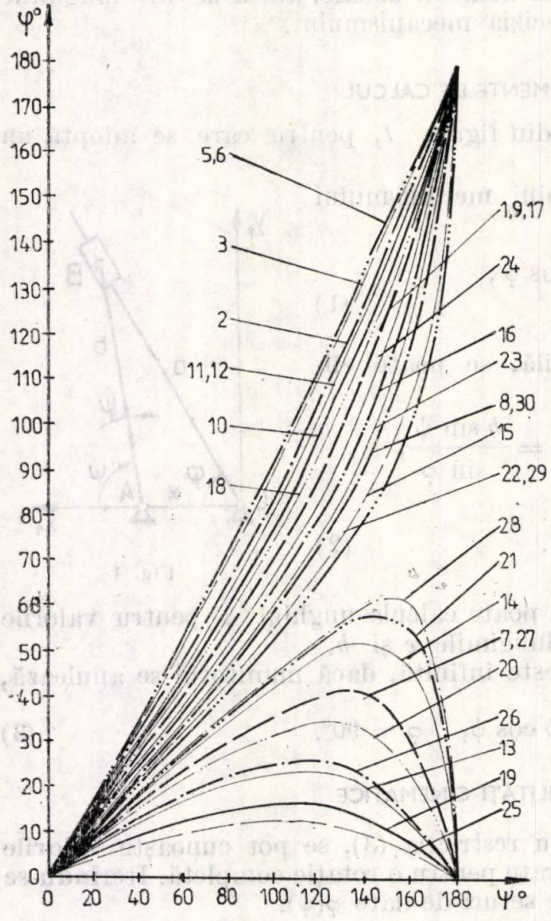


Fig. 2

Din analiza curbelor din figura *2* și a datelor din tabelul *1*, rezultă următoarele :

— mecanismele cu codurile *1,9* și *17*, au pentru $\psi = 120°$, $\varphi = 90°$, deoarece, conform relației (3),

$$\frac{x}{b} = -\cos 120° = 0{,}5,$$

condiție îndeplinită de aceste mecanisme, conform tabelului *1* ;

— mecanismele cu codurile *7*, *13*, *14*, *19*, *20*, *21*, *25*, *26*, *27* și *28* au legi diferite de celelalte mecanisme din figura *2*, deoarece se caracterizează prin inegalitatea $x > b$, deci elementul BC nu face rotații complete (de exemplu, mecanismul *20* din fig. *3*) ;

— unele mecanisme au legi de mișcare apropiate, reprezentate în figura *2* prin aceeași curbă, ceea ce se explică prin diferențe mici între x și b (de exemplu : *1*, *9*, *17* sau *22*, *29* sau *4*, *5*, *6* etc) ;

— la valori mici ale lui $x < b$, curbele sînt mai apropiate de legi liniare ; prin creșterea lui x, concavitatea curbelor crește ;

— la același x, prin creșterea lui b, curbele se îndepărtează mai mult de axa φ, de exemplu : *4*, *3*, *2* sau *11*, *10*, *9* sau *24*, *23*, *22*, ceea ce înseamnă că pentru același φ corespund valori mai mari pentru ψ.

Toate curbele din figura *2* au fost construite pentru $0 \leqslant \psi \leqslant 180°$. Rezultatele obținute la calculator, oferă însă soluții pentru φ și dacă $180 < \psi < 360°$. Astfel, în figura *4*, *b* s-a prezentat curba $\varphi(\psi)$ pentru $0 < \psi < 360°$. Se constată însă că intervalul curbei dintre $\psi = 180°$ și $\psi = 360°$, se obține prin rotirea axei ψ a curbei dintre 0 și 180° cu 180°, în sens trigonometric. Așadar, curbele din figura *2* pot fi continuate și pe intervalul $180° < \psi < 360°$, obținîndu-se astfel legile complete de mișcare. Constructiv, mecanismul *ABC* (fig. *4*, *a*) descrie legea $\varphi(\psi)$

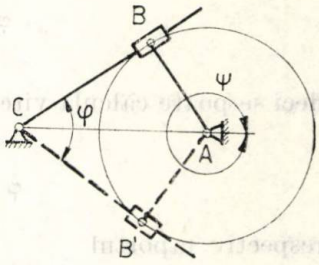


Fig. 3

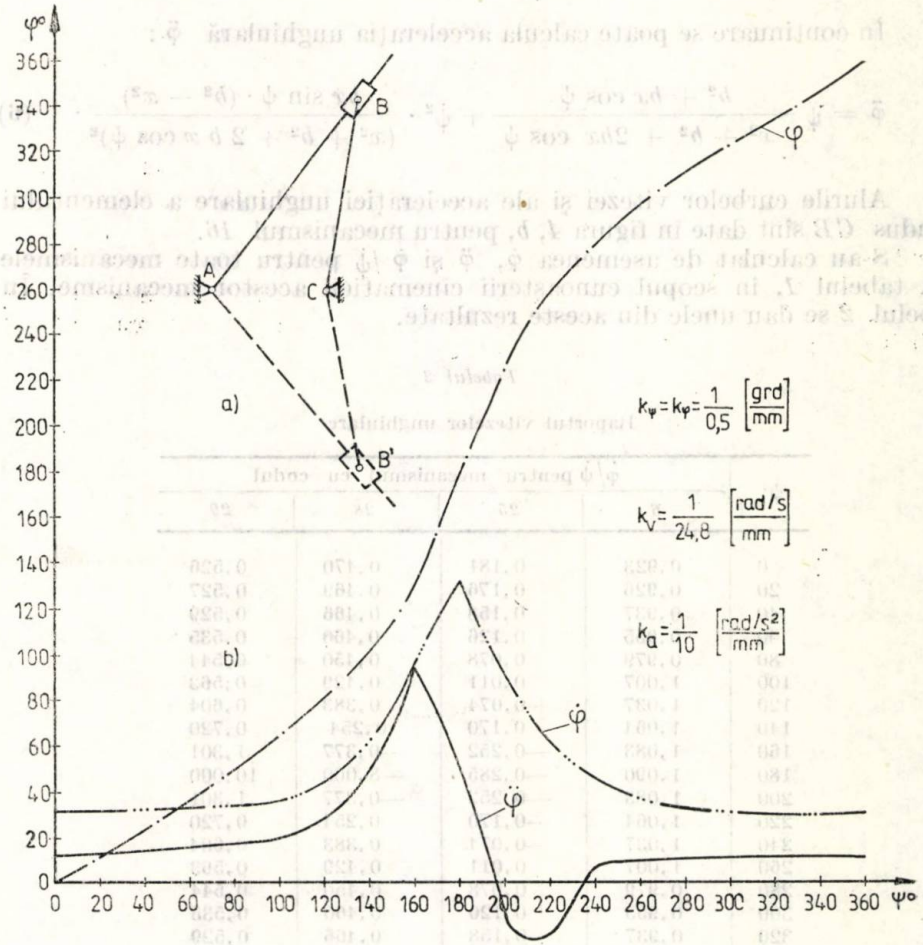


Fig. 4

pentru $0 \leqslant \psi \leqslant 180°$, iar același mecanism aflat în poziția $AB'C$, descrie legea pentru $180° < \psi < 360°$.

Din (2) rezultă:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b \sin \psi}{x + b \cos \psi}\right), \tag{4}$$

deci se poate calcula viteza unghiulară $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = \frac{b\,\dot{\psi}\,(x \cos \psi + b)}{x^2 + b^2 + 2bx \cos \psi},$$

respectiv raportul

$$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\psi}} = \frac{b(x \cos \psi + b)}{x^2 + b^2 + 2\,bx \cos \psi}. \tag{5}$$

În continuare se poate calcula accelerația unghiulară $\ddot{\varphi}$:

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\psi}\,\frac{b^2 + bx \cos \psi}{x^2 + b^2 + 2bx \cos \psi} + \dot{\psi}^2 \cdot \frac{bx \sin \psi \cdot (b^2 - x^2)}{(x^2 + b^2 + 2\,b\,x \cos \psi)^2}. \tag{6}$$

Alurile curbelor vitezei și ale accelerației unghiulare a elementului condus CB sînt date în figura *4, b*, pentru mecanismul *16*.

S-au calculat de asemenea $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ și $\dot{\varphi}/\dot{\psi}$ pentru toate mecanismele din tabelul *1*, în scopul cunoașterii cinematicii acestor mecanisme. În tabelul *2* se dau unele din aceste rezultate.

Tabelul 2

Raportul vitezelor unghiulare

$\psi°$	$\dot{\varphi}/\dot{\psi}$ pentru mecanismul cu codul			
	6	*25*	*28*	*29*
0	0,923	0,181	0,470	0,526
20	0,926	0,176	0,469	0,527
40	0,937	0,158	0,466	0,529
60	0,955	0,126	0,460	0,535
80	0,979	0,078	0,450	0,544
100	1,007	0,011	0,429	0,563
120	1,037	—0,074	0,383	0,604
140	1,064	—0,170	0,254	0,720
160	1,083	—0,252	—0,377	1,301
180	1,090	—0,285	—8,000	10,000
200	1,083	—0,252	—0,377	1,301
220	1,064	—0,170	0,254	0,720
240	1,037	—0,074	0,383	0,604
260	1,007	0,011	0,429	0,563
280	0,979	0,078	0,450	0,544
300	0,955	0,126	0,460	0,535
320	0,937	0,158	0,466	0,529
340	0,926	0,176	0,469	0,527

Folosirea diagramelor cinematice din figura *4*, *b* sau a rezultatelor similare celor din tabelul *2*, este utilă la sinteza mecanismelor cu culisă oscilantă.

4. CONCLUZII

a) Legile de mișcare realizabile de mecanismul cu culisă oscilantă sînt de tipul celor din figura *4*, *b* ;

b) Pentru stabilirea legilor realizabile de mecanismele cu dimensiuni din domeniul uzual, se folosesc curbele din figura *2*, cu datele din tabelul *1* ; aceste curbe se pot extinde și pentru $180° < \psi < 360°$.

Primită la redacție la 17 decembrie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. I. I. ARTOBOLEVSKI, *Mechanisms for the Generation of Plane Curves*, Pergamon Press, 1964.
2. R. L. BRASFIELD, C. BAGCI, *Computerized design method for minimum error synthesis of multi-loop plane mechanisms for function generation via the Hrones-Nelson atlas*, SYROM'73, București.
3. S. CONONOVICI, *Simularea pe calculatorul electronic, instrument în studiul mecanismelor complexe*, St. cerc. mec. apl., **35**, *1* (1976).
4. S. H. KOJEVNIKOV, Ia. I. EXPENKO, Ia. M. RASKIN, *Mehanizmi, Maşinostroienie*, Moskva, 1976.
5. * * * *Teoria mecanismelor și mașinilor. Structura și cinematica mecanismelor*. Edit. tehnică, București, 1959.

UTILIZAREA MODELĂRII ÎN BIOMECANICA SISTEMULUI OSTEO-ARTICULAR

de I. CONSTANTINESCU, N. CONSTANTIN, M. AL. SANDU,
Institutul politehnic Bucureşti

În lucrare se prezintă cîteva concepte şi legi fundamentale ale teoriei modelării, analizei dimensionale şi teoriei similitudinii. Se prezintă, pe baza unor exemple, unele probleme specifice ale modelării sistemului osteo-articular din punct de vedere biomecanic.

1. PRINCIPIILE TEORIEI MODELĂRII

Cercetarea fenomenelor din natură se face, în general, pe modele. Modelele se elaborează prin eliminarea influenţelor parazite, nesemnificative pentru scopul propus, care se manifestă simultan cu procesul studiat. Se emit, deci, o serie de ipoteze simplificatoare.

Modelul trebuie să fie adecvat scopului propus ; un model excesiv de complicat—care îşi propune să aibă în vedere toate aspectele posibile ale fenomenului — poate deveni costisitor, greoi sau chiar inoperant, iar un model simplist, prea sumar, poate fi incorect, ca urmare a neglijării unor aspecte importante ale fenomenului.

Conceput în sensul cel mai general, modelul poate fi funcţional, de calcul sau experimental.

Modelul funcţional este un model structural, teoretic sau experimental, care pune în evidenţă diversele componente ale fenomenului şi ilustrează calitativ legăturile reciproce ale acestora.

Modelul de calcul este un model teoretic care, pornind de la un set coerent de ipoteze, stabileşte o schemă de calcul, un număr de teoreme şi relaţii de calcul, care descriu cantitativ şi calitativ fenomenul.

Modelul experimental este un obiect fizic, un dispozitiv sau o instalaţie care reproduce în anumite condiţii fenomenul analizat.

Cele trei tipuri de modele sînt complementare în descrierea unui fenomen, fiecare avînd avantaje, dezavantaje şi limitări.

Utilizarea tehnicii modelării ca metodă de cercetare în investigarea organismului uman, s-a dovedit deosebit de fructuoasă.

Delimitînd, în cele ce urmează, problematica specifică sistemului osteo-articular, se fac unele detalieri ale teoriei modelării relative la analizarea acestui sistem din punct de vedere biomecanic.

Cercetarea sistemului osteo-articular al organismului uman sub aspect mecanic se poate face cu succes utilizînd metodele inginereşti, clasice şi moderne, de calcul şi experimentale, acesta putînd fi privit de către inginer ca structură spaţială deformabilă, avînd o complexitate apreciabilă în ceea ce priveşte geometria, proprietăţile elastice şi sarcinile.

În vederea elaborării unui model eficient, în orice problemă de biomecanică trebuie ca, pe baza datelor cunoscute în legătură cu fenomenul care interesează, precum şi în funcţie de scopul urmărit, să se facă o sinteză a modelului, care să ţină seamă de următoarele aspecte :

a. Dacă modelul este static, cinematic sau dinamic, adică dacă interesează solicitările, eforturile, tensiunile, deformaţiile, deplasările sub

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, N R. 3, 1983, P. 284—298

diverse sarcini statice sau dinamice, sau legile de mișcare ale diverselor componente, în diverse situații, ca, de exemplu, mers, alergare, săritură etc.

b. Geometria modelului poate fi plană sau spațială. Modelul poate fi realizat la scară în toate detaliile sau poate fi distorsionat, adică unele detalii sau dimensiuni pot fi executate la altă scară decît restul modelului.

c. Materialul din care este realizat modelul poate fi natural, caz în care se utilizează un preparat anatomic, poate fi o masă plastică, un material metalic, sau combinații ale acestora.

d. Rezemarea și încărcarea modelului trebuie realizate în condiții cît mai apropiate de cele reale, pentru situația studiată.

Deși modelarea în biomecanica sistemului osteo-articular se supune acelorași legi și principii generale care se utilizează în inginerie, numai rareori și numai într-o mică măsură se pot verifica rezultatele obținute prin studiul unui model cu cele obținute pe sistemul original, care este organismul uman ; pentru aceasta ar trebui efectuate determinări in vivo. O suplinire a acestui inconvenient se poate face prin efectuarea de studii comparative, pe diverse variante de modelare a fenomenului real, stabilindu-se care variantă modelează mai bine problema respectivă.

Limitîndu-ne la aspectele mecanice ale sistemului osteo-articular uman, el poate fi privit ca un sistem mecanic original sau prototip, al cărui model este tot un sistem mecanic, care urmează să fie investigat prin calcul sau experimental.

Tipurile de modele utilizate pentru sistemele mecanice pot fi :

a. Model mecanic realizat la scară geometrică exactă, mai mic, mai mare sau de aceeași mărime cu sistemul original.

b. Model mecanic realizat în condiții speciale de modelare, fără o scară geometrică exactă, influența abaterilor de la scara exactă putînd fi evaluată.

c. Model constînd dintr-un sistem total nesimilar cu prototipul, cum ar fi un model electric.

d. Sistem tip calculator, care conține elemente ce pot fi dispuse astfel încît să îndeplinească operațiile matematice indicate de ecuațiile comportării prototipului. De exemplu, un analizor diferențial electronic, poate fi considerat ca model pentru un sistem mecanic original.

e. Diferite combinații ale tipurilor precedente.

Teoria modelării cuprinde — în afara aspectelor calitative prezentate mai sus — și un ansamblu de legi, teoreme și relații de calcul care exprimă cantitativ legăturile biunivoce care există între valorile mărimilor determinate pe model și ale celor determinate pe prototip, sau invers.

Relația care exprimă legătura dintre ansamblul mărimilor scalare vectoriale sau tensoriale, care descriu comportarea prototipului (notate cu $\widetilde{A}_p$) și a celor corespunzătoare, care descriu comportarea modelului (notate cu $\widetilde{A}_m$), este, în cazul cel mai general, de forma

$$\widetilde{A}_p = \{K_{\widetilde{A}}\}\widetilde{A}_m, \qquad (1)$$

în care $K_{\widetilde{A}}$ este un operator ale cărui componente se numesc factori de scară.

Principalele tipuri de corespondențe care pot exista între mărimile determinate pe prototip și cele de pe model sînt — în modelarea problemelor de mecanică a solidelor deformabile — următoarele:

a. Corespondența prin similitudine sau asemănare este definită prin aceea că operatorul $\{K_{\tilde{A}}\}$ din relația (1) are o singură componentă $K_{\tilde{A}}$, constantă în timp și spațiu, care este factorul de scară al mărimii $\tilde{A}$.

b. Corespondența afină constă în faptul că se folosesc factori de scară diferiți pentru diferitele componente ale unui vector sau tensor. Ea este utilă în modelarea materialelor ortotrope, a plăcilor și învelișurilor etc.

c. Corespondența funcțională este o generalizare a corespondenței prin similitudine, în sensul că factorul de scară $K_{\tilde{A}}$ este același pentru toate componentele unui vector sau tensor, dar este variabil în timp și spațiu.

d. Corespondența operatorie este cea în care operatorul $\{K_{\tilde{A}}\}$ devine un operator integral, diferențial sau integro-diferențial. În anumite situații, pot apare și combinații ale corespondențelor definite mai sus.

Avînd în vedere că modelarea pe baza corespondenței prin similitudine este cea mai utilizată, iar pe de altă parte ea este bine studiată în literatura de specialitate, în cele ce urmează se prezintă cîteva noțiuni, legi și relații de calcul necesare în modelarea corectă a problemelor de biomecanică a sistemului osteo-articular.

2. ELEMENTE DE TEORIA SIMILITUDINII

Obiectul teoriei similitudinii este formularea unor condiții generale în studiul fenomenelor simile, care să permită utilizarea în practică a unor relații teoretice sub forma mai clară și mai simplă de formule adimensionale, sau să simplifice studiul experimental al fenomenelor prin reducerea numărului de variabile care trebuie să fie studiate pentru cunoașterea satisfăcătoare a fenomenului cercetat.

O componentă importantă a teoriei similitudinii este analiza dimensională. Analiza dimensională studiază relațiile care descriu fenomenele fizice [21]. Se pornește de la faptul că relațiile, raționale sau empirice, trebuie să fie dimensional omogene, adică toți termenii unei relații trebuie să aibă aceleași unități de măsură și aceleași puteri ale mărimilor fundamentale.

Omogenitatea dimensională a relațiilor fizice este necesară deoarece prin ea se asigură invariabilitatea lor față de schimbarea sistemului de unități de măsură [16].

Mărimile exprimate în unități derivate se numesc mărimi secundare, iar cele măsurate în unități fundamentale — mărimi primare.

O cantitate Q_s dintr-o mărime secundară se poate scrie sub forma [16]

$$Q_s = (n_1 a)^{\alpha} (n_2 b)^{\beta} (n_3)^{\gamma} [F^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma}], \qquad (2)$$

în care n_1, n_2, n_3 este numărul de unități conținut în cantitatea dată;

a, b, c — numere care arată că numărul de unități conținut se schimbă odată cu schimbarea valorii unității;

F, L, T — unități fundamentale folosite.

Mărimea Q_s, definită prin relaţia (2), se numeşte dimensională, iar exponenţii α, β, γ sînt dimensiuni ale unităţii derivate $[F^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma}]$.

Dacă α, β, γ sînt nuli, mărimea Q_s este adimensională şi ea nu depinde de sistemul de unităţi fundamentale ales.

Dacă un fenomen este guvernat de o lege în care intervin mărimile secundare $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ca variabile, fiecare avînd dimensiunile $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\ldots$; $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$, relative la un sistem de unităţi fundamentale (de exemplu F, L, T), matricea

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 \ldots \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 \ldots \gamma_n \end{vmatrix},$$

se numeşte matricea dimensiunilor variabilelor.

Analiza dimensională studiază clasa funcţiilor dimensional omogene. O condiţie suficientă ca o ecuaţie să fie dimensional omogenă este ca ea să se poată reduce la o ecuaţie care conţine numai produse adimensionale.

Prima etapă în orice problemă de analiză dimensională este de a decide care sînt variabilele care intervin.

Fie un fenomen guvernat de o lege care într-un sistem de unităţi fundamentale de măsură se poate exprima analitic sub forma

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{4}$$

în care $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt variabilele determinante.

Dacă funcţia $f(x)$ este dimensional omogenă, se poate întotdeauna ca ecuaţia (4) să se scrie sub forma

$$\varphi(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-r}) = 0, \tag{5}$$

în care Π_i sînt factori adimensionali independenţi;
r — rangul matricei dimensiunilor variabilelor.

Factorii Π_i sînt formaţi din produse de puteri ale variabilelor x_i, iar fiecare factor nu cuprinde mai mult de $r + 1$ variabile. Numărul factorilor Π_i nu poate fi mai mic de $n - r$. Deoarece variabilele x_i sînt formate din produse de puteri ale unităţilor fundamentale, rezultă că şi factorii adimensionali Π_i sînt produse de puteri ale unităţilor fundamentale. Aceasta se numeşte teorema Π.

Deoarece factorii Π_i sînt independenţi, fiecare din ei va conţine o variabilă care nu apare în ceilalţi. Dacă variabila cea mai importantă din problema care se cercetează este conţinută în factorul Π_1, ecuaţia (5) poate fi scrisă sub forma

$$\Pi_1 = \psi(\Pi_2, \Pi_3, \ldots).$$

Avînd în vedere că aceasta este o relaţie generală pentru fenomenul investigat, ea este valabilă atît pentru prototip, cît şi pentru model. Dacă

modelul este proiectat și încercat astfel ca

$$\Pi_{2m} = \Pi_{2p}; \Pi_{3m} = \Pi_{3p}; \ldots, \tag{6}$$

rezultă

$$\Pi_{1p} = \Pi_{1m}. \tag{7}$$

Deoarece ecuațiile (6) determină condițiile pentru proiectarea și încercarea modelului, ele se numesc ecuații de proiectare, iar produsele adimensionale Π_i se numesc invarianți sau criterii de similitudine. Ecuația (7) se numește ecuație de anticipare și cu ajutorul ei se deduce comportarea prototipului din analiza comportării modelului.

Comportarea unei structuri complexe sub cea mai generală solicitare posibilă este precizată dacă în fiecare moment se cunosc pentru fiecare punct mărimile și direcțiile tensiunilor principale σ și ale deplasărilor u. Încărcările, mișcările și regimurile termice care acționează în fiecare moment asupra structurii, se consideră cunoscute.

Ecuația (4), în acest caz, va fi de forma [16]:

$$f(u, \sigma, x, y, z, l, t, E, \rho, g, a, p, P, c, \alpha, \varkappa, u_0, \sigma_0, \theta) = 0, \tag{8}$$

în care intervin 19 mărimi

u — deplasarea; σ —tensiunea; x, y, z — coordonatele curente; l — lungimea; t — timpul; E — modulul de elasticitate; ρ — densitatea materialului; g — accelerația gravitației; a — accelerația mișcării; p — forța distribuită pe unitatea de suprafață; P — forța concentrată; c — căldura specifică; α — coeficientul de dilatare termică liniară; $\varkappa$ — coeficientul de conductivitate termică; u_0 — deplasarea inițială impusă; σ_0 — tensiunea inițială impusă; θ — temperatura.

Se consideră sistemul absolut de unități fundamentale: L — lungime; M — masă; T — timp, Θ — temperatură, Q — căldură (fără introducerea legilor termodinamicii).

Matricea dimensiunilor este de rangul $r = 5$ și rezultă din tabelul 1. Cu mărimile care intervin în ecuația (8), se pot forma mulțimi de cîte $19 - 15 = 14$ produse adimensionale. Formăm, de exemplu, mulțimea:

$$\frac{u}{l}; \frac{\sigma l^2}{P}; \frac{x}{l}; \frac{y}{l}; \frac{z}{l}; \frac{ta^{1/2}}{l^{1/2}}; \frac{El^2}{P}; \frac{\rho a l^3}{P}; \alpha\theta; \frac{\varkappa a^{1/2} l^{3/2}}{cP}; \frac{g}{a}; \frac{pl^2}{P}; \frac{u_0}{l}; \frac{\sigma_0 l^2}{P}. \tag{9}$$

Tabelul 1

	u	σ	x	y	z	l	t	E	ρ	g	a	p	P	c	α	$\varkappa$	u_0	σ_0	θ
L	1	—1	1	1	1	1	0	—1	—3	1	1	—1	1	0	0	—1	1	—1	0
M	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
T	0	—2	0	0	0	0	1	—2	0	—2	—2	—2	—2	0	0	—1	0	—2	0
Θ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—1	—1	—1	0	0	1
Q	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0

Mulțimea produselor adimensionale (9) definește invarianții modelării sau criteriile de similitudine pentru problema considerată.

Dacă factorii de scară ai modelului sînt pentru lungimi, tensiuni, forțe concentrate etc., respectiv

$$K_l = \frac{l_p}{l_m}; K_\sigma = \frac{\sigma_p}{\sigma_m}; K_P = \frac{P_p}{P_m}, \ldots \tag{10}$$

criteriile de similitudine (9) devin

$$K_\varepsilon = 1; K_\sigma K_l^2 = K_P; K_t K_a^{1/2} = K_l^{1/2}; K_E K_l^2 = K_P; K_\rho K_a K_l^3 = \\ = K_P; K_\alpha K_\theta = 1; K_\varkappa K_a^{1/2} K_l^{3/2} = K_c K_P; K_g = K_a; K_P K_l^2 = K_P, \tag{11}$$

în care K_ε este scara deformațiilor specifice ε.

În studiul sistemelor elastice intervine și coeficientul de contracție transversală ν. În cazul cel mai general trebuie îndeplinită condiția

$$K_\nu = 1, \tag{12}$$

care este o cerință restrictivă foarte severă, ea limitînd foarte mult alegerea materialului modelului.

Cu cea mai mare grijă trebuie avută în vedere și problema valorilor celorlalte constante elastice (E și G) pentru prototip și model.

Respectarea condițiilor (11) și (12) duce la realizarea unei similitudini complete (exacte) între model și prototip.

După alegerea materialului și a scării configurației geometrice, scara deformațiilor specifice K_ε se alege astfel ca deformațiile ce se vor măsura pe model, corespunzătoare tensiunii curente în prototip, să se poată măsura cu precizie satisfăcătoare, fără ca modelul să iasă din domeniul solicitărilor elastice.

Avînd în vedere că o problemă dată, concretă, se poate încadra într-o clasă particulară de condiții, criteriile de similitudine devin mai puțin restrictive, fiind mai puțin numeroase.

Iată cîteva criterii de similitudine utilizate în mecanica solidului deformabil:

a. Criteriul de similitudine Hooke se aplică în cazul problemelor statice [22]. În astfel de situații structura este în echilibru tot timpul aplicării sarcinilor, deformațiile și deplasările cresc lent, accelerațiile fiind nule sau atît de mici încît pot fi neglijate.

Deci la solicitările statice intervin numai forțele exterioare (forțele de contur și forțele masice).

Expresia criteriului de similitudine Hooke, este

$$H_k = \frac{P_p}{A_p E_p} = \frac{P_m}{A_m E_m} \tag{13}$$

în care P este forța axială în secțiunea A.

Dacă numărul H_k are aceeași valoare pentru model și pentru prototip cele două sisteme sînt asemenea în ceea ce privește forțele exterioare. Relația dintre scări este

$$K_p = K_l^2 K_E. \tag{14}$$

Se menționează că criteriul Hooke este satisfăcut automat — independent de natura materialului — dacă este realizată similitudinea geometrică.

b. Criteriul de similitudine Froude se utilizează cînd trebuie avută în vedere și influența greutății proprii asupra modelului [22].

Se pornește de la scara accelerației gravitației

$$K_g = \frac{g_p}{g_m} = \frac{K_l}{K_t^2}, \tag{15}$$

în care se înlocuiesc expresiile scărilor K_l și K_t.

După transformări simple, rezultă expresia criteriului de similitudine Froude

$$F_r = \frac{v_p^2}{g_p l_p} = \frac{v_m^2}{g_m l_m}, \tag{16}$$

unde $v_p = l_p/t_p$ și $v_m = l_m/t_m$.

Dacă $g_p = g_m$ ecuația (15) duce la condiția

$$K_l = K_t^2 \tag{17}$$

cunoscută sub numele de legea similitudinii Froude.

c. Criteriul de similitudine Cauchy intervine în probleme de solicitări dinamice produse de vibrații. În cazul unei bare, expresia criteriului Cauchy, este [22]

$$C_a = \frac{v}{c},$$

în care

v este viteza mișcării de oscilație a fiecărui punct al barei;

c — viteza de propagare a sunetului (a undelor longitudinale) în materialul barei.

După determinarea criteriilor de similitudine, pentru a putea realiza modelul, este necesară stabilirea relațiilor de legătură dintre scările mărimilor fizice care definesc aceste criterii.

Sistemul de relații între scări, constituie legea modelului [21].

Dacă pentru o anumită problemă ce urmează a fi modelată se cunosc numai variabilele care intervin, folosirea principiilor analizei dimensionale duce la necesitatea similitudinii complete.

Informații suplimentare în legătură cu prototipul ce trebuie modelat, fac uneori posibilă nerespectarea riguroasă a condițiilor de similitudine completă. Un model la care una sau mai multe condiții de proiectare nu

sînt satisfăcute, se numește model distorsionat. În aceste cazuri se introduc erori în ecuațiile de modelare.

Ele trebuie evaluate cu grijă și corectate, dacă este posibil.

Pe lîngă distorsiuni intenționate, pot exista și abateri neprevăzute de la similitudinea completă — așa-zisele efecte de scară — care ar putea duce la erori grave în utilizarea modelelor.

Cîteva dintre cauzele cele mai frecvente ale acestor erori sînt:

a. Mărind foarte mult scara lungimilor, modelul poate deveni o structură microscopică; mărind foarte mult scara timpului se poate ajunge în domeniul mecanicii relativiste. În ambele cazuri, modelul va fi guvernat de alte legi decît prototipul, care este macroscopic și se află în domeniul legilor mecanicii clasice.

b. Ipotezele valabile pentru prototip pot să nu fie valabile pentru un model cu dimensiuni mult mărite.

c. Denaturări ale condițiilor de similitudine pot proveni și din valori prea mari pentru scara temperaturilor sau a accelerațiilor, prin care se pot produce modificări substanțiale în structura materialului, legile fizice ale fenomenului care se studiază nemaifiind valabile.

d. Condiția (12) a egalității coeficientului de contracție transversală pentru prototip și model nu poate fi îndeplinită totdeauna.

e. Proprietățile materialului pot fi influențate de dimensiunea secțiunii și de metoda de fabricație. De asemenea, viteze de încărcare diferite pot duce la comportarea diferită a modelului față de prototip.

f. Detaliile mici pot fi foarte greu modelate convenabil.

Efectele de scară trebuie tratate drept abateri de la similitudinea completă. Ele trebuie cercetate și corectate, dacă este posibil, pe baza unei teorii generale a modelelor distorsionate [16].

Scara geometrică a modelului trebuie aleasă cu multă grijă, de ea depinzînd, în multe cazuri, succesul unui studiu pe model [16].

Dimensiunile minime ale modelului sînt condiționate de natura materialului modelului, de precizia aparatelor de măsurat avute la dispoziție, de precizia cerută în determinarea deplasărilor sau a tensiunilor, de tipul structurii ce se modelează.

3. PROBLEME ALE MODELĂRII ÎN BIOMECANICĂ

În cele ce urmează, se prezintă unele particularități ale modelării, specifice problemelor de biomecanică ale sistemului osteo-articular uman.

a. Aspectele geometrice ale modelării sistemului osteo-articular sînt dominate de necesitatea utilizării unor modele spațiale, majoritatea elementelor osoase avînd forme geometrice complicate.

În vederea reproducerii cît mai exacte a acestor forme se folosesc modele naturale, adică preparate biologice proaspete sau uscate: oase, articulații, subansamble mai mult sau mai puțin complexe, prelevate de la cadavre [2], [5], [6].

În anumite situații, dictate mai ales de necesitatea realizării unei reproductibilități satisfăcătoare a condițiilor de încercare pe un număr relativ mare de modele, se realizează un mulaj după un os natural și apoi,

după acesta se execută din masă plastică, metal etc. numărul dorit de modele identice.

Pentru realizarea unor modele de calcul, de exemplu pentru analiza tensiunilor prin utilizarea metodei elementelor finite, este necesară determinarea efectivă, cantitativă, cît mai precisă a geometriei prototipului (de exemplu un femur) prin măsurarea coordonatelor spațiale într-un număr cît mai mare de puncte. Această operație este laborioasă și prespune existența unor dispozitive, instalații și aparate de măsurare adecvate.

Autorii au folosit cu succes pentru determinarea geometriei spațiale a unui femur, instalația reprezentată schematic în figura 1. În universalul unui strung normal, s-a prins o masă rotativă care permite realizarea unor rotiri cu o precizie de 2′.

Au fost determinate coordonatele cilindrice ale suprafeței exterioare a femurului, astfel :

— abscisa X, cu ajutorul unui șubler de adîncime montat în suportul port-cuțit al strungului (sania transversală a fost blocată);

— ordonata Y, prin deplasarea longitudinală a căruciorului și citirea acesteia pe tamburul divizat al căruciorului;

— unghiul β, cu ajutorul mesei rotative (axul principal al strungului fiind blocat).

Geometria canalului medular s-a determinat prin secționarea transversală a femurului și măsurarea grosimii corticalei.

Pentru realizarea unor modele experimentale destinate mai ales studiilor prin fotoelasticimetrie, se utilizează atît modele spațiale [11], [12], cît și modele plane [1], [3], [17].

Desigur că modelul spațial este mai precis și mai complet decît cel plan, dar dificultățile de realizare a modelului și de prelucrare a rezultatelor sînt mult mai mari pentru modelul spațial în comparație cu cel plan. O soluție de compromis este realizarea a două modele plane care reproduc condițiile din planele frontal și sagital ale prototipului [8], [15].

În ceea ce privește scara geometrică K_l a modelelor realizate, în marea majoritate a cazurilor ea are valoarea 1, atît pentru modelele de calcul, cît și pentru modelele experimentale.

b. Materialul este neomogen și anizotrop. Oasele au o structură foarte complexă. Ele au un strat exterior din material dur și compact, sub care se găsește un strat spongios; straturile sînt astfel aranjate încît să prezinte o rezistență maximă față de solicitările întîlnite în mod obișnuit.

Ca urmare a celor arătate mai sus, rezultă variații sensibile ale valorilor constantelor elastice și ale caracteristicilor mecanice ale osului în diverse puncte ale unei secțiuni sau în lungul unui os lung (de exemplu femur). De asemenea, caracteristicile mecanice și elastice diferă apreciabil de la un os proaspăt la un os îmbălsămat, uscat.

Trebuie menționat faptul că pentru osul privit macroscopic, ca un tot omogen și izotrop, se obține o curbă caracteristică cu o porțiune rectilinie. Aceasta justifică acceptarea ipotezei liniarității fizice și a valabilității legii lui Hooke [19].

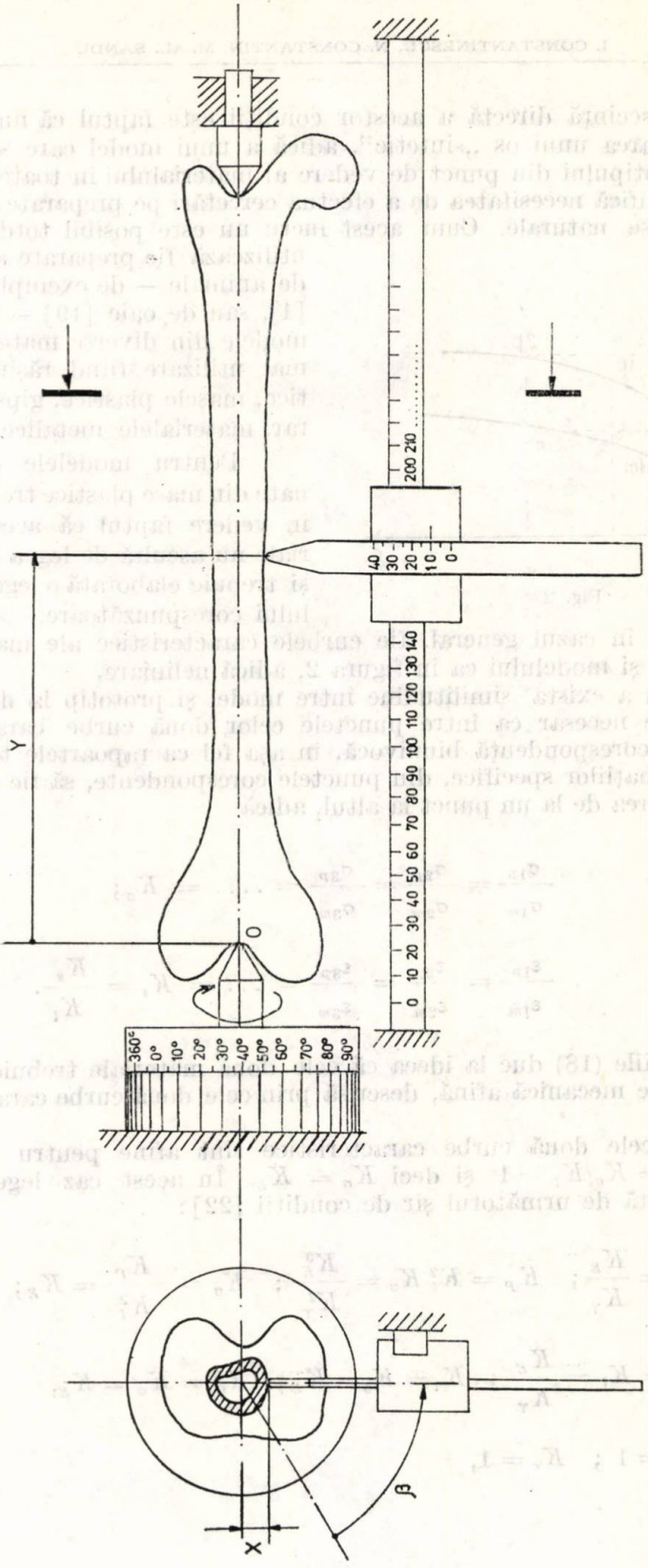

200 210
40 30 20 10 0
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140
Y
O
360°
0° 10° 20° 30° 40° 50° 60° 70° 80° 90°
β
X

Fig. 1

O consecință directă a acestor condiții este faptul că nu este posibilă realizarea unui os „sintetic", adică a unui model care să fie asemenea prototipului din punct de vedere al materialului în toate detaliile. Aceasta justifică necesitatea de a efectua cercetări pe preparate biologice, adică pe oase naturale. Cum acest lucru nu este posibil totdeauna, se utilizează fie preparate anatomice de animale — de exemplu de cîine [4], sau de oaie [19] — fie se fac modele din diverse materiale, cele mai utilizate fiind rășinile sintetice, masele plastice, gipsul și, mai rar, materialele metalice.

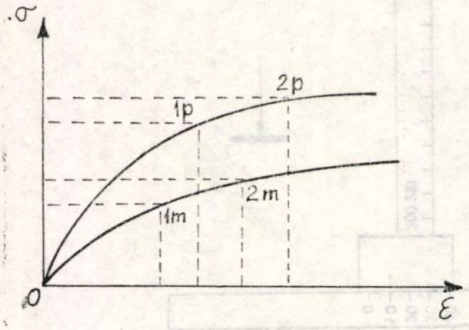


Fig. 2

Pentru modelele confecționate din mase plastice trebuie avut în vedere faptul că aceste materiale nu ascultă de legea lui Hooke și trebuie elaborată o lege a modelului corespunzătoare.

Astfel, în cazul general, fie curbele caracteristice ale materialului prototipului și modelului ca în figura 2, adică neliniare.

Pentru a exista similitudine între model și prototip la diverse încărcări, este necesar ca între punctele celor două curbe caracteristice să existe o corespondență biunivocă, în așa fel ca rapoartele tensiunilor și ale deformațiilor specifice, din punctele corespondente, să fie constante pentru trecerea de la un punct la altul, adică

$$\frac{\sigma_{1p}}{\sigma_{1m}} = \frac{\sigma_{2p}}{\sigma_{2m}} = \frac{\sigma_{3p}}{\sigma_{3m}} = \ldots = K_\sigma;$$

$$\frac{\varepsilon_{1p}}{\varepsilon_{1m}} = \frac{\varepsilon_{2p}}{\varepsilon_{2m}} = \frac{\varepsilon_{3p}}{\varepsilon_{3m}} = \ldots = K_\varepsilon = \frac{K_u}{K_l}. \tag{18}$$

Condițiile (18) duc la ideea că cele două materiale trebuie să aibă o comportare mecanică afină, descrisă prin cele două curbe caracteristice $\varepsilon - \sigma$.

Dacă cele două curbe caracteristice sînt afine pentru $K_u = K_l$, rezultă $K_\varepsilon = K_u/K_l = 1$ și deci $K_\sigma = K_E$. În acest caz legea modelului este dată de următorul șir de condiții [22]:

$$K_l = \frac{K_E}{K_\gamma}; \quad K_P = K_l^2 K_\sigma = \frac{K_E^3}{K_\gamma^2}; \quad K_\sigma = \frac{K_P}{K_l^2} = K_E;$$

$$K_u = K_l = \frac{K_E}{K_\gamma}; \quad K_\tau = K_\sigma = K_E; \quad K_G = K_\sigma = K_E, \tag{19}$$

$$K_\varphi = 1; \quad K_\nu = 1,$$

în care

K_γ este scara greutăților specifice;

K_τ — scara tensiunilor tangențiale;

K_φ — scara unghiurilor de răsucire.

Celelalte notații au semnificațiile precizate anterior.

Dacă cele două curbe caracteristice sînt afine pentru $K_u \neq K_l$, rezultă $K_\varepsilon = K_u/K_l \neq 1$. Scara tensiunilor nu mai este impusă de natura materialelor folosite, ci rezultă din scările K_l și K_P, care se aleg arbitrar. În acest caz, legea modelului este dată de următorul șir de condiții [22]

$$K_\sigma = \frac{K_P}{K_l^2}; \quad K_u = \frac{K_l K_\sigma}{K_E} = \frac{K_P}{K_l K_E};$$

$$K_\gamma = \frac{K_\sigma}{K_l} = \frac{K_P}{K_l^3}; \quad K_\tau = K_G; \quad K_\nu = 1. \tag{20}$$

Proprietățile transformării afine, exprimate prin relațiile (18), rămîn valabile și în cazul particular al materialelor liniar elastice, care ascultă de legea lui Hooke.

În figura 3 s-au reprezentat porțiunile liniare ale curbelor caracteristice ale materialelor prototipului și modelului.

Pentru deformații specifice egale pe model și prototip, la diferite încărcări ale acestora, vor exista relațiile

$$K_\varepsilon = \frac{K_u}{K_l} = 1,$$

$$\frac{\sigma_{1p}}{\sigma_{1m}} = \frac{\sigma_{2p}}{\sigma_{2m}} = \ldots K_\sigma.$$

Dacă scara deformațiilor specifice $K_\varepsilon \neq 1$, atunci perechile de puncte corespondente de pe prototip și model se află pe drepte paralele între ele, dar acestea nu mai sînt paralele cu axa ordonatelor (fig. 3).

Pentru analiza stărilor de tensiune din zonele de capăt ale oaselor este necesară modelarea suprafețelor cartilaginoase articulare. Neglijarea acestui aspect duce la perturbații mari ale distribuțiilor sarcinilor în zona respectivă și deci și ale tensiunilor obținute. Avînd în vedere principiul lui Saint-Vénant, perturbațiile vor fi neglijabile în zone suficient de depărtate de capăt, dacă bineînțeles sarcinile sînt echivalente din punct de vedere mecanic.

Pentru un model de calcul prin elemente finite, în lucrarea [20] zona superioară a femurului s-a discretizat ca în figura 4, considerînd valori diferite ale constantelor elastice pentru epifiza dură (elementele

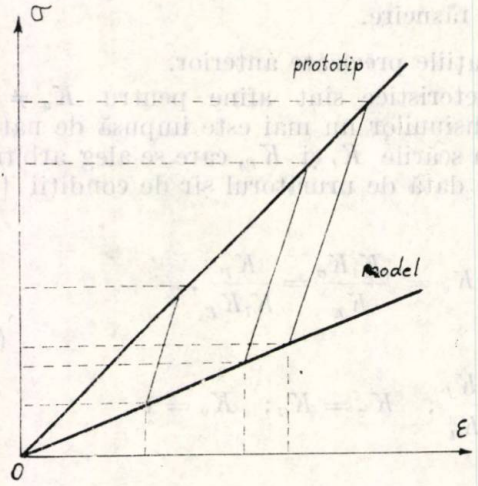


Fig. 3

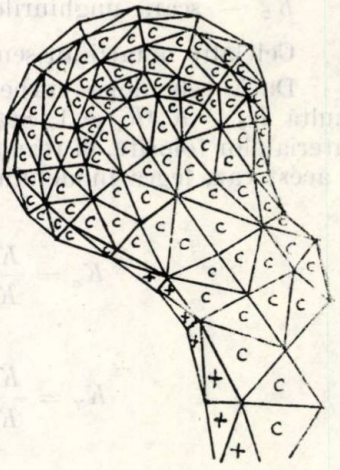


Fig. 4

notate cu +), pentru epifiza spongioasă (elementele notate cu c) și pentru cartilaj (elementele albe).

c. Modelarea încărcărilor sistemelor biomecanice trebuie să aibă în vedere o multitudine de factori și condiții. Pentru problemele statice, în care sarcinile exterioare sînt relativ mari, se poate neglija efectul greutății proprii a osului, mușchilor și sîngelui, în timp ce în alte cazuri greutatea proprie este o componentă principală a încărcării (de exemplu, la modelarea coloanei vertebrale).

Cel mai simplu mod de realizare a încărcării este considerarea forței rezultante pe care articulația o transmite osului respectiv.

d. Variabilitatea naturală a geometriei și a proprietăților mecanice ale sistemului osteo-articular, de la individ la individ, funcție de o multitudine de factori, ca : vîrsta, sexul, talia, profesia, starea fiziologică momentană, condițiile de mediu.

O consecință directă a acestui fapt este că cercetările experimentale trebuie efectuate pe un număr mare de modele individuale, iar rezultatele obținute este necesar să fie selectate și prelucrate statistic, în vederea formulării unor concluzii general valabile, corecte și cu un nivel de încredere satisfăcător.

e. Deplasările mari care apar în unele componente ale sistemului osteo-articular — de exemplu, în coloana vertebrală — cînd acestea sînt supuse unor sisteme de sarcini date, necesită luarea în considerare a unor condiții speciale de modelare [15].

Consecința cea mai importantă a producerii unor deplasări mari este neliniaritatea geometrică. Dependența sarcină-deplasare este neliniară chiar dacă materialul este liniar elastic, adică ascultă de legea lui Hooke.

Modelele experimentale cît și cele de calcul ale sistemelor cu deplasări mari devin mai complicate și de aceea se recurge la serviciile calculatoarelor numerice [7], [18].

f. Modelarea dinamică a sistemului osteo-articular este necesară din următoarele considerente:

— unele acțiuni și mișcări fiziologic normale sînt în esență dinamice: mersul, alergarea, săritura;

— împrejurările în care se produc fracturi ale oaselor sînt în majoritatea cazurilor dinamice: cădere, lunecare, impact;

— necesitatea perfecționării protezelor și a implantelor metalice utilizate în chirurgia sistemului osteo-articular;

— necesitatea cunoașterii condițiilor în care se produc fracturi la solicitări prin șoc, în vederea perfecționării mijloacelor de protecție a muncii, a perfecționării mijloacelor de transport etc..

Un model dinamic trebuie să asigure o bună aproximare a greutății totale și a distribuției acesteia în toate punctele modelului, precum și a proprietăților de transmisibilitate și amortizare pentru os, mușchi, ligamente, sînge, piele.

Unele dintre procesele dinamice și efectele anatomice distructive ale acestora pot fi studiate prin încercări pe animale sau pe manechine. Totuși, datele obținute trebuie supuse unei analize critice severe, pentru a se determina măsura în care pot fi aplicate la oameni.

g. Mobilitatea mare a organismului uman duce la necesitatea modelării sistemului osteo-articular ca un mecanism cu un număr foarte mare de grade de libertate. În lucrarea [13], de exemplu, se prezintă un model cinematic al organismului, elaborat în vederea studiului mersului și a solicitărilor ce se produc în diverse oase și articulații (fig. 5).

Sistemul de ecuații diferențiale obținut poate fi integrat numai cu ajutorul calculatorului electronic, datorită complexității și volumului calculelor necesare.

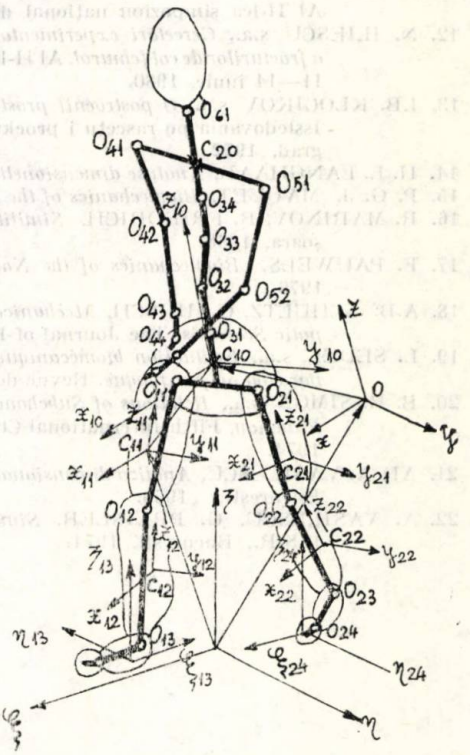


Fig. 5

Primită la redacție la 14 iunie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. D. ANTONESCO, M. RADEȘ, *Contributions à l'étude photoélastique du genou arthrosique*, Acta orthop., belg., suppl I, 1975.
2. D. ANTONESCU, I. CONSTANTINESCU, *Determinări ale variației tensiunilor din ligamentele genunchiului în mișcare*, Primul simpozion național de tensometrie, Iași, 25—28 apr., 1977.
3. D. ANTONESCU ș.a., *Cercetări asupra osteotomiei parafocale Paltrinieri în pseudartrozele de gambă*, Al II-lea simpozion național de tensometrie, Cluj-Napoca, 11—14 iunie, 1980.
4. P. BLAIMONT ș.a., *Réactions du tissu osseux aux contraintes de visage*, Acta orthop. belg., **39**, 2 (1973).
5. I. CONSTANTINESCU, D. ANTONESCU, *Unele aspecte experimentale ale cercetărilor privind biomecanica genunchiului și antebrațului*, St. cerc. mec. apl., **36**, 1(1977).
6. I. CONSTANTINESCU ș.a., *Măsuri tensometrice pentru determinarea eforturilor în oasele antebrațului*, Primul simpozion național de tensometrie, Iași, 25—28 apr., 1977.
7. I. CONSTANTINESCU ș.a., *Model structural plan al coloanei vertebrale*, Al II-lea simposion național de tensometrie, Cluj-Napoca, 11—14 iunie, 1980.
8. A. DENISCHI ș.a., *Posibilități actuale de cercetare în studiul mecanismului de producere al fracturilor de astragal*, Primul simpozion național de tensometrie, Iași, 25—28 apr., 1977.
9. N. DIACONESCU ș.a., *Coloana vertebrală*, Editura medicală, București, 1977.
10. Z. DYLAG ș.a., *Some Biomechanical Aspect of the Hip Joint. A Photoelastic Study*, Fifth International Conference on Experimental Stress Analysis, Udine, 1974.
11. E. GHERMAN ș.a., *Studiul fotoelastic pe model spațial al endoprotezei de șold cu cap mobil*, Al II-lea simpozion național de tensometrie, Cluj-Napoca, 11—14 iunie, 1980.
12. N. ILIESCU ș.a., *Cercetări experimentale comparative asupra unor tipuri de osteosinteză a fracturilor de col femural*, Al II-lea simpozion național de tensometrie, Cluj-Napoca, 11—14 iunie, 1980.
13. I.B. KLOCIKOV ș.a., *O postroenii prostranstvennoi mehaniceskoi modeli dvijenia celoveka*, Issledovania po rascetu i proektirovaniiu soorujenii, Sbornik trudov, 74, Leningrad, 1972.
14. H. L. LANGHAAR, *Analyse dimensionelle et théorie des maquettes*, Dunod, Paris, 1956.
15. P. G. J. MAQUET, *Biomechanics of the Knee*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
16. R. MARINOV, R. FRIEDRICH, *Similitudinea și modelul în construcții*, Inst. polit. Timișoara, 1968.
17. F. PAUWELS, *Biomechanics of the Normal and Diseased Hip*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
18. A.B. SCHULTZ, C. HIRSCH, *Mechanical Analysis of Harrington Rod Correction of Idiopatic Scoliosis*, The Journal of Bone and Joint Surgery, **55**—**A**, 5 (1973).
19. L. SEDEL, ș.a., *Evaluation biomécanique comparée du col produit lors des osthéosynthèses par clou ou par plaque*. Revue de Chirurgie Orthopédique, **65**, 3 (1979).
20. B. R. SIMON ș.a., *Relations of Subchondral Bone and Articular Cartilage Stresses to Joint Function*, Fifth International Conference on Experimental Stress Analysis, Udine, 1974.
21. AL. A. VASILESCU, *Analiza dimensională și teoria similitudinii*, Editura Academiei R.S.R, București, 1969.
22. A. VASILESCU, G. PRAISLER, *Similitudinea sistemelor elastice*, Editura Academiei R.S.R., București, 1974.

MODEL DE ELEMENT FINIT ŞI PROGRAM DE CALCUL PENTRU ANALIZA STABILITĂŢII PLĂCILOR PLANE

de LUCIA MIHĂILESCU

Institutul de construcţii Bucureşti

Ca formă geometrică, elementul finit este dreptunghiular. Starea plană de tensiune este determinată considerîndu-se pentru deplasările tangenţiale expresii de forma $a + bx + cy + dxy$. Încărcările pot fi normale şi/sau tangenţiale, distribuite liniar pe oricare din laturile elementului finit. De asemenea, pot fi introduse şi încărcări concentrate la noduri. Pentru w, deplasarea după normala la placă, se consideră drept funcţie de formă o combinaţie de polinoame Hermite de speţa a doua, modelul de element finit fiind astfel conform din punct de vedere geometric. Matricea de rigiditate este determinată explicit. Matricea de rigiditate tangentă este determinată apoi extinzîndu-se integrarea de tip Gauss.

Programul de calcul este organizat pe structura programelor din generaţia SAP. Se ţine însă seama de repetabilitatea elementelor finite din punct de vedere geometric, ceea ce conduce la o diminuare considerabilă a timpului de calcul. Testările efectuate demonstrează o concordanţă foarte bună cu rezultatele teoretice cunoscute din literatura de specialitate.

1. PROBLEMA PLANĂ. MATRICEA DE RIGIDITATE. VECTORUL ÎNCĂRCĂRII

Elementul finit este dreptunghiular (fig. 1). Materialul se consideră omogen şi izotrop, constantele tehnice fiind E şi μ. Laturile elementului finit sînt paralele cu axele sistemului general xOy.

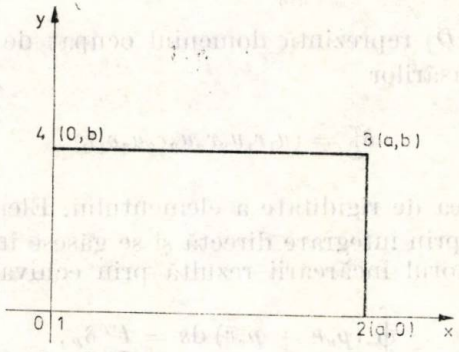


Fig. 1.

În cele ce urmează se va lucra cu coordonate adimensionale

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b, \tag{1.1}$$

unde a şi b sînt laturile elementului finit.

Pentru deplasările u şi v, din planul plăcii, se consideră următoarele expresii :

$$\begin{aligned} u &= (1-\xi)(1-\eta)\,u_1 + \xi(1-\eta)u_2 + \xi\eta u_3 + \eta(1-\xi)\,u_4, \\ v &= (1-\xi)\,(1-\eta)\,v_1 + \xi(1-\eta)\,v_2 + \xi\eta v_3 + \eta(1-\xi)\,v_4. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ţinînd seama de relaţiile geometrice,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1.3}$$

şi de legea constitutivă,

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{H} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}, \tag{1.4}$$

unde

$$\varepsilon^T = (\varepsilon_x \varepsilon_y \gamma_{xy}), \tag{1.5}$$

$$\sigma^T = (\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}), \tag{1.6}$$

$$\underset{\sim}{H} = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

energia internă de deformaţie a unui element finit devine

$$E_{iD}^P = \frac{1}{2} \iint\limits_{(D)} \underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{\sigma} \, \mathrm{d}A = \frac{1}{2} \underset{\sim}{\delta}_P^T \underset{\sim}{K}_P \underset{\sim}{\delta}_P. \tag{1.8}$$

În expresia (1.8) (D) reprezintă domeniul ocupat de elementul finit, $\underset{\sim}{\delta}_P$ este vectorul deplasărilor

$$\underset{\sim}{\delta}_P^T = (u_1 v_1 u_2 v_2 u_3 v_3 u_4 v_4), \tag{1.9}$$

iar $\underset{\sim}{K}_P$ este matricea de rigiditate a elementului. Elementele acestei matrice se calculează prin integrare directă şi se găsesc într-o serie de lucrări [1], [2], [3]. Vectorul încărcării rezultă prin echivalarea

$$\oint (p_u u + p_v v) \, \mathrm{d}s = \underset{\sim}{F}^T \underset{\sim}{\delta}_P, \tag{1.10}$$

unde p_u, p_v sînt încărcările distribuite după direcţiile x şi y, iar integrala curbilinie se referă la conturul elementului finit. În programul de calcul s-au considerat numai încărcări distribuite liniare. De exemplu, dacă latura 2—3 (fig. 1) are încărcarea p după legea

$$p = (1 - \eta) p_2 + \eta p_3, \tag{1.11}$$

ţinînd seama de expresia lui u din (1.2), rezultă următoarele încărcări la nodurile 2 şi 3

$$F_{2x} = \frac{1}{3} p_2 + \frac{1}{6} p_3, \quad F_{3x} = \frac{1}{6} p_2 + \frac{1}{3} p_3. \tag{1.12}$$

Se menționează că încărcările pot fi atît normale, cît și tangențiale, singura restricție fiind ca ele să varieze liniar.

2. PROBLEMA DE ÎNCOVOIERE. MATRICEA DE RIGIDITATE

Pentru elementul finit dreptunghiular (fig. 1), ținînd seama de transformarea (1.1), rezultă, în urma unor calcule elementare, următoarea expresie pentru energia de deformație:

$$E_{id}^{i} = \frac{1}{2}\,\frac{Eh}{1-\mu^2}\,\frac{h^2}{12ab}\int_0^1\int_0^1 \underset{\sim}{\varkappa}^T \cdot H^* \underset{\sim}{\varkappa}\; \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta, \tag{2.1}$$

unde

h este grosimea constantă a plăcii plane,

$$\underset{\sim}{\varkappa}^T = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \xi\, \partial \eta} \right) \tag{2.2}$$

$$H^* = \begin{pmatrix} b^2/a^2 & \mu & 0 \\ \mu & a^2/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\mu) \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Notînd

$$W = w/h, \tag{2.4}$$

$$\underset{\sim}{W}^T = (W_1 W_{1,x} W_{1,y} \;\vdots\; W_{2,x} W_{2,y}$$

$$W_3 W_{3,x} W_{3,y} \;\vdots\; W_4 W_{4,x} W_{4,y}), \tag{2.5}$$

$$\left(W_{1,x} = \frac{\partial W_1}{\partial x}\bigg|_1, \quad W_{1,y} = \frac{\partial W}{\partial y}\bigg|_1 \text{ etc.} \right)$$

și considerînd pentru deplasarea adimensională W următoarea funcție de formă:

$$\begin{aligned} W = {} & W_1 H_{00}(\xi)\, H_{00}(\eta) + W_{1,\xi} H_{01}(\xi)\, H_{00}(\eta) + W_{1,\eta} H_{00}(\xi)\, H_{01}(\eta) + \\ & + W_2 H_{10}(\xi) H_{00}(\eta) + W_{2,\xi} H_{11}(\xi) H_{00}(\eta) + W_{2,\eta} H_{10}(\xi)\, H_{01}(\eta) + \\ & + W_3 H_{10}(\xi)\, H_{10}(\eta) + W_{3,\xi} H_{11}(\xi)\, H_{10}(\eta) + W_{3,\eta} H_{10}(\xi)\, H_{11}(\eta) + \\ & + W_4 H_{00}(\xi) H_{10}(\eta) + W_{1,\xi} H_{10}(\xi)\, H_{10}(\eta) + W_{4,\eta} H_{00}(\xi)\, H_{11}(\eta), \end{aligned} \tag{2.6}$$

unde

$$W_{1,\xi} = \frac{\partial W}{\partial \xi}\bigg|_1, \quad W_{1,\eta} = \frac{\partial W}{\partial \eta}\bigg|_1 \text{ etc.},$$

iar $H_{00}, H_{01}, H_{10}, H_{11}$ sînt polinoame Hermite de speța a doua [1], [2], relația (2.1) se poate scrie sub forma

$$E_{id}^{i} = \frac{1}{2} \underset{\sim}{W}^T \underset{\sim}{K}_i \underset{\sim}{W}. \tag{2.7}$$

În relația (2.7), $\underset{\sim}{K}_i$ reprezintă matricea de rigiditate pentru problema de încovoiere a plăcii și are expresia

$$\underset{\sim}{K}_i = \frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{h^2}{12ab} \underset{\sim}{d}^T [c_{11}\underset{\sim}{k}^{11} + c_{12}(\underset{\sim}{k}^{12} + \underset{\sim}{k}^{21}) + c_{22}\underset{\sim}{k}^{22} + c_{33}\underset{\sim}{k}^{33}) \underset{\sim}{d} \tag{2.8}$$

cu

$$c_{11} = b^2/a^2, \quad c_{22} = a^2/b^2, \quad c_{12} = \mu, \quad c_{33} = 2(1-\mu), \tag{2.9}$$

$\underset{\sim}{d}$ este matricea diagonală $(1, a, b; 1, a, b; 1, a, b; 1, a, b)$.
Matricele $\underset{\sim}{k}^{ij}(i, j = 1,2)$ sînt obținute prin integrare directă și sînt invariante în raport cu geometria elementului finit. Se menționează că matricele $\underset{\sim}{k}^{ij}$ sînt simetrice, iar $k^{12} = k^{21\,T}$.

3. MATRICEA DE RIGIDITATE TANGENTĂ

Datorită încărcărilor din planul plăcii, în domeniul ocupat de elementul finit apar tensiunile σ_x, σ_y, τ_{xy}. Energia suplimentară de deformație datorată acestor tensiuni are forma [1], [2]:

$$E_{id}^{s1} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\iint_{(D)} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \; \frac{\partial W}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial x} \\ \dfrac{\partial W}{\partial y} \end{pmatrix} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}z. \tag{3.1}$$

Folosind (1.1) și (2.4), relația (3.1) se poate scrie sub forma

$$E_{id}^{s1} = \frac{1}{2} \frac{Eh^3}{1-\mu^2} \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \; \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial W}{\partial \eta} \end{pmatrix} \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta, \tag{3.2}$$

unde mărimile α, β, γ, datorită dezvoltărilor (1.2), sînt

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta, \\ \beta &= \beta_0 + \beta_1\xi + \beta_2\eta, \\ \gamma &= \gamma_0 + \gamma_1\xi + \gamma_2\eta, \end{aligned} \tag{3.3}$$

iar coeficienții α_k, β_k, $\gamma_k (k = 0, 1, 2)$ sînt combinații liniare de deplasările u_j, v_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ ale nodurilor elementului finit.

Cu notațiile

$$\lambda_1 = a/b, \quad \lambda_2 = b/a, \tag{3.4}$$

$$U_k = u_k/a, \quad V_k = v_k/b \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

acești coeficienți au expresiile

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \lambda_2[(U_2 - U_1) + \mu(V_4 - V_1)],\\
\alpha_1 &= \mu\lambda_2[V_1 - V_2 + V_3 - V_4],\\
\alpha_2 &= \lambda_2[U_1 - U_2 + U_3 - U_4),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\beta_0 &= \lambda_1[\mu(U_2 - U_1) + (V_4 - V_1)],\\
\beta_1 &= \lambda_1[V_1 - V_2 + V_3 - V_4],\\
\beta_2 &= \mu\lambda_1[U_1 - U_2 + U_3 - U_4],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\gamma_0 &= \mu^*[\lambda_1(U_4 - U_1) + \lambda_2(V_2 - V_1),\\
\gamma_1 &= \mu^*\lambda_1[U_1 - U_2 + U_3 - U_4],\\
\gamma_2 &= \mu^*\lambda_2[V_1 - V_2 + V_3 - V_4],
\end{aligned} \tag{3.5}$$

unde $\mu^* = (1 - \mu)/2$.

Ținînd seama de expresia (2.6) pentru W, expresia energiei suplimentare de deformație se scrie sub forma

$$E_{id}^{si} = \frac{1}{2} \underset{\sim}{W}^T \cdot \underset{\sim}{k_G} \cdot \underset{\sim}{W}, \tag{3.6}$$

unde $\underset{\sim}{k_G}$ este matricea de rigiditate tangentă și are expresia

$$\underset{\sim}{k_G} = \frac{Eh}{1 - \mu^2} \underset{\sim}{d}^T \left(\sum_j^{0,2} (\alpha_j A_j + \beta_j B_j + \gamma_j C_j) \right) \underset{\sim}{d}. \tag{3.7}$$

Matricele A_j, B_j, C_j sînt obținute prin integrarea directă a relației (3.2) și sînt invariante în raport cu geometria elementului finit.

4. PROBLEMA DE STABILITATE. ALGORITMUL PENTRU DETERMINAREA FACTORILOR CRITICI DE ÎNCĂRCARE

Considerînd că încărcarea din planul plăcii variază liniar cu parametrul λ, bifurcarea echilibrului se produce pentru acele valori ale lui λ pentru care

$$\det | \underset{\sim}{k_i} + \lambda \underset{\sim}{k_G} | = 0. \tag{4.1}$$

Pentru problemele practice interesează valoarea minimă a parametrului λ. Se menționează că, în urma eliminării rototranslației de corp rigid, matricea k_i este pozitiv definită, pe cînd matricea k_G nu este în general pozitiv definită (valorile sale proprii pot fi atît pozitive, cît negative). Notînd $k_G^* = -k_G$, problema de stabilitate se reduce la o problemă de valori proprii,

$$\underset{\sim}{k_i}\underset{\sim}{z} = \lambda \underset{\sim}{k_G^*}\underset{\sim}{z}. \tag{4.2}$$

În general, există algoritmi eficienți pentru problema de valori proprii

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{z} = \lambda \underset{\sim}{B}\underset{\sim}{z}, \tag{4.3}$$

unde ambele matrice $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$ sînt simetrice, pozitiv definite, au structura de bandă, iar ordinul lor este destul de mare [4].

Pentru (4.3) valorile proprii se determină în ordinea lor crescătoare. Considerînd că factorii critici de încărcare sînt pozitivi (cazul curent în practică), problema descrisă de (4.2) se poate reduce la problema (4.3) prin următorul algoritm [4], [5]:

a) Se notează $\nu = 1/\lambda$; determinarea lui λ_{min} se reduce în acest fel la determinarea ν_{max}; problema (4.2) devine

$$\underset{\sim}{k_G^*} \cdot \underset{\sim}{z} = \nu \cdot \underset{\sim}{k_i} \cdot \underset{\sim}{z}. \tag{4.4}$$

b) Se alege o valoare $\varkappa$ astfel încît

$$\nu_{max} = \varkappa - t_{min}. \tag{4.5}$$

c) Problema (4.4) se reduce la

$$(\varkappa \underset{\sim}{k_i} - \underset{\sim}{k_G^*})\underset{\sim}{z} = t \cdot \underset{\sim}{k_i} \cdot z, \tag{4.6}$$

unde matricele $(\varkappa \underset{\sim}{k_i} - \underset{\sim}{k_G^*})$ și $\underset{\sim}{k_i}$ sînt pozitiv definite, deci se pot aplica algoritmii cunoscuți.

d) Determinîndu-se t_{min} din (4.6), rezultă

$$\nu_{min} = 1/(\varkappa - t_{min}). \tag{4.7}$$

Problema principală constă în a alege valoarea $\varkappa$. Alegerea se poate face în modul următor:

1) Se presupune $\varkappa = \|\underset{\sim}{k_G^*}\|/\bar{\lambda}_{min}$. (4.8)

unde $\|k_G^*\|$ reprezintă o normă oarecare a matricei $\underset{\sim}{k_G^*}$ iar $\bar{\lambda}_{min}$ corespunde problemei

$$\underset{\sim}{k_i}\underset{\sim}{\chi} = \bar{\lambda}_{min} \cdot \underset{\sim}{\chi}. \tag{4.9}$$

2) Se factorizează matricea $(\varkappa \underset{\sim}{k_i} - \underset{\sim}{k_G^*})$.

3) Dacă în urma factorizării nu toți pivoții sînt pozitivi, se mărește valoarea lui $\varkappa$ și se reia pasul 2 pînă cînd toți pivoții sînt pozitivi.

5. ORGANIZAREA PROGRAMULUI DE CALCUL

Programul de calcul denumit STABIL este organizat în trei module de calcul, denumite generic FAZA 1, FAZA 2, FAZA 3.

Modulul FAZA 1 execută următoarele:

— citește și stochează datele nodale și datele privind condițiile de margine aferente problemei plane și a problemei de încovoiere;

— rezolvă complet problema plană (tensiuni, deplasări nodale) pentru încărcarea dată.

Modulul FAZA 2 are ca rol următoarele:

— calculează matricea de rigiditate specifică problemei de încovoiere;

— cu ajutorul datelor obținute în FAZA 1 calculează matricea de rigiditate tangentă.

Modulul FAZA 3 rezolvă efectiv problema de stabilitate în sensul determinării factorilor critici de încărcare și a formelor critice de pierdere a stabilității.

6. TESTE. CONCLUZII

Programul STABIL a fost aplicat pentru determinarea factorilor critici de încărcare la o serie întreagă de teste.

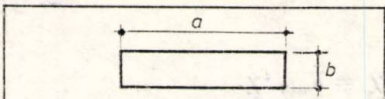
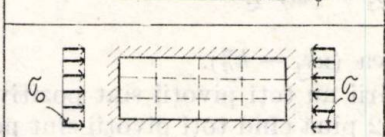
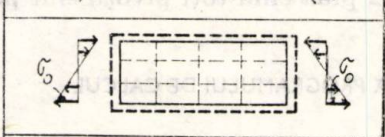
Se prezintă în continuare cîteva teste semnificative, la care se cunosc, [6], valorile factorilor critici, determinate analitic.

În tabelul 1, coeficienții k_A și k_P reprezintă coeficientul $k = \sigma_{cr} \frac{b^2 h}{\pi^2 D}$ calculați analitic și cu ajutorul programului STABIL pentru raportul $\frac{a}{b} = 2$.

Se poate remarca o bună concordanță între rezultatele analitice și cele obținute cu ajutorul programului de calcul.

Primită la redacție la 9 august 1982

Tabelul 1

	k_A	k_P
	7,88	7,46
	25,60	22,84
	48,70	45,20

BIBLIOGRAFIE

1. C. MASSONET, G. DEPREZ, R. MAQUOI și alții, *Calculul structurilor la calculatoare electronice*, București, Edit. tehnică, 1974.
2. S.P. TIMOȘENKO, J. M. GERE, *Teoria stabilității elastice*, București, Edit. tehnică, 1967.
3. O. C. ZENKIEWICZ, *The Finite Element Method*, Ed. 3, McGraw-Hill-Book Company—1977.
4. K. J. BATHE, *Solution Methods for Large Generalized Eingevalue Problems in Structural Engineering*, Structural Engineering Laboratory, University of California, Berckley, California, nov. 1971.
5. SAP V2, *A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Liniar Systems*, User Manual, oct. 1977.
6. *Procinosti, Ustoicirosti Kolebania*, Tom 3, 1968, pag. 91—126.

CALCULUL DE REZISTENȚĂ AL UNUI ROTOR DE SUFLANTĂ CU AJUTORUL METODEI ELEMENTELOR FINITE

de ADALBERT NAHLIK, ALEXANDRU PASTIA
I.C.S.I.T.E.E.M.R., București

În lucrare se expune calculul de rezistență al unui rotor de suflantă cu disc de acoperire și palete neradiale, cu ajutorul metodei elementelor finite, utilizînd elemente spațiale cu 48 grade de libertate. Se tratează un singur sector de rotor aferent unei palete, fundamentînd condițiile la limită corespunzătoare. Metoda poate fi folosită la calculul oricărui tip de structură în rotație dacă geometria și încărcarea lor prezintă simetrie.

INTRODUCERE

La calculul structurilor mecanice complicate apare tot mai mult necesitatea unor metode de calcul exacte și rapide. În ultimele decenii metoda elementelor finite, ca metodă universală de rezolvare a structurilor (grinzi cu zăbrele, cadre spațiale, corpuri plane, spațiale, axial-simetrice, învelișuri etc.), și-a dovedit pe deplin eficiența ei deosebită. Avantajul fundamental al metodei constă în faptul că sistemul de ecuații algebrice care descrie structura este liniar, se pretează la o tratare matriceală, în consecință la o rezolvare cu calculatoare numerice moderne.

În cadrul institutului nostru, de cîțiva ani există o preocupare susținută în vederea lărgirii domeniului de aplicație a metodei elementelor finite la rezolvarea problemelor curente de profil : calculul construcțiilor metalice, al carcaselor, rotoarelor și paletelor de turbină cu abur etc. În aceste preocupări se încadrează și calculul unui rotor de suflantă cu disc de acoperire și palete neradiale, prezentat în aricolul de față, împreună cu fundamentarea schemei de calcul și analiza rezultatelor obținute.

IPOTEZE DE CALCUL

În literatură sînt descrise soluții la care întreaga structură spațială a unui rotor de suflantă sau pompă a fost tratată ca un corp axial- simetric. Această ipoteză simplificatoare poate fi acceptată cu o oarecare încredere numai în cazul unor palete radiale dar în acest caz rezultatele privind distribuția tensiunilor în corpul paletei sînt inexacte din cauza schemei de echivalare a paletelor cu două inele axial-simetrice.

La rotoarele cu palete neradiale și cu disc de acoperire — cazul tratat de noi — echivalarea structurii cu un corp axial-simetric conduce la erori inadmisibile, considerăm deci acest mod de abordare drept inacceptabil.

Problema de bază care s-a pus la tratarea rotorului cu elemente finite spațiale a fost volumul excesiv de mare al calculelor și al costului de calculator în cazul discretizării întregului rotor. Din această cauză s-a căutat fundamentarea teoretică a tratării rotorului numai în limitele unui singur sector, aferent unei palete.

T. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 3, 1983, P. 307–318

Presupunem că la o anumită rază discul este format dintr-un corp inelar, care, după desfășurarea în linie dreaptă, reprezintă o grindă continuă, de secțiune constantă (V fig. 1). Pasul dintre reazeme, prin analogie

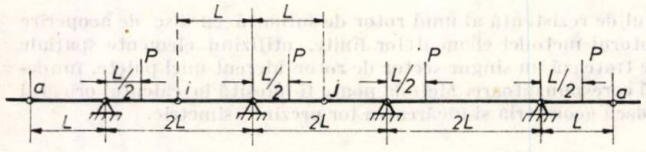


Fig. 1. — Schema unei grinzi continui cu geometrie și încărcare periodică.

reflectă pasul de așezare a paletelor, iar sarcina concentrată P reprezintă în mod convențional sarcina pe acest sector. Oriunde am lua punctele i și j (care delimitează o porțiune de grindă de lungime 2L), condiția de continuitate a grinzii poate fi exprimată prin egalitatea deplasărilor (translații și rotații), corespunzătoare în punctele i și j.

Pentru a studia posibilitățile matematice de a formula aceste condiții s-a ales schema de calculul din figura 2. Avem aici două elemente finite liniare cu nodurile *1*, *2* respectiv *2*, *3*. Scriind matricele de rigiditate

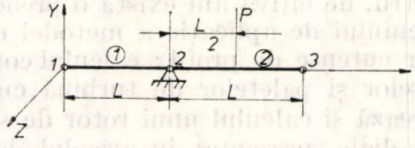


Fig. 2. — Schema de calcul cu elemente finite al unui tronson din grinda continuă din figura 1.

pentru cele două elemente (vezi [1]), asamblîndu-le după regulile cunoscute, eliminînd rîndurile și coloanele cu deplasări nule, obținem următorul sistem de ecuații sub formă matriceală :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{PL^4}{8EJ} \\ \dfrac{PL^3}{2EJ} \\ -\dfrac{PL^4}{8EJ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6L & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & 2L^2 & 0 & 0 \\ 6L & 2L^2 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

unde v reprezintă deplasările după axa OY, θ rotațiile nodurilor în jurul axei OZ, localizate prin indicii corespunzători. Impunem condiția de continuitate a grinzii prin $v_1 = v_3$ și $\theta_1 = \theta_3$, Pentru aceasta coloanele și rîndurile 1 și 2 ale matricei simetrice asamblate se adună la coloanele

și rîndurile 4 și 5, iar rîndurile și coloanele 1 și 2 se anulează. Drept rezultat se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{bmatrix} \frac{PL^4}{8EJ} \\ \frac{PL^3}{2EJ} \\ \frac{PL^2}{8EJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8L^2 & 0 & 4L^2 \\ 0 & 24 & 0 \\ 4L^2 & 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \tag{1a}$$

și următoarele deplasări:

$$v_1 = v_3 = \frac{PL^3}{48\,EJ}, \quad \theta_2 = \frac{PL^2}{32\,EJ}, \quad \theta_1 = \theta_3 = -\frac{PL^2}{32\,EJ}.$$

Înlocuind aceste valori în matricele de rigiditate ale fiecărui element, obținem eforturile din noduri, la care se adună algebric eforturile de reacție date de sarcina exterioară P. În final, eforturile din nodurile *2* și *3* ale sistemului vor fi:

$$\begin{vmatrix} P_2 \\ Q_2 \\ M_2 \\ P_3 \\ Q_3 \\ M_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -3P/4 \\ -3PL/16 \\ 0 \\ -P/4 \\ -PL/16 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

În figura 3 s-a reprezentat grinda deformată și eforturile în noduri pentru cazul $P = -1000$ daN, $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm², $L = 100$ cm, $J = 490{,}9$ cm⁴, condiția impusă inițial fiind respectată: $v_1 = v_3$ și $\theta_1 = \theta_3$.

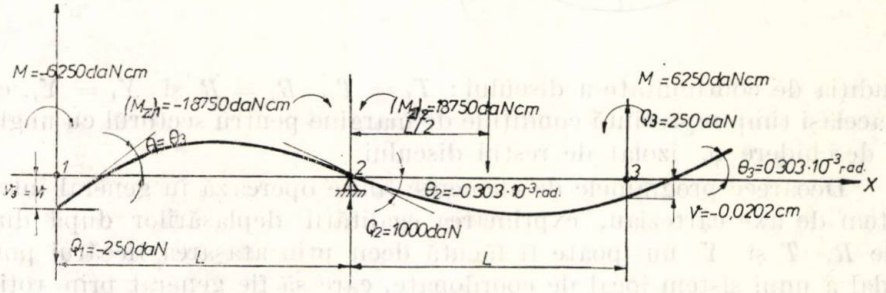


Fig. 3. — Schema eforturilor și a deplasărilor în nodurile unei grinzi continui.

Metoda expusă — pe lîngă faptul că demonstrerză suficiența introducerii egalității deplasărilor, ca condiție la limită — poate fi utilizată cu succes la calculul grinzilor continue, la care este respectată condiția periodicității geometriei (secțiune constantă, distanța egală dintre reazeme) și a sarcinilor.

PROBLEME LEGATE DE ROTIREA SISTEMULUI DE COORDONATE

Folosindu-ne de concluziile anterioare, vom considera că din discul rotoric din figura 4 cu patru palete neradiale, detașăm un sector cu unghiul de deschidere $\varphi = 360/4 = 90°$, care va conține în întregime o paletă. Atașăm rotorului un sistem de axe cartezian $OXYZ$, astfel încît axa de rotație să coincidă cu axa OY. În cazul unei simetrii a încărcării rotorului, de exemplu prin forțe centrifuge, sectorul delimitat prin planele I—I și II—II poate fi caracterizat prin următoarea proprietate: toate punctele cuprinse în aceste plane, situate pe același arc de cerc de rază r și la aceeași adîncime axială (coordonată Y) au deplasări radiale, tangențiale și axiale egale. Această condiție reflectă faptul că discul în realitate este un corp continuu și că în planul I — I (punctul i) nu pot exista deplasări diferite de acelea din planul II — II (punctul j). Rezultă astfel

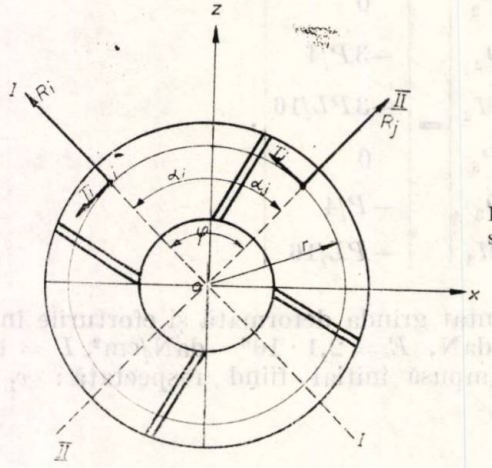


Fig. 4. — Schema deplasărilor la un disc cu patru palete neradiale.

condiția de continuitate a discului: $T_i = T_j$, $R_i = R_j$ și $Y_i = Y_j$, care în același timp reprezintă condițiile de margine pentru sectorul cu unghiul de deschidere φ, izolat de restul discului.

Deoarece programele de elemente finite operează în general într-un sistem de axe cartezian, exprimarea egalității deplasărilor după direcțiile R, T și Y nu poate fi făcută decît prin atașarea fiecărui punct nodal a unui sistem local de coordonate, care să fie generat prin rotirea planului ZOX în jurul axei OY cu unghiul α.

Expresia matriceală a acestei rotații este:

$$[\delta_i] = \begin{bmatrix} u_i \\ c_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i & 0 & \sin\alpha_i \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha_i & 0 & \cos\alpha_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_i \\ Y_i \\ R_i \end{bmatrix} \tag{5}$$

sau prescurtat:

$$[\delta_i] = [R_i] \cdot [\Delta_i], \tag{5 a}$$

unde $[\delta_i]$ este matricea coloană a deplasărilor nodului i în sistemul global de coordonate $OXYZ$, $[\Delta_i]$ este matricea coloană a deplasărilor aceluiași punct în sistemul local de coordonate, iar $[R_i]$ este matricea de rotație. În sistemul global de coordonate, expresia generală a legăturii dintre eforturile aplicate $[S_i]$ și deplasările corespunzătoare $[\delta_i]$ pentru un element finit oarecare este:

$$[S_i] = [K_i] \cdot [\delta_i], \tag{6}$$

unde $[K_i]$ este matricea de rigiditate a elementului.

Introducînd expresia (5a) în (6) obținem:

$$[S_i] = [k_i] \cdot [R_i] \cdot [\Delta_i] = [K_i^r] \cdot [\Delta_i], \tag{6a}$$

unde $[K_i^r] = [K_i] \cdot [R_i]$ este noua expresie a matricei de rigiditate a elementului, care însă nu mai este simetrică. Se poate demonstra că resimetrizarea matricei de rigiditate se poate realiza prin înmulțirea din stînga a expresiei (6a) cu transpusa matricei de rotație. Astfel, în noul sistem local de axe (cilindric), expresia (6a) devine:

$$[R_i^T] \cdot [S_i] = [R_i^T] \cdot [k_i] \cdot [R_i] \cdot [\Delta_i]. \tag{6b}$$

Pentru exemplificare să luăm următorul sistem de ecuații:

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \tag{7}$$

pentru care în sistemul de axe rotit cu unghiul α în jurul axei OY (notînd cu $s = \sin\alpha$ și $c = \cos\alpha$) obținem expresia de forma (6 b):

$$\begin{bmatrix} 11c + s \\ 5 \\ 11s - c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5c^2 + 2s(s - c) & 3c + s & c^2 - s^2 + 3cs \\ 3c + s & 1 & 3s - c \\ c^2 - s^2 + 3cs & 3s - c & 5s^2 + 2c(c + s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \\ Y \\ R \end{bmatrix} \cdot \tag{7a}$$

Observăm că matricea de rigiditate a rămas simetrică și că, de exemplu, pentru $s = 1$, $c = 0$ ($\alpha = 90°$), sistemul de ecuații (7a) are soluțiile $T = 0$, $Y = 2$, $R = 1$, soluții care înlocuite în expresia (5) ne dau $u = 1$, $v = 2$ și $w = 0$, valori care satisfac evident și sistemul de ecuații (7).

MODIFICĂRI ÎN PROGRAMUL DE CALCUL

Pe lîngă implementarea în programul de calcul existent a modificărilor de mai sus, algoritmul de calcul s-a mai completat cu calculul forțelor centrifuge. Forțele centrifuge pentru turația dată au fost calculate pentru fiecare element finit, ele au fost distribuite în nodurile elementelor și adunate în nodurile comune mai multor elemente. Rezultanta astfel obținută în fiecare nod a fost descompusă după direcțiile sistemului global de coordonate. Implementarea s-a făcut astfel încît să nu mai fie necesară pregătirea și introducerea separată a acestor date în program, reducînd în acest fel foarte mult volumul lucrărilor de pregătire.

Programul s-a mai completat cu calculul tensiunilor echivalente. După cum se știe ipoteza de rupere se alege funcție de semnul invariantului

$$I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z. \tag{8}$$

Dacă $I > 0$ se alege ipoteza lucrului mecanic de deformație (ipoteza IV a), dacă $I < 0$ calculul se face în ipoteza lucrului mecanic de deformație, modificator de formă (ipoteza IV b). Problema care se naște este legată de faptul că în rezistența materialelor expresiile tensiunilor echivalente sînt date funcție de cele trei tensiuni principale, or, programul de elemente finite existent calculează tensiunile după cele trei direcții globale. A fost necesară deci stabilirea expresiilor tensiunilor echivalente nu pe baza tensiunilor principale, ci pe baza tensiunilor orientate după direcțiile $OXYZ$.

IPOTEZA DE RUPERE IV-a

Expresia generală a lucrului mecanic specific de deformație este:

$$L_1 = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \\ + \frac{1+\mu}{E}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \tag{9}$$

Starea limită este atinsă atunci cînd acest lucru mecanic specific de deformație într-un punct al corpului atinge valoarea lucrului mecanic specific de deformație corespunzător întinderii sau compresiunii simple. În acest caz.

$$\sigma_{ech} = \sqrt{(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2) - 2\mu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x) + 2(1+\mu)(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)} \leqslant \sigma_a. \tag{10}$$

În situația cînd direcțiile principale coincid cu direcțiile sistemului global ($\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$), obținem expresia cunoscută :

$$\sigma_{ech} = \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leqslant \sigma_a. \qquad (10a)$$

IPOTEZA DE RUPERE IV-b

Această ipoteză, propusă de Huber-Mises, admite că atingerea stării limită într-un punct al corpului are loc atunci cînd lucrul mecanic modificator de formă L_{1f} devine egal cu cel corespunzător întinderii simple. În această ipoteză condiția de rezistență este :

$$L_{1f} \leqslant L_{1fa} = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_a^2. \qquad (11)$$

Avem relația :

$$L_{1f} = L_1 - L_{1v}, \qquad (12)$$

unde L_{1v} este lucrul mecanic specific modificator de volum :

$$L_{1v} = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2). \qquad (13)$$

Introducînd expresiile (9) și (13) în (12), cu ajutorul expresiei (11) obținem :

$$\sigma_{ech} = \sqrt{(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2)-(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)+3(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)} \leqslant \sigma_a, \qquad (14)$$

expresie care, pentru cazul $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ și $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$ și $\sigma_z = \sigma_3$, se transformă în expresia cunoscută :

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_2^3 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}. \qquad (15)$$

La calculul tensiunilor echivalente au fost implementate în programul de elemente finite formulele (10) și (14), alegerea uneia sau alteia făcîndu-se pe baza semnului invariantului I.

TESTAREA MODIFICĂRILOR FĂCUTE ÎN PROGRAM

În scopul verificării corectitudinii formulării modificărilor de program, menționate mai sus, a fost luat în studiu un rotor cu patru palete neradiale, fără disc de acoperire, ca în figura 4. Verificarea a avut trei faze distincte :

a) rezolvarea întregului rotor în sistemul global cartezian ;

b) rezolvarea întregului rotor în sistemul cilindric de coordonate ;

c) rezolvarea unui singur sector de 90°, în sistemul cilindric de coordonate, cu impunerea egalității deplasărilor punctelor nodale situate pe aceeași rază și aceeași adîncime axială.

Compararea rezultatelor a arătat coincidența perfectă a acestora : tensiunile în cele trei cazuri a), b) și c) au fost egale în elementele finite corespunzătoare, deplasările nodurilor în cazurile b) și c) numeric egale și — recalculate în sistemul cartezian — și cu deplasările obținute în cazul a).

CALCULUL UNUI ROTOR DE SUFLANTĂ

Vederea axonometrică a sectorului de rotor studiat, divizat în elemente finite, se vede în figura 5. Elementele finite spațiale au avut cîte 16 noduri, fiecare nod cu trei grade de libertate. Coordonatele nodurilor au fost definite într-un sistem cilindric de coordonate. Secțiunile care delimitează sectorul sînt radiale, iar în zona paletelor ele împart în două părți egale cîmpurile dintre paletele învecinate.

Condițiile de margine alese au fost următoarele :

Toate nodurile pe fața interioară a butucului au avut libertatea de deplasare în direcție radială, un singur nod dintre acestea a fost blocat în direcție tangențială și axială pentru a evita deplasarea structurii ca corp solid.

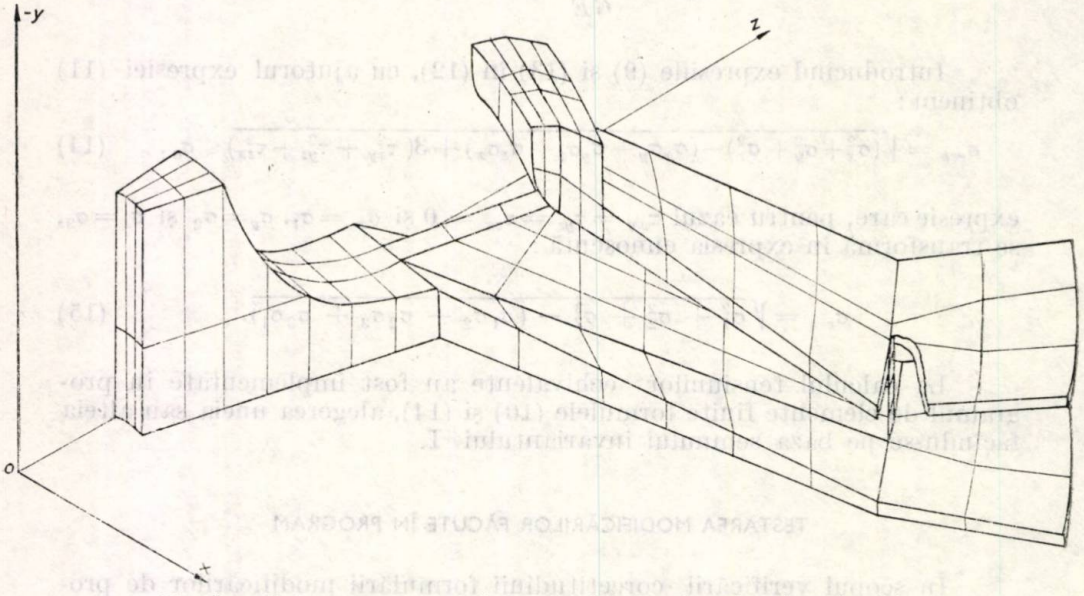


Fig. 5. — Vederea axonometrică a sectorului de rotor aferent unei palete.

Toate nodurile în interiorul sectorului au avut cîte trei grade de libertate (deplasări după cele trei direcții principale).

Pentru toate nodurile cuprinse în suprafețele plane care delimitează sectorul, li s-a acordat libertatea de deplasare după cele trei direcții prin-

cipale, impunîndu-se egalitatea acestora în nodurile corespondente (R = const, Y = const).

Pentru turația de regim și caracteristici de material impuse, programul de calcul a dat următoarele categorii de date :

a) deplasările radiale, tangențiale și axiale ale nodurilor ;

b) cîte șase componente de tensiuni și tensiunea echivalentă corespunzătoare în centrele elementelor, orientate după direcțiile sistemului global de coordonate și/sau în centrul uneia din fețele elementelor, într-un sistem local de coordonate ;

c) tabele separate de tensiuni pentru acele elemente la care tensiunea echivalentă a depășit o anumită valoare considerată ca admisibilă.

Figura 6 arată discretizarea sectorului de rotor într-o secțiune radială precum și forma deformată a aceluiași sector sub acțiunea forțelor centrifuge, reprezentată la o scară foarte mare (4 000 : 1). Analizînd această imagine și restul rezultatelor, se pot face următoarele observații :

— discul de bază prezintă un punct de inflexiune în zona dintre butuc și paletă datorită încovoierii discului în planul *ROY* ;

— în zona canalului divergent discurile de bază și de acoperire se deplasează spre interiorul canalului ;

— din cauză că discul de acoperire și paletele sînt în consolă față de discul de bază, paletele sînt supuse la încovoiere și la o alunecare relativă, astfel încît vîrful paletei este comprimat, baza ei fiind supusă la întindere ;

— deplasarea radială relativ mare a discului de acoperire este avorizată de pragul ei relativ vouminos la intrare în canalul de scurgere și în același timp de rigiditatea la încovoiere relativ mică a paletelor ;

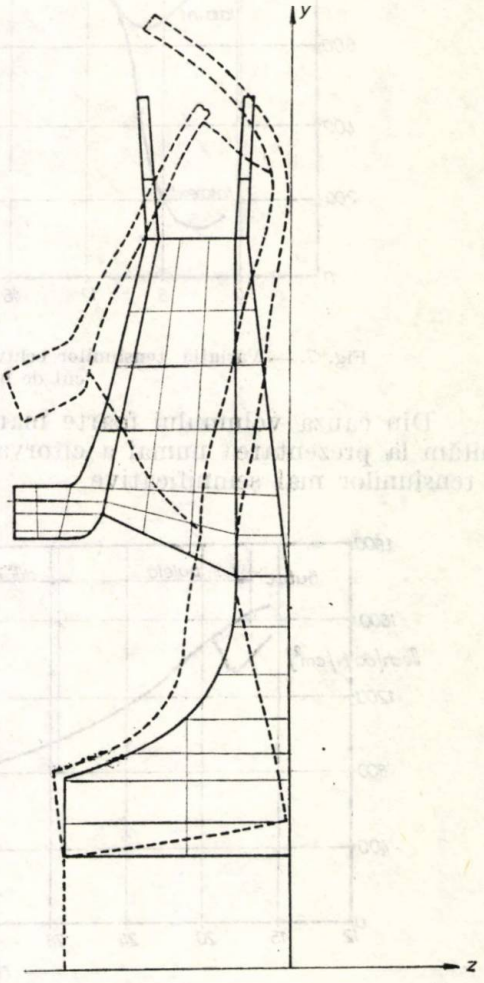


Fig. 6. — Secțiunea radială a rotorului înainte și după deformare sub acțiunea forțelor centrifuge (scara deplasărilor 4000 : 1)

— avînd în vedere poziția centrului de greutate al rotorului, calajul pe arbore începe să slăbească la capătul dinspre discul de bază al butucului ;

— din cauza neradialității paletelor forțele centrifuge dezvoltate de acestea cauzează o răsucire a întregului disc față de butuc, în sensul — T (în planul ZOX, în sensul trigonometric negativ).

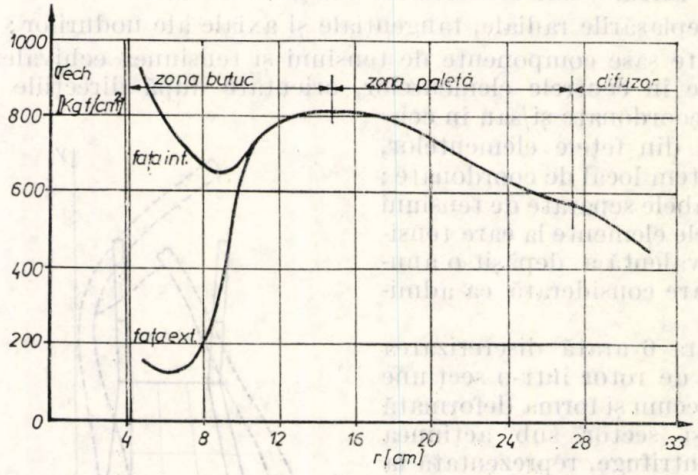


Fig. 7. — Variația tensiunilor echivalente funcție de rază în discul de bază.

Din cauza volumului foarte mare al informațiilor obținute ne limităm la prezentarea numai a cîtorva rezultate și diagrame de variație a tensiunilor mai semnificative.

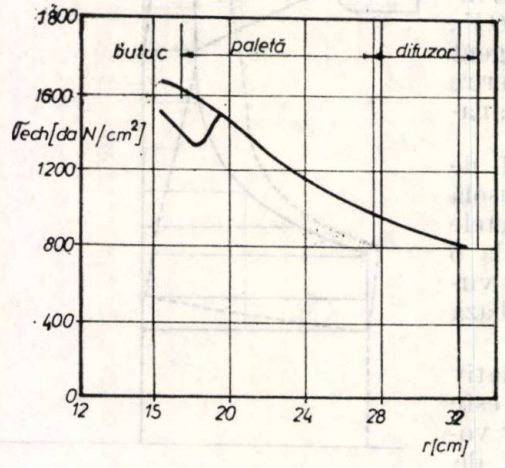


Fig. 8. — Variația tensiunilor echivalente funcție de rază în discul de acoperire.

În zona butucului și a discului de bază, pînă la o anumită rază starea de tensiune este axial- simetrică. Această stare de tensiune, începînd cu această rază este perturbată de prezența paletelor și a discului de acoperire.

Diagramele din figura 7 arată variația tensiunilor echivalente, funcție de rază, pentru discul de bază, în dreptul paletei. Ramura superioară a

curbei reflectă variația tensiunii echivalente pe fața interioară a butucului, iar cea inferioară, pe fața exterioară a acestuia (văzut dinspre canalul de scurgere). Diagrama din figura 8 arată variația lui σ_{ech} în aceleași condiții,

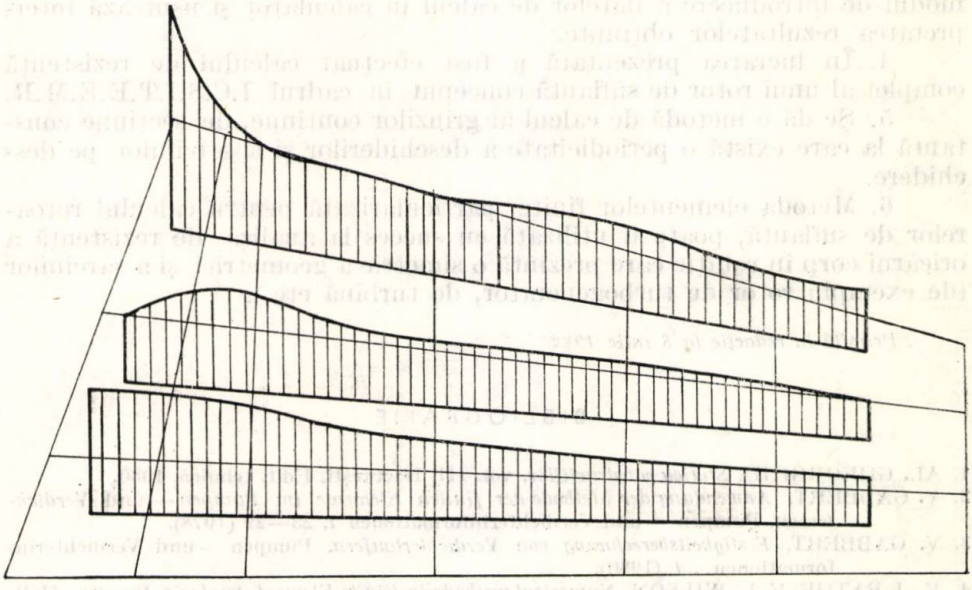


Fig. 9. — Epura tensiunilor echivalente în paleta suflantei (1 cm = 200 daN/cm²).

însă pentru discul de acoperire, iar în figura 9 se văd epurele σ_{ech} în corpul paletei.

Se poate trage concluzia că cele mai solicitate porțiuni de disc sînt acelea care se situează în zona razelor celor mai mici. Solicitarea maximă a discului de acoperire în zona pragului, pe suprafața interioară ($\sigma_{ech\,max}$ = = 1650 daN/cm²) este de 1,76 ori mai mare decît solicitarea maximă a discului de bază în zona butucului, pe suprafața interioară a acestuia ($\sigma_{ech\,max}$ = 933 daN/cm²). Aceste solicitări au pe urmă tendință de descreștere o dată cu creșterea razei.

Analizînd epurele σ_{ech}, reprezentate pentru paletă (fig. 9), se constată că zonele cele mai solicitate se află la intrare în canalul de scurgere. Tensiunea echivalentă maximă are loc în zona de îmbinare cu discul de acoperire, σ_{ech} = 1140 daN/cm². Solicitarea paletei scade însă pe măsura creșterii razei și pe măsura apropierii spre discul de bază.

CONCLUZII

1. Calculul unui rotor de suflantă sau pompă (cu sau fără disc de acoperire, cu palete drepte, curbe, radiale sau neradiale) poate fi simplificat foarte mult prin tratarea unui singur sector de rotor, aferent unei palete.

2. În lucrare se fundamentează și se verifică condițiile la limită necesare și aparatul matematic corespunzător.

3. Facilitățile introduse în programul de elemente finite existent (calculul forțelor centrifuge în noduri, calculul tensiunilor echivalente, tabelarea valorilor care depășesc tensiunea admisibilă etc.) simplifică modul de introducere a datelor de calcul în calculator și ușurează interpretarea rezultatelor obținute.

4. În lucrarea prezentată a fost efectuat calculul de rezistență complet al unui rotor de suflantă conceput în cadrul I.C.S.I.T.E.E.M.R.

5. Se dă o metodă de calcul al grinzilor continue, de secțiune constantă la care există o periodicitate a deschiderilor și a sarcinilor pe deschidere.

6. Metoda elementelor finite, particularizată pentru calculul rotoarelor de suflantă, poate fi utilizată cu succes la analiza de rezistență a oricărui corp în rotație care prezintă o simetrie a geometriei și a sarcinilor (de exemplu rotor de turbogenerator, de turbină etc.).

Primită la redacție la 8 iulie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. AL. GHEORGHIU, *Statica construcțiilor*, vol. III, București, Edit. tehnică, 1980.
2. V. GABBERT, *Anwendung der Methode der finiten Elemente im Pumpen — und Verdichterbau*, Pumpen — und Verdichterinformationen *1*, 23—29 (1978).
3. V. GABBERT, *Festigkeitsberechnung von Verdichterlaufern*, Pumpen — und Verdichterinformationen , *1* (1980).
4. K. J. BATHE, E. L. WILSON, *Numerical methods in Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, New-Jersey, 1976.
5. D. R. MOCANU, *Rezistența materialelor*, București, Edit. tehnică, 1980.

ASUPRA UNOR CONDIȚII DE REGIM HIDRODINAMIC LA PRELUCRAREA PRIN EROZIUNE ELECTROCHIMICĂ

I. SPULBER
Institutul politehnic București

C. SPULBER
Întreprinderea Optică Română, București

Realizarea unor cavități cu unghiuri drepte sau cu rază mică de curbură este o cerință actuală pentru executarea unor matrițe competitive.
O metodă posibilă de influențare și deci de conducere a procesului eroziv, în urma căruia prin electrochimie se obțin muchii dorite, este optimizarea parametrilor hidrodinamici în timpul ultimei faze a finisării. Ținînd seama de influențele pe care acestea (presiunea, debitul și curentul electric) le au asupra intensității eroziunii metalului prelucrat, în lucrare se determină un minim posibil de rază de curbură impunînd regimului unele condiții restrictive.

1. INTRODUCERE

Din literatura de specialitate [1] se cunoaște că mărimea interstițiului de lucru δ variază pe de o parte cu densitatea de curent i

$$\delta = \frac{C_1}{i}, \tag{1}$$

iar pe de altă parte, tot în [1] se arată că mărimea interstițiului δ depinde de presiune p și debitul Q a electrolitului,

$$\delta = C_2 \frac{Q}{\sqrt{p}}, \tag{2}$$

unde C_1 și C_2 sînt două constante dimensionale.

Considerînd un electrod cu ajutajul căruia se execută o cavitate într-o matriță la o tensiune constantă, cu parametrii de lucru p_0, Q_0 și i_0 se va obține un interstițiu de lucru δ_0. Să presupunem că din exterior printr-o comandă oarecare are loc o variație a parametrilor de lucru menționați, obținîndu-se astfel un interstițiu de lucru $\delta_1(p_1, Q_1, i_1)$.

Într-o lucrare anterioară [5] am făcut afirmația că dacă $\delta_1 < \delta_0$, se obțin raze de curbură finale mai mici. În cele ce urmează vom căuta să găsim metoda de trecere de la δ_0 la δ_1 pentru obținerea unui optim de prelucrabilitate a razelor de curbură.

2. PRINCIPIU DE CALCUL

Analizînd lucrările de specialitate cu referire la trecerea de la un interstițiu la altul, am ajuns la concluzia că pentru a putea aborda problema trebuie să facem o legătură între relația (1) și (2). Astfel, obținem

$$\frac{iQ}{\sqrt{p}} = C. \tag{3}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 3, 1983, P. 319–324

Pentru anumite valori ale parametrilor, din relația (3) se obține alura curbelor variabilelor p și Q pe care le prezentăm în graficile din figura 1, și figura 2.

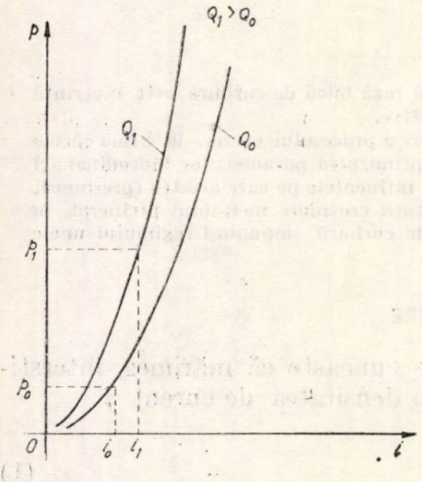


Fig. 1

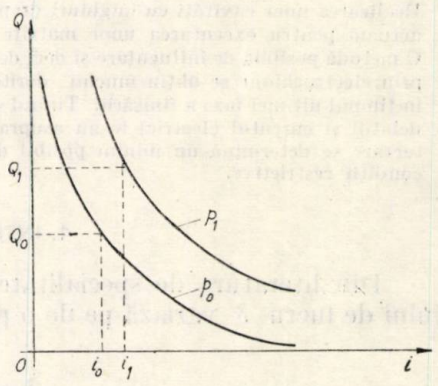


Fig. 2

Admițind $\delta_1 < \delta_0$, se impune evident $i_1 > i_0$. Pentru obținerea unor suprafețe de calitate vom considera $i_1 = i_{max}$. Astfel se poate scrie:

$$i_{max} = \max\left(\frac{\sqrt{p}}{Q}\right), \tag{4}$$

iar pentru optimizare trebuie să fie satisfăcute condițiile $p \leqslant P_{max}$ și $Q_{min} \leqslant Q \leqslant Q_{max}$.

Se poate observa ușor că

$$i_{max} = \frac{\sqrt{p_{max}}}{Q_{min}} \cdot \frac{C_1}{C_2}, \tag{5}$$

de aici rezultă clar, că obținerea unei densități de curent necesară se poate face numai prin variația regimului hidrodinamic.

Luînd în considerare expresia debitului din [2], care este de forma

$$Q = k\delta^3 p, \tag{6}$$

în care k este o constantă, și dacă o combinăm cu relația (2), obținem

$$\delta = \frac{C_3}{\sqrt[4]{p}}. \tag{7}$$

Pentru evitarea unor repetări, vom nota constantele cu C_i, unde $i \in N$.

Din combinarea formulelor (1) cu (6), rezultă

$$Q = \frac{C_4 p}{i^3}. \tag{8}$$

În cele ce urmează vom ține seama de următoarele criterii:

1. Variația debitului de la Q_0 la Q_{1min} să se facă într-un timp minim. În felul acesta se obține o suprapresiune maximă, așa cum se indică de altfel și în relația (5);

2. Variația intensității curentului datorită suprapresiunii maxime nu trebuie să depășească valoarea i_{max};

3. Deplasarea electrodului de la δ_0 la δ_1 să se facă cu viteză constantă.

Considerațiile de mai sus pot fi satisfăcute ținînd seama de indicațiile din lucrarea [4] și anume

Criteriul 1:

$$\int_0^t t \frac{\partial Q}{\partial t} \mathrm{d}t = \int_0^t \frac{C_1 t}{i^3} \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{3p}{i} \frac{\partial i}{\partial t} \right) \mathrm{d}t, \tag{9}$$

în care ∂Q este obținut din (8).

Acest criteriu este optim, dacă alegerea parametrilor de lucru considerați fac integrala (9) minimă.

Criteriul 2:

$$\int_0^t \left(\frac{\partial i}{\partial t} \right)^2 \mathrm{d}t \leqslant i_{max}. \tag{10}$$

Aplicarea acestui criteriu are avantajul că valorile mari ale lui i_{max} au pondere mare în această expresie și deci minimum corespunde cu o reducere importantă a acestor valori mari ale lui i_{max}.

Criteriul 3:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = 0. \tag{11}$$

Prin integrarea relației (11) se găsește ușor expresia

$$\delta = c_5' t + c_6, \tag{12}$$

constanta C_6 se determină punînd condiţiile la limită $t = 0$ şi $\delta = \delta_0$, de unde rezultă $\delta_0 = C_6$
şi

$$\delta = C_5' t + \delta_0. \tag{13}$$

De la început am precizat că $\delta_0 > \delta$, atunci este evident că $C_5' < 0$, iar formula (13) se scrie mai corect

$$\delta = \delta_0 - C_5 t. \tag{14}$$

Combinînd relaţiile (7) cu (14), găsim

$$p = \frac{C_3^4}{(\delta_0 - C_5 t)^4}, \tag{15}$$

iar din combinarea (1) cu (14), avem

$$i = \frac{C_1}{\delta_0 - C_5 t}. \tag{16}$$

Efectuînd unele calcule elementare şi ţinînd seama de expresiile (15) şi (16), relaţia (9) devine

$$t \frac{\partial Q}{\partial t} \mathrm{d}t = \frac{C_3^4 C_4 C_5 t}{C_1^3 (\delta_0 - C_5 t)^2}, \tag{17}$$

şi dacă ţinem seama de (16), relaţia (10) se poate scrie

$$\int_0^t \frac{C_1^2 C_5^2}{(\delta_0 - C_5 t)^4} \mathrm{d}t \leqslant i_{max}, \tag{18}$$

în urma efectuării calculelor, obţinem

$$\frac{C_1^2 C_5}{3(\delta_0 - C_5 t)^3} \leqslant i_{max}, \tag{19}$$

sau

$$t \leqslant \frac{1}{C_5} \left[\delta_0 - \sqrt[3]{\frac{C_1^2 C_5}{3 i_{max}}} \right]. \tag{20}$$

Analizînd cu atenţie relaţia (17) observăm că admite un minimum pentru t=0 şi un minimum pentru $t = \frac{\delta_0}{C_5}$, ca urmare, expresia (20) se poate scrie

$$0 < t \leqslant \frac{1}{C_5}\left[\delta_0 - \sqrt[3]{\frac{C_1^2 C_5}{i_{max}}}\right] < \frac{\delta_0}{C_5}. \tag{21}$$

Avînd în vedere că de la început am considerat că mărimea interstiţiului de lucru δ depinde şi de suprapresiune [relaţia (2)], în cele ce urmează vom căuta să punem în evidenţă acest fenomen. Pentru uşurinţa calculelor vom utiliza formula suprapresiunii calculată de Jukovschi menţionată în [3].

$$p_{max} - p_0 = \rho c \frac{\delta_0 - \delta_1}{t}, \tag{22}$$

unde ρ este densitatea electrolitului, iar c este viteza sunetului în electrolit.

Din combinarea expresiilor (21) cu (22) se obţine

$$\delta_1 = \delta_0 - \frac{p_{max} - p_0}{\rho c} \frac{1}{C_5}\left(\delta_0 - \sqrt[3]{\frac{C_1^2 C_5}{i_{max}}}\right), \tag{23}$$

ceea ce confirmă rezultatele menţionate în lucrarea [5]

$$\delta_1 = \delta_1(\delta_0). \tag{24}$$

Pentru determinarea constantelor din (23) vom introduce rezultatele din relaţia (22) în relaţia (14), de unde obţinem C_5, care are forma

$$C_5 = \frac{\rho_{max} - p_0}{\rho c}, \tag{25}$$

iar C_1 se obţine din (1), unde punem condiţia ca $i = i_0$, şi $\delta = \delta_0$, rezultînd

$$C_1 = \delta_0 i_0. \tag{26}$$

Înlocuind valoarea constantelor din (25) şi (26), în expresia (23) şi efectuînd calculele, rezultă

$$\delta = \sqrt[3]{\delta_0^2} \sqrt[3]{\frac{i_0^2(p_{max} - p_0)}{\rho c i_{max}}}. \tag{27}$$

3. CONCLUZII

Adaptabilizarea procesului de lucru se poate face menținînd constantă valoarea fracției $\frac{i_0^2(p_{max} - p_0)}{\rho c i_{max}}$.

Se observă că factorul $p_{max} - p_0$ și în general $(p - p_0)$, p fiind coordonata de bază a regimului tehnologic de lucru, poate urmări variațiile inerente ale intensității datorită încălzirii, deci modificări ale densității electrolitului. Variația presiunii p. poate fi în mod practic destul de ușor controlată, pe porțiuni finite de lucru prin adaptarea liniarizării fără mari erori de calcul corespunzătoare traectoriei $p = p\,(i)$.

Primită la redacție la 29 decembrie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. M. IVAN, G. RUSAN, *O nouă metodă de conducere a prelucrării electrochimice*, Conferința națională de tehnologii neconvenționale, Timișoara, 1971.
2. J. FLOREA ș.a., *Probleme de mecanica fluidelor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1976
3. T. OROVEANU, *Hidraulica și transportul produselor petroliere*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1966, p. 218.
4. I. PAPADACHE, *Automatica aplicată*, Edit. tehnică București, 1965, p. 245, Criteriu I.T.A.E.
5. I. SPULBER, C. SPULBER, *Contribuții la studiul prelucrării prin eroziune electrochimică cu depasivare hidrodinamică*, Studii și cercetări de mecanică aplicată, **39**, 5 (1980).

STAND PENTRU STUDIUL ANDURANȚEI UNOR ELEMENTE DE ETANȘARE

de LUCIAN CĂPITANU
Institutul de fizica și tehnologia materialelor, București

În timpul funcționării mecanismelor hidraulice, inelele de etanșare se uzează progresiv, ducînd la scăpări de fluid și la scoaterea din funcțiune a mecanismelor. Uzura inelelor de etanșare este influențată de calitatea elastomerului, natura, duritatea și rugozitatea suprafeței contrapiesei metalice (tija amortizorului, a cilindrului hidraulic sau a mecanismului hidraulic), precum și de natura, temperatura și presiunea uleiului din mecanism. Multitudinea factorilor de influență și interdependență a acestora face dificilă corelarea unor rezultate experimentale parțiale obținute prin studii de laborator.

I. INTRODUCERE

Prin studii pe modele experimentale de laborator, s-a stabilit influența principalilor factori asupra elastomerilor utilizați la confecționarea inelelor de etanșare hidraulică. În condiții de laborator, studiul uzurii și anduranței inelelor de etanșare hidraulică s-a realizat prin modelarea procesului real. S-au utilizat cuple de frecare experimentale, diferite ca dimensiuni și formă de cupla reală, dar păstrînd tipul de contact, condițiile de montaj și parametrii funcționali.

Pentru verificarea concluziilor studiilor de material efectuate, s-a proiectat și realizat sub formă de stand, un dispozitiv pentru studiul anduranței inelelor de etanșare hidraulică, în condiții reale de funcționare. În scopul eliminării dificultăților ridicate, chiar și în condiții de laborator, de măsurarea uzurii apărute în urma funcționării cuplei de frecare, criteriul adoptat nu a fost mărimea uzurii, ci apariția scăpărilor de fluid. Aceasta permite aprecierea anduranței, a inelului de etanșare, prin numărul ciclurilor de funcționare, pînă la apariția scăpărilor de ulei, ceea ce constituie și un criteriu de verificare uzinală.

Ținînd seamă de cele menționate, s-a adoptat soluția realizării unui stand, utilizabil chiar în producție, pentru controlul calității inelelor de etanșare hidraulică.

II. CARACTERISTICI TEHNICE

Stadiul realizat prezintă următoarele caracteristici tehnice :

— Posturi de lucru : max. 5, cu posibilitatea testării simultane a 5 tipodimensiuni de inele.

— Frecvența oscilațiilor axelor posturilor de lucru : 80—150 oscilații/min, variabilă în cinci trepte :

$$n_1 = 80 \text{ oscilații/min};$$
$$n_2 = 100 \text{ oscilații/min};$$
$$n_3 = 120 \text{ oscilații/min};$$

$n_4 = 135$ oscilații/min;

$n_5 = 150$ oscilații/min.

— Amplitudinea unghiulară maximă: $\pm 45°$, cu posibilitatea de reglare de la 0° la valorile limită.

— Presiunea maximă admisibilă în camera de ulei: 15 bar.

— Frecvența oscilațiilor presiunii în camera de ulei: 80 — 150 oscilații/min.

— Valoarea p_{max}/p_{min} în camera de ulei: max. 15.

— Domeniul de reglare a presiunii în instalație: 0 — 15 bar.

— Reglarea presiunii: cu supape de siguranță tip traseu.

— Realizarea presiunii în instalație: cu pompă hidraulică cu roți dințate, $p_{max} = 25$ bar; $Q = 10$ l/min.

— Capacitatea camerei de ulei: 25 l.

— Capacitatea rezervorului instalației hidraulice; 75 l.

— Controlul presiunii: cu manometru Ø 60, 0 — 25 bar.

— Încălzirea uleiului: cu termorezistență de 1,5 kW.

— Reglarea temperaturii: termometru manometric cu contacte variabile, 20 — 120°C.

— Înregistrarea numărului ciclurilor de funcționare ale inelelor de etanșare testate: numărător electromecanic 24 V c.c., cu aducere manuală la zero.

— Putere instalată: 3,1 kW.

— Gabarit: 1250/650/1100 mm.

III. DESCRIERE ȘI FUNCȚIONARE

Instalația, a cărei imagine de ansamblu este prezentată în figura 1, cuprinde următoarele părți componente:

— Cadrul de susținere, de formă paralelipipedică, confecționat din țeavă cu secțiune dreptunghiulară, conferind instalației o bună rigiditate.

— Placa de așezare fixă de cadrul de susținere, constituie masa instalației și este prevăzută cu grătare colectoare pentru scurgerea uleiului scăpat accidental pe masă sau la demontarea posturilor de lucru. Pe placă sînt montate și o parte dintre elementele mecanismului de antrenare.

— Camera de ulei se prezintă sub forma unui recipient cilindric, cu funduri plate, așezate orizontal pe cadrul instalației și avînd sudate în lungul generatoarei cinci bucșe constituind suporții posturilor de lucru. La partea superioară este prevăzut un robinet de aerisire, iar la partea inferioară, recipientul are montat un robinet de golire.

Uleiul din cameră este încălzit cu ajutorul unei termorezistențe montat într-o teacă sudată în interiorul recipientului. Pentru limitarea pierderilor de căldură, recipientul este izolat la exterior cu un strat de vată din sticlă.

— Lagărele oscilante sînt constituite din bucșe cu flanșe, în care se află atît locașurile pentru montarea elementelor de etanșare ce trebuie

încercate, cît și lagărele propriu-zise cu rulmenți radiali axiali, ai axelor oscilante. Pentru fiecare tip de element de etanșare ce se încearcă pe stand, acesta este prevăzut cu cîte cinci lagăre oscilante. Cînd unul dintre posturile de lucru nu este pus în funcțiune, bucșa suport se obturează cu o flanșă oarbă.

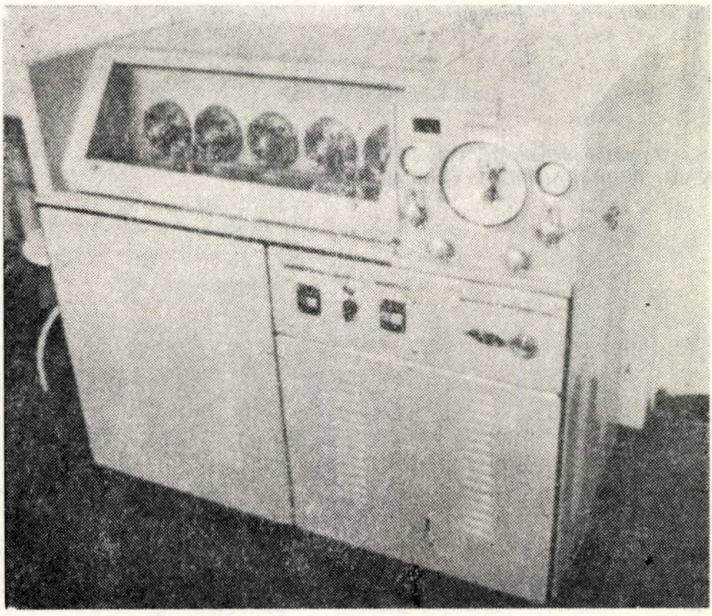


Fig. 1. — Vedere de ansablu a instalației pentru studiul anduranței elementelor de etanșare hidraulică.

— Mecanismul de acționare transformă mișcarea de rotație a unui motor electric în rotație oscilantă a axelor posturilor de lucru, prin intermediul unui lanț cinematic format din roți de curea cu cîte cinci trepte, curea trapezoidală, reductor de turație, mecanism bielă-manivelă, tijă culisantă și tijele oscilante ale posturilor de lucru. Mecanismul bielă-manivelă acționează mecanic și un distribuitor hidraulic care comandă oscilațiile de presiune din camera de ulei, cu aceeași frecvență ca și frecvența mișcării de oscilație a axelor posturilor de lucru.

Numărul ciclurilor de funcționare a posturilor de lucru, pînă la apariția primelor scăpări de ulei, sînt înregistrate cu ajutorul unui numărător electromecanic acționat la 24 V c.c., cu afișare.

IV. CONCLUZII

Standul realizat prezintă noutate absolută din punct de vedere al concepției. El oferă posibilitatea accelerării procesului de uzare a elementelor de etanșare testate, scurtînd la minimum durata încercărilor. Este

de remarcat plaja largă în care pot fi reglați toți parametrii funcționali, posibilitatea testării simultane a cinci tipuri diferite de inele de etanșare.

Avînd în vedere că standul funcționează cu ulei sub presiune și la temperatură relativ ridicată, instalația a fost complet automatizată și prevăzută cu mijloace de protecție și de avertizare pentru caz de avarie.

Primită la redacție la 21 decembrie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. S. FRONIUS, *Maschibnenelemente*, VEB Verlag Technik, Berlin, 1971.
2. A. D. SARKAR, *Wear of Metals*, Pergamon Press, 1976.

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).
- Referate ştiinţifice şi tehnice, la care se expune stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţi, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitatea, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelori elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopiilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti 70701, str. Const. Mille, nr. 15, sectorul 6.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 42, nr. 4 iulie—august 1983

SUMAR

STUDII

GH. ALEXE, Studiul mişcării MHD în conducte cu metoda elementului finit 331

I. SETEANU, M. ERHAN, Stabilirea configuraţiei de echilibru a albiei unui rîu cu granulometrie determinată 337

ŞTEFAN GYÉRESI, Cilindru circular, infinit, polarizabil, magnetizabil, încărcat electric, într-un cîmp gravitaţional 343

V. ILLE, I. BORŞ, Acţiuni concentrate asupra barelor şi plăcilor 348

N. POSEA, AL. ANGHEL, ŞT. DĂRVĂREANU, I. DUMITRU, Algoritm şi program pentru calculul dinamic la încovoiere al arborilor 367

A. PAVEL, Calculul de rezistenţă al structurilor tubulare presurizate la exterior. I 389

GEORGE DOBRE, Asupra calculului deformaţiei danturii la angrenajele paralele cilindrice cu dinţi drepţi în condiţiile angrenării reale 407

MIHAI MINCĂ, Mecanism hidraulic de avans folosit pe instalaţiile de prelucrat electrochimic 419

ELENA MIRIŢĂ, NICOLAE ILIESCU, Simularea pe model fotoelastic a tensiunilor remanente de natură termică, din dinţii roţilor dinţate . . . 436

RECENZII 441

STUDII SI CERCETARI DE MECANICA APLICATA

STUDIUL MIȘCĂRII MHD ÎN CONDUCTE CU METODA ELEMENTULUI FINIT

de GH. ALEXE
nstitutul agronomic „N. Bălcescu" București

În lucrare se dezvoltă un model discret, bazat pe metoda elementului finit, pentru mișcarea fluidelor electroconductoare în conducte. Rezultate numerice concrete se dau pentru mișcarea în conducta de secțiune dreptunghiulară cu pereți izolatori.

1. Datorită importanței sale teoretice și practice, mișcarea fluidelor electroconductoare în conducte a făcut obiectul a numeroase cercetări [1]. Soluții analitice au fost date însă numai pentru cîteva cazuri particulare [2], [3].

Lucrarea de față dezvoltă un model discret, bazat pe metoda elementului finit, pentru mișcările în conducte cu secțiuni transversale arbitrare. Pereții conductelor se presupun subțiri și de conductivitate finită sau cu grosime arbitrară dar izolatori sau perfect conductori. Ca aplicație a modelului dezvoltat, se consideră conducta cu secțiune dreptunghiulară și pereții izolatori studiată analitic de Shercliff [2].

2. Considerăm o conductă cilindrică cu secțiune transversală arbitrară (fig. 1) cu pereții de grosime constantă și suficient de lungi raportată la un sistem de referință a cărui axă Ox coincide cu axa conductei. Fluidul care curge în interiorul conductei îl presupunem vîscos, incompresibil și de caracteristici electrice și magnetice aproximativ egale cu cele ale spațiului liber. Presupunînd că mișcarea este datorată unui gradient de presiune, cîmpul magnetic exterior este omogen, nu există curenți în direc-

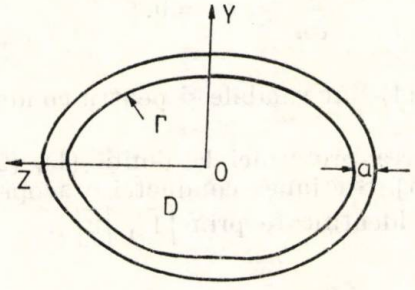


Fig. 1

ţia axei Ox, iar componentele vitezei V_y, V_z sînt nule, se ajunge [1] la rezolvarea sistemului de ecuaţii :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+R\frac{\partial B}{\partial y}=-1,$$
$$\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}+R\frac{\partial V}{\partial y}=0, \tag{1}$$

în care $V=V_x$, $B=(\mathrm{ReRhB}_x)/\mathrm{R}$, R fiind numărul lui Hartmann ($\mathrm{R}^2=$ $=\mathrm{ReRhRm}$).

Pentru conductele cu pereţi subţiri condiţiile la limită ale problemei sînt [1] :

$$V(y,z)|_\Gamma=0,\quad \left(\frac{\partial B}{\partial n}(y,z)+\frac{1}{\varphi}B(y,z)\right)\Big|_\Gamma=0,\quad \varphi=\frac{a\bar{\sigma}}{b\sigma}, \tag{2}$$

unde $\frac{\partial}{\partial n}$ este derivata în direcţia normalei exterioare la frontiera Γ, $\bar{\sigma}$ — conductivitatea peretelui conductei, σ — conductivitatea fluidului, iar l o lungime caracteristică. Pe segmentele izolatoare ale peretelui conductei condiţia la limită (2) devine :

$$B(y,\ z)=0, \tag{3}$$

iar pe cele perfect conductoare :

$$\frac{\partial B}{\partial n}(y,\ z)=0. \tag{4}$$

Condiţiile la limită (3), (4) sînt valabile şi pentru conductele cu pereţi de grosimi arbitrare.

3. Pentru rezolvarea problemei la limită (1), (2) folosim metoda elementului finit [4], [5]. Secţiunea conductei o acoperim cu o reţea de elemente finite (fig. 2) identificate prin $\boxed{\underline{1}}$, $\boxed{\underline{2}}$, ...

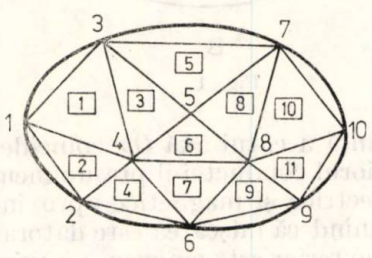


Fig. 2

Pe fiecare element finit $\boxed{e}$ viteza V și inducția magnetică B le aproximăm prin funcțiile:

$$V^e = \sum_{s=1}^{3} v_s^e \varphi_s^e, \quad B^e = \sum_{s=1}^{3} b_s^e \varphi_s^e \tag{5}$$

v_s^e, b_s^e fiind valorile aproximative ale vitezei și inducției în nodurile elementului finit, iar φ_s^e funcții de interpolare ale căror expresii [5] sînt:

$$\varphi_s^e = (\alpha_s^e y + \beta_s^e z + \nu_s^e)/(2Se) \tag{6}$$

cu

$$\alpha_i^e = z_k^e - z_j^e; \quad \beta_i^e = y_j^e - y_k^e; \quad \gamma_i^e = z_j^e y_k^e - z_k^e y_j^e,$$

$$i = 1, 2, 3; \quad j = 2, 3, 1; \quad k = 3, 1, 2,$$

$$2\,Se = \beta_1^e \alpha_2^e - \beta_2^e \alpha_1^e,$$

(y_i^e, z_i^e) $i = 1, 2, 3$ fiind coordonatele nodurilor elementului finit.

Dacă aplicăm sistemului (1) metoda lui Galerkin pe elementul finit $\boxed{e}$ și folosim relația (5), obținem sistemul:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{3} a_{ij}^e v_j^e - R \sum_{j=1}^{3} c_{ij}^e b_j^e = f_i^e, \\ \sum_{j=1}^{3} \left(a_{ij}^e + \frac{1}{\varphi} \mathrm{d}_{ij}^{*e} \right) b_j^e - R \sum_{j=1}^{3} c_{ij}^e v_j^e = 0, \quad i = 1, 2, 3, \end{gathered} \tag{7}$$

cu

$$a_{ij}^e = \iint_{De} \left(\frac{\partial \varphi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial z} \right) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z, \quad c_{ij}^e = \iint_{De} \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial y} \varphi_j^e \,\mathrm{d}y\, \mathrm{d}z, \tag{8}$$

$$d_{ij}^{*e} = \int_{S\overset{*}{e}} \varphi_i^e \varphi_j^e \,\mathrm{d}s, \quad f_i^e = \iint_{De} \varphi_i^e \,\mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

Coeficienții d_{ij}^{*e} apar numai la sistemele locale asociate elementelor finite ce au două noduri pe frontiera domeniului D. În relația (8) De reprezintă domeniul ocupat de elementul finit $\boxed{e}$, iar $S\overset{*}{e}$ latura ce unește nodurile precizate mai înainte. Dacă introducem (6) în (8) și presupunem că

Se este latura ce unește nodurile $(y_1^e,\ z_1^e)$, (y_2^e, z_2^e), obținem :

$$a_{ij}^e = (\alpha_i^e \alpha_j^e + \beta_i^e \beta_j^e)\ /(4Se),\quad c_{ij}^e = \alpha_j^e/6,$$

$$\|\alpha_{ij}^{*e}\| = \sqrt{(y_1^e - y_2^e)^2 + (z_1^e - z_2^e)^2} \begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},\ f_i^e = Se/6. \tag{9}$$

Cu notațiile

$$p_{mn}^e = \begin{cases} a_{ij}^e \text{ pentru } m = 2i-1,\ n = 2j-1 :\ m = 2i,\ n = 2j, \\ -Rc_{ij}^e \text{ pentru } m = 2i-1,\ n = 2j :\ m = 2i,\ n = 2j-1, \end{cases}$$

$$p_{mn}^{*e} = \begin{cases} d_{ij}^e \text{ pentru } m = 2i-1,\ n = 2i :\ m = 2i,\ n = 2j-1, \\ 0 \text{ pentru } m = 2i-1,\ n = 2j-1 :\ m = 2i,\ n = 2j, \end{cases}$$

$$u_m^e = \begin{cases} v_i^e \text{ pentru } m = 2i-1, \\ b_i^e \text{ pentru } m = 2i, \end{cases}$$

$$g_m^e = \begin{cases} f_i^e \text{ pentru } m = 2i-1, \\ 0 \text{ pentru } m = 2i, \end{cases}$$

sistemul local (7) se scrie sub forma

$$\sum_{n=1}^{6} \left(p_{mn}^e + \frac{1}{\varphi} p_{mn}^{*e} \right) u_n^e = q_m^e;\quad m = 1, 2, \ldots, 6$$

sau matriceal

$$\left(P^e + \frac{1}{\varphi} P^{*e} \right) u^e = q^e. \tag{10}$$

Valorile aproximative ale vitezei și inducției în nodurile rețelei de elemente finite le notăm prin V_i, $B_i (i = 1, 2, \ldots, \mathrm{NG})$. Legătura dintre vectorul u^e și vectorul U de componente :

$$U_s = \begin{cases} V_r \text{ pentru } s = 2r-1,\ r = 1, 2, \ldots, \mathrm{NG}, \\ B_r \text{ pentru } s = 2r,\ r = 1, 2, \ldots, \mathrm{NG} \end{cases}$$

este dată de relația

$$u^e = \Omega^e \cdot U. \tag{11}$$

Matricea Ω^e este o matrice booleană cu şase linii şi 2NG coloane, definită prin :

$$\Omega^e_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } j = 2T(e,\ k) - 1,\ i = 2k - 1,\ k = 1, 2, 3 \text{ sau } j = \\ \qquad\qquad = 2T(e,\ k),\ i = 2k,\ k = 1, 2, 3 \\ 0 \text{ în rest,} \end{cases}$$

unde T este matricea topologiei reţelei de elemente finite [5]. Pentru reţeaua din figura 2 această matrice este

$$T = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 6 & 5 & 8 & 6 & 8 & 9 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 7 & 5 & 8 & 7 & 8 & 10 & 10 \end{Vmatrix}^t .$$

Dacă introducem (11) în (10), înmulţim cu transpusa matricei Ω^e şi sumăm după e, obţinem sistemul global de ecuaţii

$$\left(P + \frac{1}{\varphi} P^\Gamma\right) U = Q, \tag{12}$$

unde $P = \sum_{e=1}^{NE} \Omega^e_t P^e \Omega^e$, $P^\Gamma = \sum_{e=1}^{NE} \Omega^e_t P^{*e} \Omega^e$, $Q = \sum_{e=1}^{NE} \Omega^e_t q^e$.

Sistemului de ecuaţii (12) i se impun condiţiile la limită prin metodele cunoscute [5]. Valorile aproximative ale lui V şi B în nodurile reţelei de elemente finite se obţin prin rezolvarea acestui sistem algebric liniar de 2NG ecuaţii cu 2NG necunoscute. Cu ajutorul relaţiei (5) se pot calcula valorile aproximative ale lui V şi B în orice punct din domeniul $D^* = \bigcup_{e=1}^{NE} De$.

4. Ca aplicaţie a modelului dezvoltat, considerăm conducta cu secţiunea transversală de formă dreptunghiulară $D = [-1{,}1] \times [-l,\ l]$ şi pereţi izolatori. Pentru reţelele de forma celei din figura 3 matricea topologiei elementelor este dată de relaţiile :

$$t_{es} = \begin{cases} k + N,\ e = 2(i-1) * (N-1) - 1,\ s = 1, \\ k + 1,\ e = 2 * (i-1) * (N-1) - 1,\ s = 2, \\ k,\ e = 2 * (i-1) * (N-1) - 1,\ s = 3, \end{cases}$$

$$t_{es} = \begin{cases} k + 1,\ e = 2 * (i-1) * (N-1),\ s = 1, \\ k + N,\ e = 2 * (i-1) * (N-1),\ s = 2, \\ k + N + 1,\ e = 2 * (i-1) * (N-1),\ s = 3, \end{cases}$$

unde $k = (i-1) * N + j$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, $j = 1, 2, \ldots, M-1$ N şi M fiind numărul de noduri de pe lăţimea şi, respectiv, lungimea, secţiunii conductei (în fig. 3 $N = 3$, $M = 4$).

Deoarece pereții conductei sînt izolatori, sistemul local (10) va avea forma :

$$\text{pentru } P^e u^e = q^e$$

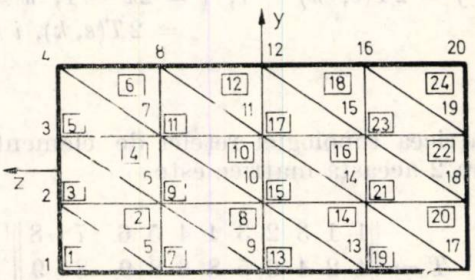


Fig. 3

pentru orice element finit. Ca urmare, sistemul global va fi : $PU = Q$. Modul de identificare al nodurilor rețelei de elemente finite folosit în figura 3 conduce la un sistem global cu matrice bandă de lățime minimă (lățimea benzii este egală cu $4N + 7$, N avînd semnificația de mai sus).

Rezolvarea efectivă a problemei s-a făcut cu un program de calcul, în limbajul FORTRAN, prin care s-a asigurat generarea automată a sistemului global de ecuații sub forma cerută de subrutina GELB din [6] și impunerea condițiilor la limită (2, a), (3) pe pereții conductei. Un extras din rezultatele numerice obținute pentru $R = 2$, $l = 1$, $M = 16$, $N = 11$ este dat în tabelul 1. Pentru comparație, în tabel, sînt incluse și valorile soluției analitice dată de Shercliff [2].

Tabelul 1

Extras din rezultatele numerice obținute

y	z	V prin M.E.F.	V SHERCLIFF	B prin M.E.F.	B SHERCLIFF
−0,2	−0,8	0,1119	0,1181	0,0410	0,0415
−0,2	−0,6	0,1809	0,1897	0,0493	0,0497
+0,2	−0,4	0,2220	0,2320	0,0400	0,0402
0,2	−0,8	0,1117	0,1181	0,0407	0,0415
0,2	−0,6	0,1805	0,1897	0,0490	0,0497
0,2	−0,4	0,2216	0,2320	0,0398	0,0402

Primită la redacție la 21 aprilie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. L. DRAGOȘ, *Magnetofluid dynamics*, Edit. Academiei R. S. România, București, România and Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent, England, 1975.
2. J. A. SHERCLIFF, *Steady Motion of Conducting Fluids in Pipes under Transverse Magnetic Fields*, Proc. Cambr. Phil. Soc. **49**, 136—144 (1953).
3. CH. C. CHANG, TH. S. LUNDGREN, *Duct Flow in Magnetohydrodynamics*, ZAMP *12*, 100—114 (1961).
4. J. T. ODEN, *Finite elements of nonlinear continua*, McGraw-Hill, New York, 1972.
5. J. J. CONNOR, C. A. BREBBIA, *Finite element Techniques for Fluid Flow*, Butterworths, London, 1976.
6. I.B.M., *Application Program Scientific Subroutine Pachage*, Programmer's Manual.

STABILIREA CONFIGURAȚIEI DE ECHILIBRU A ALBIEI UNUI RÎU CU GRANULOMETRIE DETERMINATĂ

de I. SETEANU, M. ERHAN
Institutul politehnic, București

Se propune o metodă de determinare a profilului de echilibru a albiei unui rîu cu structură granulometrică dată, datorită procesului de eroziune-depunere. Se indică rezultatele numerice obținute cu un algoritm de calcul secvențial pentru două variante ale debitului mediu multianual.

INTRODUCERE

Dacă pe un rîu se realizează un lac de acumulare prin bararea unei secțiuni, profilul longitudinal al albiei, care, inițial, avea o structură de echilibru, rezultată prin procesul tranzitoriu de eroziune-depunere, dependentă în esență de debitul mediu multianual și de elementele geomorfologice ale terenului, își schimbă configurația inițială ca urmare a micșorării vitezei în incinta lacului [1]. Debitul tranzitat spre aval prin corpul barajului conține o pondere redusă a fazei solide, de granulometrie fină, cu o însemnată capacitate de erodare a biefului. Se constată o tendință de apropiere a profilului longitudinal de o nouă configurație de echilibru, proces însoțit simultan de modificarea compoziției granulometrice în lungul liniei de talveg, cu caracter predominant de „pavare" [2] în zona adiacentă barajului.

În lucrare se analizează pe un model simplificat regimul tranzitoriu de stabilire a profilului de echilibru, admițînd că, local, granulele au un diametru mediu constant, diferit de la o secțiune la alta, în conformitate cu observațiile experimentale, după tranzitarea undelor de viitură. Debitul solid transportat, exprimat global prin diferite relații semiempirice [3], a fost estimat în continuare cu relația Kalinske-Brown, asociată cu diagrama modificată a lui Shields pentru determinarea vitezei critice de frecare, iar rugozitatea hidraulică a albiei, dependentă de structura granulometrică a patului, a fost determinată cu formula lui Chang [3]. Pentru simplificarea calculelor hidraulice, s-a admis că secțiunea transversală este rectangulară, cu lățime variabilă de la o secțiune la alta.

MODELUL MATEMATIC

Pentru o albie cu secțiune transversală rectangulară cu lățime B variabilă (fig. 1), relația de determinare a formei suprafeței libere în mișcare gradual variată de debit Q se scrie [4]:

$$S_0 = S_f + \left(1 - \frac{\alpha Q^2 B}{gA^3}\right)\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{Q^2 y}{gA^3}\frac{\partial B}{\partial x}, \tag{1}$$

unde $S_0 = -\dfrac{\partial z}{\partial x}$ reprezintă panta longitudinală a patului, x este coordonata longitudinală, măsurată în lungul curgerii, y reprezintă adîncimea

apei, α este coeficientul lui Coriolis, iar prin S_f s-a notat panta hidraulică a curgerii, dată de relaţia

$$S_f = \frac{Q^2}{C^2 A^2 y} = \frac{u_*^2}{gy}, \tag{2}$$

unde C este coeficientul lui Chézy. După Manning,

$$C = \frac{1}{n} y^{1/6}, \tag{3}$$

unde n este rugozitatea hidraulică. Dacă $d(m)$ reprezintă diametrul local mediu al granulelor patului, după Chang

$$n = 0{,}04168\, d^{1/6}. \tag{4}$$

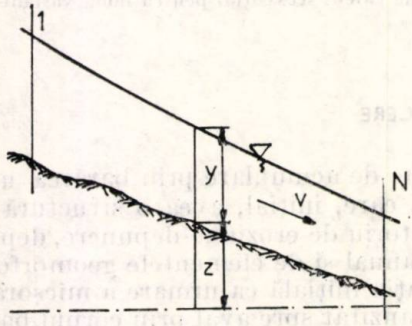


Fig. 1

În relaţia (2), u_* reprezintă viteza de frecare, definită prin următoarea egalitate :

$$u_* = \frac{Q\sqrt{g}}{AC}. \tag{5}$$

După unele transformări, relaţia (1) devine:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{C_3}{y^3} - \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{C_1}{y^{10/3}} + \frac{C_2}{y^2}, \tag{6}$$

unde

$$C_1 = \frac{n^2 Q^2}{B^2}, \tag{7}$$

$$C_3 = \frac{\alpha Q^2}{gB^2}, \tag{8}$$

$$C_2 = \frac{C_3}{B}\frac{\partial B}{\partial x}. \tag{9}$$

Dacă notăm membrul drept al relaţiei (6) prin DYX, rezultă, intr-o schemă iterativă corespunzătoare unei secţiuni transversale nodale a unei reţele de discretizare după variabila x, următorul algoritm de calcul al adîncimii apei :

$$DYX^{(k)} = -DZX + \frac{C_1}{y_m^{10/3}} + \frac{C_2}{y_m^2} + DYX^{(k-1)}\frac{C_3}{y_m^3}, \tag{10}$$

unde $DZX = \frac{\partial z}{\partial x}$, z fiind cota patului față de un plan orizontal convențional de referință, iar

$$y_m = 0{,}5\ (y_{j-1}^{(k-1)} + y_j), \tag{11}$$

$$y_{j-1}^{(k)} = y_j + DYX^{(k)}\ \Delta x. \tag{12}$$

Alegînd în prima aproximație

$$y_{j-1}^{(1)} = y_j \tag{13}$$

și

$$DYX^{(1)} = 0, \tag{14}$$

procesul iterativ se repetă în toate secțiunile de calcul. Pentru a determina forma suprafeței libere se admite că adîncimea apei în secțiunea extremă aval, y_{av}, este cunoscută (în regim fluvial cu numărul Froude $\mathcal{F}_r = Q/(B_{av} y_{av}^{3/2} g^{1/2}) < 1$) și se calculează succesiv adîncimile corespunzătoare celorlalte secțiuni.

Criteriul de convergență al algoritmului iterativ local este ales astfel încît

$$|y_{j-1}^{(k)} - y_{j-1}^{(k-1)}| \leqslant \varepsilon, \tag{15}$$

unde ε este un număr pozitiv suficient de mic.

Adîncimea în ultima secțiune depinde de regimul hidraulic existent în bieful aval al zonei analizate. S-a presupus că adîncimea y_{av} este corespunzătoare regimului de curgere uniformă,

$$y_{av} = \left(\frac{nQ}{B\sqrt{S_0}}\right)^{3/5}. \tag{16}$$

Pentru determinarea suprafeței libere (prima etapă de calcul) se admite că pe o durată de timp Δt (suficient de mică, circa 2—10 ore) profilul longitudinal al patului albiei nu se modifică sensibil, obținîndu-se adîncimile în secțiunile nodale de calcul, precum și vitezele locale de frecare, definite prin relația (5).

Modificarea patului albiei, ca urmare a procesului complex de eroziune-transport-depunere (etapa a II-a de calcul), este guvernată de relația de bilanț masic :

$$-B(1-\lambda)\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(q_s B), \tag{17}$$

unde, după Komura [5],

$$\lambda = 0{,}245 + 0{,}03285\ d^{-0{,}21} \tag{18}$$

reprezintă rugozitatea patului, iar q_s este debitul solid unitar (pe unitatea de lăţime a albiei) exprimat după Kalinske-Brown:

$$q_s = \beta \frac{u_*(u_*^2 - u_{*c}^2)^2}{d}. \tag{19}$$

În relaţia anterioară, u_{*c} reprezintă viteza critică de frecare:

$$u_{*c} = RAC \sqrt{d}, \tag{20}$$

$$RAC = \sqrt{a_c \left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1\right) g}. \tag{21}$$

Coeficientul empiric a_c, dependent de mărimea granulei medii a patului, se obţine din diagrama modificată a lui Shields (fig. 2) [6], iar parametrul $\beta = 0{,}038168$ (SI).

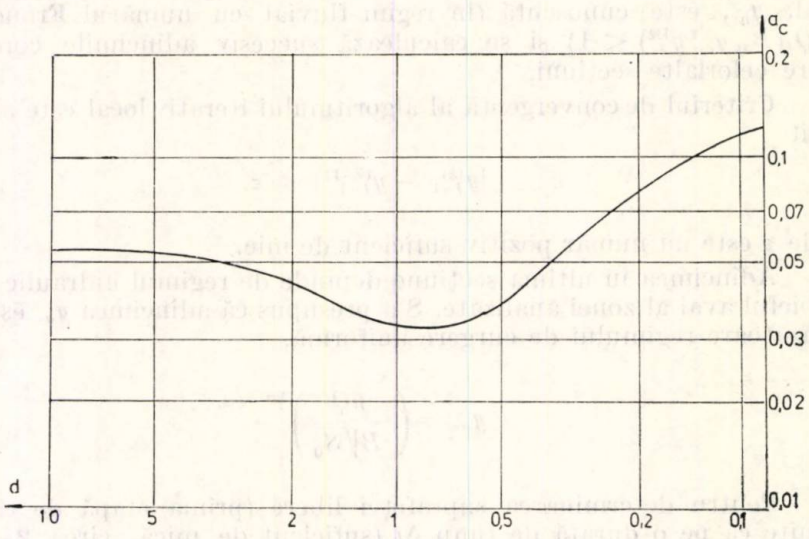


Fig. 2

În diferenţe finite, folosind o schemă Lax îmbunătăţită [7] care asigură stabilitatea numerică a algoritmului de calcul pentru ecuaţii parabolice de conservare, ecuaţia (17) devine:

$$\frac{1}{\Delta t}\left(z_j^{(n+1)} - \left(\frac{\delta}{2} z_{j+1}^{(n)} + (1 - \delta)\, z_j^{(n)} + \frac{\delta}{2} z_{j-1}^{(n)}\right)\right) = \tag{22}$$

$$= -\frac{1}{B_m(1 - \lambda_m)} \frac{\Phi_{j+1}^{(n)} - \Phi_{j-1}^{(n)}}{2\,\Delta x},$$

în care δ reprezintă efectul unei pseudo-viscozităţi numerice, iar $\Phi = q_s B$.

Parametrul de suprarelaxare δ se alege astfel încît să fie respectată condiția de convergență numerică [8]:

$$\left(C_s \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 < \delta < 1, \tag{23}$$

în care C_s este celeritatea transportului de sediment, iar B_m și λ_m sînt valorile medii spațiale ale lățimii, respectiv ale porozității, în profilul median situat între secțiunilor nodale $(j-1)$, respectiv $(j+1)$.

REZULTATE

S-a întocmit un program de calcul numeric în limbaj FORTRAN IV alegînd următoarele date de intrare:

a) elementele geomorfologice: $\Delta x = 1500$ m; $N = 11$ secțiuni nodale; $B = 90$ m = const.; profilul longitudinal al patului (tabela 1) și distribuția spațială a diametrului mediu al granulei patului (tabela 1);

b) elementele hidraulice: debitul $Q = 1200$ m^3/s, respectiv 2400 m^3/s (două variante); pasul de timp $\Delta t = 7200$ s.; parametrul de convergență în algoritmul de calcul al suprafeței libere $\varepsilon = 0{,}01$; parametrul de suprarelaxare al schemei Lax s-a ales de forma:

$$\delta = 0{,}01 + \left(C_s \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2, \tag{24}$$

iar coeficientul lui Coriolis de neuniformitate a epurei vitezei în secțiunea transversală $\alpha = 1{,}1$.

Tabela 1

j	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_0(j)$ (m)	20,00	19,20	18,40	17,60	16,80	16,00	15,20	14,40
$d(j)$ (m)	0,006	0,005	0,005	0,004	0,004	0,003	0,003	0,003

Tabela 1 (continuare)

j	9	10	11
$z_0(j)$ (m)	13,60	12,80	12,00
$d(j)$ (m)	0,003	0,003	0,002

Profilele longitudinale de echilibru ale patului albiei pentru cele două variante, împreună cu adîncimile apei, sînt indicate în tabela 2.

Tabela 2

j		1	2	3	4	5	6	7	8
$z(m)$	(1)	19,990	19,185	18,379	17,579	16,793	15,969	15,167	14,389
	(2)	19,861	19,009	18,157	17,269	16,594	15,700	14,778	14,004
$y(m)$	(1)	6,277	6,253	6,230	6,206	6,170	6,157	6,144	6,089
	(2)	9,361	9,339	9,325	9,370	9,171	9,185	9,262	9,168

Tabela 2 (continuare)

j		9	10	11
$z(m)$	(1)	13,589	121743	11,348
	(2)	13,340	12,372	11,404
$y(m)$	(1)	6,045	6,033	6,050
	(2)	8,962	9,035	9,170

(1) $Q = 1200$ m^3/s,
(2) $Q = 2400$ m^3/s.

Pentru a extinde modelul analizat este necesar să se ia în considerare structura granulometrică locală a materialului aluvionar al patului albiei şi să se analizeze detaliat, pe fracţii granulometrice, bilanţul masic de schimb dintre curent şi patul albiei, pentru a se putea modela, odată cu schimbarea liniei de talveg, şi evoluţia în timp a structurii granulometrice, precum şi tendinţa de apropiere a acesteia de compoziţia granulometrică finală, simulînd totodată şi evoluţia procesului de pavare.

BIBLIOGRAFIE

1. S. KOMURA, B. D. SIMMONS, *River-Bed Degradation below Dams*, ASCE, Journ. of Hyrd. Div., *HY 4*, July (1967).
2. I. SETEANU, M. ERHAN, *Transportul aluviunilor în regim nepermanent (IV). Studiul refacerii zonei de influenţă în procesul de eroziune-depunere* St. cerc. mec. apl., 40, *4* (1981).
3. W. H. GRAF, *Hydraulics of Sediment Transport*, Mc. Graw Hill Co., New York, 1971.
4. VEN TE CHOW, *Open- Channel Hydraulics*, McGraw Hill Co., New York, 1959.
5. S. KOMURA, *Equilibrium Depth of Scour in Long Constrictions*, ASCE, Journ. of Hydr. Div., *HY 5*, Sept. (1966).
6. A. J. RAUDKIVI, *Loose Boundary Hydraulics*, Pergamon, Oxford, 1967.
7. R. RICHTMYER, K. MORTON, *Difference Methods for Initial-Value Problems*, Interscience Publ., New York, 1967.
8. A. DIACON, I. SETEANU, *Transportul aluviunilor în regim nepermanent (I). Efectul modificării profilului transversal al curgerii*, St. cerc. mec. apl., **35**, *1* (1976).

CILINDRU CIRCULAR, INFINIT, POLARIZABIL, MAGNETIZABIL, ÎNCĂRCAT ELECTRIC, ÎNTR-UN CÎMP GRAVITAȚIONAL

de ȘTEFAN GYÉRESI
Institutul agronomic „N. Bălcescu", București

Se determină cîmpul electromagnetic produs de un cilindru circular, infinit, polarizabil, magnetizabil, încărcat electric, situat într-un cîmp gravitațional înlăturabil.

Se consideră un cîmp gravitațional particular creat de rotația uniformă a unui reper neinerțial față de unul inerțial. Prezentăm mai jos structura spațiotemporală, în coordonate cilindrice, din punctul de vedere al unui observator în repaus cu reperul neinerțial.

Ecuațiile de mișcare ale reperului neinerțial se scriu astfel:

$$r = \mathring{r};\ \theta = \mathring{\theta} - \mathring{\omega} t;\ z = \mathring{z};\ t = \mathring{t}\ (x^1 \equiv r;\ x^2 \equiv \theta;\ x^3 \equiv z;\ x^4 \equiv ct).$$

Cerculeţul suprapus indică raportarea la reperul inerțial, iar ω este viteza unghiulară.

Invariantul fundamental se definește astfel:

$$\mathrm{d}s^2 = -\, g_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta = -\, [\mathrm{d}r^2 + r^2\, \mathrm{d}\theta^2 + 2\, r^2\, \omega\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}t + \mathrm{d}z^2 - (c^2 - r^2\, \omega^2)\, \mathrm{d}t^2],$$

însumarea după indicii muți fiind subînțeleasă, iar indicii grecești iau valori de la 1 la 4.

Cvadriviteza și cvadriaccelerația se definesc prin componentele lor contravariante și anume

$$u^\alpha = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s},\ A^\alpha = \frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s} \equiv \frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}s^2}.$$

Componentele nenule au expresiile

$$u^4 = \frac{1}{\sqrt{c^2 - r^2\, \omega^2}},\ u_2 = \frac{r^2 \omega}{\sqrt{c^2 - r^2\, \omega^2}},\ u_4 = -\sqrt{c^2 - r^2\, \omega^2},$$

respectiv

$$A^1 = A_1 = -\frac{r\omega^2}{c^2 - r^2\omega^2}.$$

Componentele spațiale $\bar{g}_{\alpha\beta}$ ale tensorului metric $g_{\alpha\beta}$ în reperul neinerțial sînt [1]

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_\alpha\, u_\beta$$

şi au următoarele componente nenule

$$\bar{g}_{11} = \bar{g}^{11} = 1\,;\ \bar{g}_{22} = \frac{1}{\bar{g}^{22}} = \frac{c^2 r^2}{c^2 - r^2\omega^2}\,;\ \bar{g}_{33} = \bar{g}^{33} = 1\,;\ \bar{g}^{24} = \bar{g}^{42} =$$

$$= \frac{\omega}{c^2}\,;\ \bar{g}^{44} = \frac{r^2\omega^2}{c^2(c^2 - r^2\omega^2)}\,.$$

Simbolurile lui Christoffel de speţa a II-a se definesc astfel:

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(g_{\rho\beta,\alpha} + g_{\alpha\rho,\beta} - g_{\alpha\beta,\rho})\,g^{\rho\gamma},$$

având următoarele componente nenule

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}\,;\ \Gamma^2_{14} = \Gamma^2_{41} = \frac{\omega}{r}\,;\ \Gamma^1_{22} = -r\omega^2.$$

Derivata covariantă a componentelor unui tensor se defineşte astfel

$$T^{\beta\ldots}_{\alpha\ldots,\gamma} = T^{\beta\ldots}_{\alpha\ldots,\gamma} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\gamma}\,T^{\beta\ldots}_{\rho\ldots} + \Gamma^{\beta}_{\rho\gamma}\,T^{\rho\ldots}_{\alpha\ldots}\,.$$

În fine, componentele spaţiale ale tensorului lui Ricci se definesc astfel:

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{-g}\;u^{\rho}\;E_{\alpha\beta\gamma\rho}\,,$$

unde $g = det\ \|g_{\alpha\beta}\|$, iar $E_{\alpha\beta\gamma\delta}$ este simbolul de permutare.

Componentele nenule au următoarele expresii:

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{cr}{\sqrt{c^2 - r^2\omega^2}}\,E_{\alpha\beta\gamma 4}\,;\ \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{\sqrt{c^2 - r^2\omega^2}}{cr}\,E_{\alpha\beta\gamma 4} + \frac{r\omega}{c\sqrt{c^2 - r^2\omega^2}}\,E_{2\alpha\beta\gamma},$$

$$\bar{\varepsilon}^{1}_{\alpha\beta} = \frac{cr}{\sqrt{c^2 - r^2\omega^2}}\,E_{1\alpha\beta 4}\,;\ \bar{\varepsilon}^{2}_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{c^2 - r^2\omega^2}}{cr}\,E_{2\alpha\beta 4}\,;\ \bar{\varepsilon}^{3}_{\alpha\beta} = \frac{cr}{\sqrt{c^2 - r^2\omega^2}}\,E_{3\alpha\beta 4},$$

$$\bar{\varepsilon}^{4}_{\alpha\beta} = \frac{r\omega}{c\sqrt{c^2 - r^2\omega^2}}\,E_{2\alpha\beta 4}\,;\ \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta}_{1} = \frac{\sqrt{c^2 - r^2\omega^2}}{cr}\,E_{1\alpha\beta 4} + \frac{r\omega}{c\sqrt{c^2 - r^2\omega^2}}\,E_{21\alpha\beta},$$

$$\bar{\varepsilon}^{\alpha\beta}_{2} = \frac{cr}{\sqrt{c^2 - r^2\omega^2}}\,E_{\alpha\beta 24},\ \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta}_{3} = \frac{\sqrt{c^2 - r^2\omega^2}}{cr}\,E_{\alpha\beta 34} + \frac{r\omega}{c\sqrt{c^2 - r^2\omega^2}}\,E_{\alpha 23\beta}.$$

Se consideră intensitatea cîmpului electromagnetic, intensitatea cîmpului de inducție electromagnetică și densitatea de cvadricurent electric ca noțiuni primare, avînd drept modele matematice un cîmp tensorial antisimetric F de ordinul doi, un cîmp tensorial antisimetric L de ordinul doi, respectiv un cîmp vectorial J. Ecuațiile lui Maxwell se postulează astfel [1]:

$$\bar{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\gamma/\delta} = 0, \quad L^{\beta}_{\alpha/\beta} = J_{\alpha}.$$

Aceste ecuații nu formează un sistem complet, sînt șapte ecuații independente pentru 16 funcții necunoscute. Pentru completare mai sînt necesare încă nouă relații care sînt furnizate de ecuațiile constitutive. Ne limităm la cazul corpului omogen, izotrop și liniar din punct de vedere electromagnetic. Avem

$$L_{\alpha\beta} = \varepsilon(u_{\alpha} F_{\beta\rho} u^{\rho} - F_{\alpha\rho} u^{\rho} u_{\beta}) + \frac{1}{\mu} \bar{F}_{\alpha\beta} (\bar{F}_{\alpha\rho} = \bar{g}_{\alpha\rho} \bar{g}_{\beta\sigma} F^{\rho\sigma}),$$

unde ε și μ reprezintă constanta dielectrică și, respectiv, permeabilitatea magnetică specifică. Avem, de asemenea,

$$\bar{g}^{\beta}_{\alpha} J_{\beta} = \sigma F_{\alpha\rho} u^{\rho},$$

unde σ este conductivitatea.

Aceste ecuații formează un sistem complet și sînt valabile în orice spațiu pseudoriemannian, deci în orice cîmp gravitațional nu numai în cele produse de mișcări neinerțiale. Ca aspect ele coincid exact cu cele din spațiul minkowskian, totuși ele diferă esențial deoarece în spațiul minkowskian componentele tensorului lui Ricci coincid cu simbolul de permutare, iar derivata covariantă este echivalentă cu derivata parțială.

Descompunem acum cîmpul electromagnetic și cîmpul de inducție electromagnetică în cîmp electric și magnetic, respectiv în cîmp de inducție electrică și magnetică. Prin definiție [1], intensitatea acestor cîmpuri se exprimă prin cîmpuri vectoriale, avînd componentele

$$E_{\alpha} = F_{\alpha\beta} u^{\beta} \text{ și } B_{\alpha} = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}^{\beta\gamma}_{\alpha} F_{\beta\gamma},$$

și, respectiv,

$$D_{\alpha} = L_{\alpha\beta} u^{\beta} \text{ și } H_{\alpha} = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}^{\beta\gamma}_{\alpha} L_{\beta\gamma}.$$

Inversînd primele două și ultimele două relații obținem

$$F_{\alpha\beta} = u_{\alpha} E_{\beta} - E_{\alpha} u_{\beta} + \bar{\varepsilon}^{\gamma}_{\alpha\beta} B_{\gamma},$$

respectiv

$$L_{\alpha\beta} = u_{\alpha} D_{\beta} - D_{\alpha} u_{\beta} + \bar{\varepsilon}^{\gamma}_{\alpha\beta} H_{\gamma}.$$

Descompunem şi cvadricurentul electric în cvadricurent de conducţie şi de convecţie. Prin definiţie, intensitatea acestor curenţi se exprimă prin cîmpuri vectoriale, avînd componentele

$$j_\alpha = c\bar{g}^\beta_\alpha J_\beta,$$

respectiv

$$u_\alpha q = - u_\alpha u^\beta J_\beta,$$

unde q este densitatea proprie a sarcinii electrice.

Inversînd relaţiile precedente, obţinem

$$J_\alpha = j_\alpha + u_\alpha q.$$

În fine, putem scrie ecuaţiile constitutive sub forma

$$D_\alpha = \varepsilon E_\alpha; \quad H_\alpha = \frac{1}{\mu} B_\alpha; \quad j_\alpha = \sigma E_\alpha.$$

Acum ecuaţiile lui Maxwell se scriu sub formă vectorială astfel:

$$\bar{\varepsilon}^{\beta\gamma}_\alpha (E_{\gamma/\beta} + E_\gamma A_\beta) = - \bar{g}^\beta_\alpha \frac{\mathrm{d}B_\beta}{\mathrm{d}s} + u_{\alpha/\beta} B^\beta - u^\beta_{/\beta} B_\alpha, \; B^\varkappa_{/\varkappa} - \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma} E_\alpha u_{\beta/\gamma} = 0,$$

$$\bar{\varepsilon}^{\beta\gamma}_\alpha (H_{\gamma/\beta} + H_\gamma A_\beta) = \bar{g}^\beta_\alpha \frac{\mathrm{d}D_\beta}{\mathrm{d}s} - u_{\alpha/\beta} D^\beta + u^\beta_{/\beta} D_\alpha + \frac{1}{c} j_\alpha,$$

$$D^\alpha_{/\alpha} + \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma} H_\alpha u_{\beta/\gamma} = q.$$

După efectuarea calculelor, acele ecuaţii ale lui Maxwell, care nu sînt satisfăcute identic, devin

$$E_{3,1} + E_3 A_1 = 0; \quad E_{2,1} + E_2 A_1 = 0; \quad H_{3,1} + H_3 A_1 = 0; \quad H_{2,1} + H_2 A_1 = 0,$$

$$\mu \left(H_{1,1} + \frac{c^2}{r(c^2 - r^2\omega^2)} H_1 \right) + \frac{2c\omega}{c^2 - r^2\omega^2} E_3 = 0, \; \varepsilon \left(E_{1,1} + \right.$$

$$\left. + \frac{c^2}{r(c^2 - r^2\omega^2)} E_1 \right) - \frac{2c\omega}{c^2 - r^2\omega^2} H_3 = q.$$

Aceste ecuaţii au fost obţinute numai pe baza structurii spaţiului pseudoriemannian în sistemul de coordonate cilindrice şi în ipoteza că toate funcţiile depind numai de $x^1 \equiv r$. Din primele patru ecuaţii rezultă

$$E_2 = E_3 = H_2 = H_3 = 0.$$

Astfel, ultimele două ecuații capătă forma:

$$H_{1,1} + \frac{c^2}{r(c^2 - r^2\omega^2)} H_1 = 0, \quad \varepsilon \left(E_{1,1} + \frac{c^2}{r(c^2 - r^2\omega^2)} E_1 \right) = q.$$

Soluția generală a primei ecuații este

$$H_1 = C \frac{\sqrt{c^2 - r^2\omega^2}}{r}$$

și cum componenta H_1 a cîmpului magnetic nu poate fi infinită pe axa cilindrului, rezultă că C trebuie să fie egală cu zero, de unde $H_1 = 0$.

Integrînd cea de a doua ecuație în ipoteza că pe frontiera cilindrului componenta normală a inducției electrice este continuă, obținem cîmpul electric E_1^i din interiorul, respectiv E_1^e din exteriorul cilindrului.

$$E_1^i = \frac{q\sqrt{c^2 - r^2\omega^2}}{\varepsilon r\omega^2}(c - \sqrt{c^2 r^2 \omega^2}); \quad E_1^e = \frac{q(c - \sqrt{c^2 - a^2\omega^2})}{\varepsilon\omega^2} \cdot \frac{\sqrt{c^2 - r^2\omega^2}}{r},$$

a fiind raza cilindrului.

În concluzie, cîmpul magnetic este nul, iar cel electric are numai componentă radială nenulă.

Dacă cilindrul nu se află în cîmpul gravitațional menționat ($\omega = 0$), atunci cîmpul electric interior, respectiv exterior, devine

$$E_1^i = \frac{qr}{2\varepsilon}; \quad E_1^e = \frac{qa^2}{2\varepsilon r},$$

regăsind rezultatul cunoscut din teoria clasică.

Primită la redacție la 25 februarie 1983

BIBLIOGRAFIE

1. ALDO BRESSAN, *Relativistic Theories of Materials*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.
2. ȘTEFAN GYÉRESI, *Asupra interacțiunii electromecanice în repere neinerțiale*, Teză de doctorat, 1982.

ACȚIUNI CONCENTRATE ASUPRA BARELOR ȘI PLĂCILOR

de V. ILLE, I. BORȘ
Institutul politehnic Cluj-Napoca

În lucrare se utilizează distribuția Dirac și primele trei derivate ale acesteia cu ajutorul cărora se definesc funcțiile de încărcare de tip forță concentrată, precum și momentele concentrate dirijate de ordinul I, II și III. Se studiază apoi stările de tensiuni și deformații în elementele de rezistență, în bare și în plăci plane, supuse acțiunii sarcinilor concentrate reprezentate prin funcții de tip momente concentrate dirijate de ordinul II și III.
Rezultatele sînt aplicate în determinarea coeficienților de rigiditate ai barei drepte precum și în determinarea stării de solicitare în plăcile plane dreptunghiulare, avînd o linie de îmbinare articulată.

1. ACȚIUNI CONCENTRATE ASUPRA BARELOR

Printre tipurile de acțiuni concentrate asupra solidului deformabil, pe lîngă forța concentrată și momentul concentrat (definit ca dipol de forțe concentrate) se poate introduce noțiunea de dipol de momente concentrate, sau moment dirijat de ordinul II (dacă se consideră două momente concentrate egale și de sensuri contrare situate la distanța Δx, printr-un proces de trecere la limită).

Dacă la momentul concentrat se ajunge prin procesul de trecere la limită a două forțe concentrate paralele, egale în mărime și de sensuri contrare, distanțate cu Δx, iar pentru P ca forță concentrată se consideră expresia $P\delta(x-a)$, unde $\delta(x-a)$ este distribuția Dirac, dipolul de forțe concentrate se poate exprima prin

$$\lim_{\Delta x\to 0} P[\delta(x-a+\Delta x)-\delta(x-a)] =$$

$$= P\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\delta(x-a+\Delta x)-\delta(x-a)}{\Delta x}\Delta x = M\delta'(x-a) \qquad (1)$$

deoarece $P\Delta x = M =$ constant prin trecerea la limită.

Printr-un raționament asemănător se va exprima momentul concentrat dirijat de ordinul II,

$$\lim_{\Delta x\to 0} M[\delta'(x-a+\Delta x)-\delta'(x-a)] =$$

$$= M\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\delta'(x-a+\Delta x)-\delta'(x-a)}{\Delta x}\Delta x = B\delta''(x-a), \qquad (2)$$

unde $M\,\Delta x = B =$ constant, prin trecerea la limită.

Continuînd raționamentul, considerînd o pereche de două momente concentrate dirijate de ordinul II, paralele, egale în mărime și de sensuri

contrare la distanța Δx, acțiunea concentrată corespunzătoare, numită moment concentrat dirijat de ordinul III, se va scrie

$$\lim_{\Delta x \to 0} B[\delta''(x - a + \Delta x) - \delta''(x - a)] = \\ = B \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\delta''(x - a + \Delta x) - \delta(x - a)}{\Delta x} \Delta x = H\delta'''(x - a), \tag{3}$$

unde $B\ \Delta x = H =$ constant, prin trecerea la limită.

Acțiunile concentrate asupra solidului deformabil le vom putea exprima prin funcții de încărcare de tip forță concentrată și momente concentrate dirijate de ordinul I, II și III, modelate matematic prin distribuția lui Dirac și primele trei derivate ale sale.

În figura 1 se arată acțiunea și modul de exprimare a unor asemenea funcții de încărcare, aplicate în secțiunea $x = a$ a unei bare. Punctat,

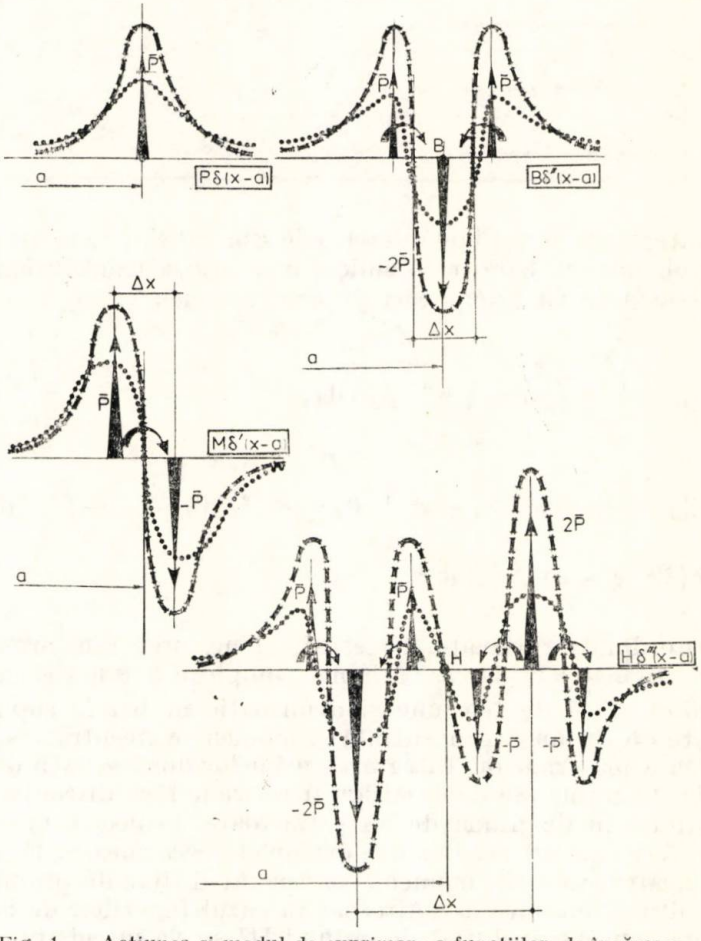


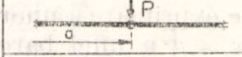
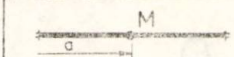
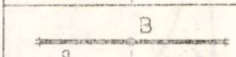
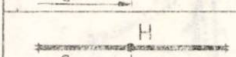
Fig. 1. — Acțiunea și modul de exprimare a funcțiilor de încărcare de tip concentrat.

este redat și modul de acțiune a acestor tipuri de încărcări dacă la noțiunea de forță concentrată se ajunge printr-un proces de trecere la limită în sensul teoriei distribuțiilor a unui șir reprezentativ δ.

Acceptînd în studiul stării de tensiune și deformație într-o bară, la acțiunile concentrate exprimate prin funcțiile de încărcare mai sus menționate, ipoteza lui Bernoulli, ecuațiile diferențiale de echilibru se vor scrie așa cum reise din tabelul 1.

Tabel 1

Acțiunea și formele ecuației diferențiale a barei.

ACȚIUNEA	ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ DE ECHILIBRU
	$y^{IV} = \frac{P}{EI}\,\delta(x-a)$
	$y^{IV} = -\frac{M}{EI}\,\delta'(x-a)$
	$y^{IV} = -\frac{B}{EI}\,\delta''(x-a)$
	$y^{IV} = -\frac{H}{EI}\,\delta'''(x-a)$

În integrarea ecuațiilor diferențiale din tabelul 1, pentru obținerea stării de solicitare în bară, este indicat a se utiliza transformata Laplace. Pentru aceasta se va ține seama de următoarele:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = L(s) = \int_0^\infty e^{-xs} f(x)\,dx,$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = s^n L(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0), \qquad (4)$$

$$\mathcal{L}\{\delta^{(n)}(x-a)\} = s^n e^{-as},$$

unde n este ordinul de derivare, $L(s)$ este imaginea prin transformata Laplace a funcției original $f(x)$, iar s, variabila complexă a funcției imagine.

Studiul stării de tensiune și deformație în barele supuse acțiunii concentrate de tip forță concentrată și moment concentrat este cunoscut din rezistența materialelor. Integrarea primelor două ecuații din tabelul 1 conduce la diagrame ale deplasărilor și rotirilor fără discontinuități și la discontinuitate în diagrama de forțe tăietoare, respectiv momente încovoietoare. Așa cum va rezulta din exemplele ce urmează, în cazul funcțiilor de încărcare de tip moment concentrat dirijat de ordinul II se va înregistra discontinuitate în rotire, iar în cazul funcțiilor de încărcare de tip moment concentrat dirijat de ordinul III se va înregistra discontinuitate în deplasare, la abscisa $x = a$. Se mai constată, de asemenea, că

acțiunea funcțiilor de încărcare de tip moment concentrat dirijat de ordinul II și III nu conduc la stări de tensiuni și deformații în barele static determinate, rezultînd doar deplasări de corp rigid.

1.1. BARA DUBLU ÎNCASTRATĂ SUPUSĂ UNEI FUNCȚII DE ÎNCĂRCARE DE TIP MOMENT CONCENTRAT DIRIJAT DE ORDINUL II

Fie bara de rigiditate EI și lungime l (fig. 2), supusă unei funcții de încărcare de tip moment concentrat dirijat de ordinul II la abscisa $x = a$.

Ecuația diferențială de echilibru se scrie

$$y^{IV} = -\frac{B}{EI}\,\delta''(x-a), \tag{5}$$

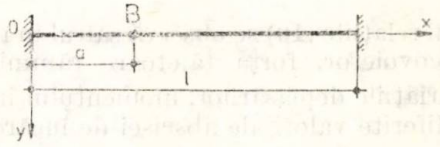


Fig. 2. — Moment concentrat de ordinul II pe bară.

căreia dacă i se aplică transformata Laplace, ținînd cont de (4) se obține

$$s^4 L = s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - y'''(0) = -\frac{B}{EI}\,s^2\,e^{-as}, \tag{6}$$

de unde funcția imagine are forma

$$L = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} - \frac{B}{EI}\,\frac{e^{-as}}{s^2}, \tag{7}$$

în care s-au avut în vedere condițiile în origine (s-a notat

$$C_1 = y''(0);\quad C_2 = y'''(0)).$$

Efectuînd transformata inversă, sîntem conduși la funcția original

$$y = \frac{C_1}{2}\,x^2 + \frac{C_2}{6}\,x^3 - \frac{B}{EI}\,(x-a)\,\theta(x-a), \tag{8}$$

în care $\theta(x-a)$ este distribuția Heaviside. Pentru efectuarea transformatei inverse s-au utilizat relațiile:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!};\quad 0! = 1,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^n}\right\} = \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\,\theta(x-a). \tag{9}$$

Ținînd cont de condițiile în capătul $x = l\,(y(l) = 0\,;\ y'(l) = 0)$, se determină constantele de integrare C_1 și C_2, respectiv starea de solicitare în bară,

$$y = \left[\frac{2l - 3a}{l^2}x^2 - \frac{l - 2a}{l^3}x^3 - (x - a)\theta(x - a)\right]\frac{B}{EI},$$

$$y' = \left[2\frac{2l - 3a}{l^2}x - 3\frac{l - 2a}{l^3}x^2 - \theta(x - a)\right]\frac{B}{EI},$$

$$M = -\left[2\frac{2l - 3a}{l^2} - 6\frac{l - 2a}{l^3}x\right]B, \tag{10}$$

$$T = 6\frac{l - 2a}{l^3}B.$$

Din relațiile (10) se observă saltul în rotire, variația liniară a momentului încovoietor, forța tăietoare rămînînd constantă.

Variațiile deplasărilor, momentului încovoietor și ale forței tăietoare pentru diferite valori ale abscisei de încărcare sînt date în figura 3.

În cazul $a = 0$, rotirea în secțiunea $x = 0$ este egală cu B/EI, de unde rezultă că, aplicînd la capetele barei o funcție de încărcare de tip moment concentrat de ordinul II în mărime B egală cu rigiditatea EI, se obțin coeficienții de rigiditate a barei referitori la rotirea unitară.

1.2. BARA DUBLU ÎNCASTRATĂ SUPUSĂ UNEI FUNCȚII DE ÎNCĂRCARE DE TIP MOMENT CONCENTRAT DIRIJAT DE ORDINUL III

Fie bara de rigiditate EI și lungime l (fig. 4) supusă unei funcții de încărcare de tip moment concentrat dirijat de ordinul III.

Așa cum rezultă și din tabelul 1, ecuația diferențială de echilibru se scrie

$$y^{IV} = -\frac{H}{EI}\delta'''(x - a), \tag{11}$$

căreia, dacă i se aplică transformata Laplace ca și în cazul precedent, se obține soluția y din care apoi se determină starea de solicitare în bară :

$$y = \frac{3}{l^2}x^2 - \frac{2}{l^3}x^3 - \theta(x - a)\frac{H}{EI},$$

$$M = -\frac{6}{l^2}x - \frac{6}{l^3}xH, \tag{12}$$

$$T = \frac{12}{l^3}H.$$

Din relațiile (12) se observă saltul în deplasare, variația liniară a momentului încovoietor și forța tăietoare constantă.

Variațiile deplasărilor, momentului încovoietor și ale forței tăietoare pentru diferite valori ale abscisei de încărcare sînt date în figura 5.

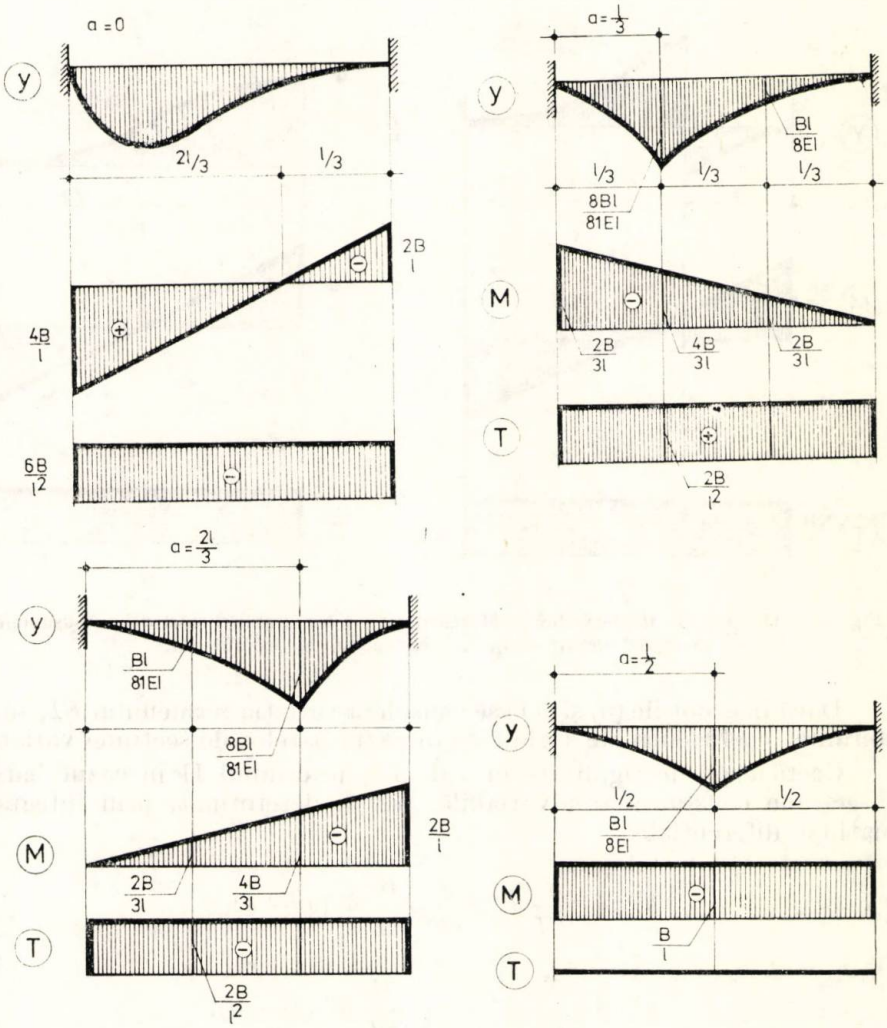


Fig. 3. — Diagramele deplasărilor și eforturilor în bara dublu încastrată supusă unei încărcări de tip moment concentrat de ordinul II.

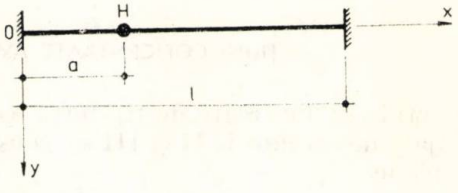


Fig. 4. — Moment concentrat de ordinul III pe bară.

În cazul $a = 0$, deplasarea în secțiunea $x = 0$ este egală cu H/EI, de unde rezultă că, aplicînd o funcție de încărcare de tip moment concentrat dirijat de ordinul III, în mărime H egală cu rigiditatea EI, se obțin coeficienții de rigiditate ai barei referitori la deplasarea unitară.

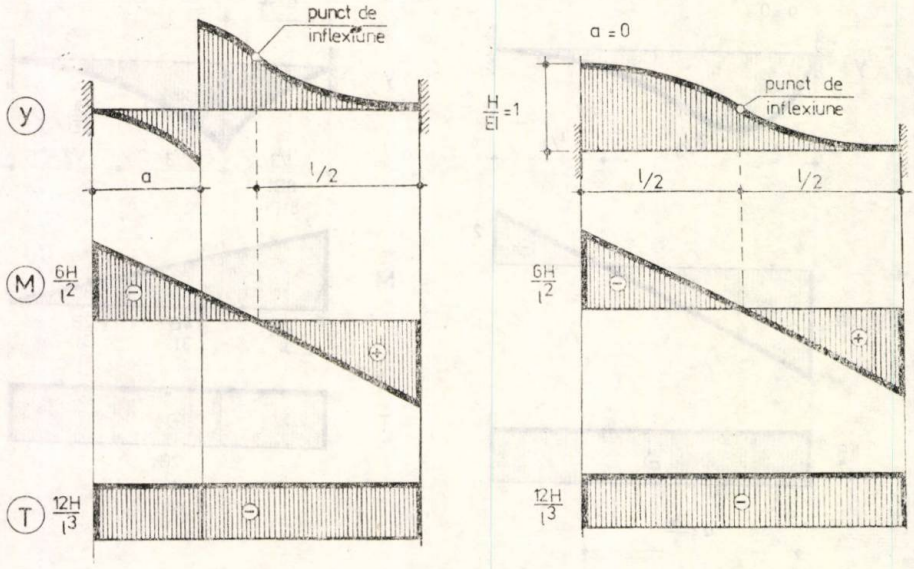


Fig. 5. — Diagramele deplasărilor și eforturilor în bara dublu încastrată supusă unei încărcări de tip moment concentrat de ordinul III.

Dacă în ecuațiile (5) și (11) se consideră variația termenului EI, se pot determina coeficienții de rigiditate în cazul barelor de secțiune variabilă.

Coeficienții de rigiditate în calculul de ordinul II în cazul barelor de secțiune constantă sau variabilă pot fi determinați prin integrarea ecuațiilor diferențiale

$$y^{IV} + \frac{N}{EI} y'' = -\frac{B}{EI} \delta''(x - a),$$

$$y^{IV} + \frac{N}{EI} y'' = -\frac{H}{EI} \delta'''(x - a), \tag{13}$$

unde $a = 0$, respectiv $a = l$, iar N este efortul axial în bară.

2. ACȚIUNI CONCENTRATE ASUPRA PLĂCILOR

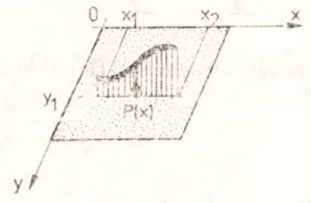
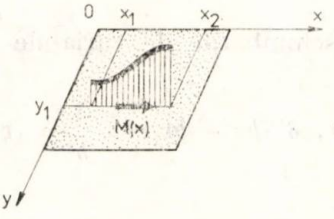
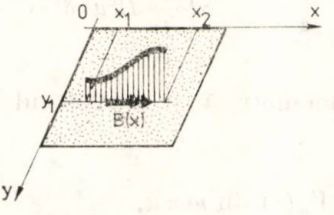
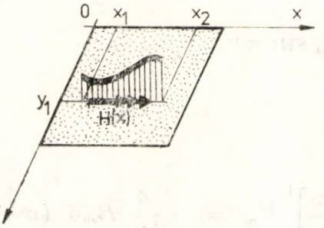
Funcțiile de încărcare de tip forță concentrată și momente concentrate dirijate de ordinul I, II și III se consideră că pot acționa și asupra plăcilor plane.

În acest caz al domeniului bidimensional, funcțiile de încărcare pot acționa punctual sau distribuit pe o linie. În cazul în care încărcarea este distribuită, la o anumită ordonată y_1, paralel cu axa Ox, tabelul 2 prezintă modul de acțiune și ecuațiile diferențiale de echilibru corespunzătoare.

Primele două cazuri din acest tabel au fost studiate de către autori [4], [5]. În lucrarea de față se studiază următoarele două cazuri din tabelul 2, cu aplicație la plăcile dreptunghiulare având o linie de îmbinare articulată paralelă cu una din laturi.

Tabelul 2

Acțiunile și forma ecuației diferențiale de echilibru a plăcii.

	ACȚIUNEA	ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ DE ECHILIBRU
1		$\nabla^4 w = \frac{P(x)}{D}\delta(y-y_1)$
2		$\nabla^4 w = -\frac{M(x)}{D}\delta'(y-y_1)$
3		$\nabla^4 w = -\frac{B(x)}{D}\delta''(y-y_1)$
4		$\nabla^4 w = -\frac{H(x)}{D}\delta'''(y-y_1)$

2.1. PLACA PLANĂ DREPTUNGHIULARĂ SIMPLU REZEMATĂ PE CONTUR SUPUSĂ UNEI FUNCȚII DE ÎNCĂRCARE DE TIP MOMENT CONCENTRAT DIRIJAT DE ORDINUL II

Fie placa plană din figura 6 supusă funcției de încărcare $B(x)$ distribuită pe linia $y = y_1$.

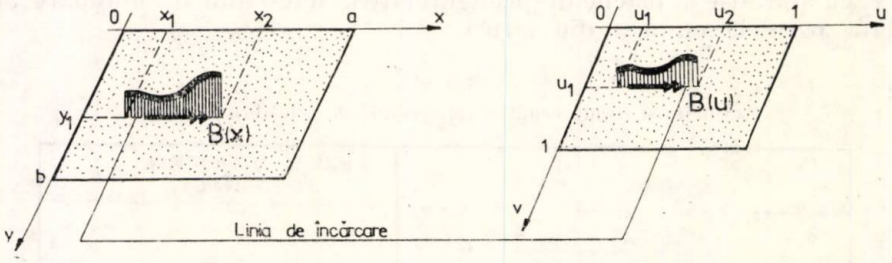


Fig. 6. — Momente concentrate dirijate de ordinul II pe placă.

Ecuația diferențială a plăcii,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\,\frac{B(x)}{D}\,\delta''(y - y_1), \tag{14}$$

care, în coordonate reduse, prin schimbările de variabile

$$u = x/a\,;\ v = y/b\,;\ \alpha = a/b\,;\ \delta''(bv - bv_1) = \frac{1}{b^3}\,\delta''(v - v_1),$$

devine

$$\frac{\partial^4 w}{\partial u^4} + 2\alpha^2\,\frac{\partial^4 w}{\partial u^2 \partial v^2} + \alpha^4\,\frac{\partial^4 w}{\partial v^2} = -\,\alpha^4\,\frac{b}{D}\,B(u)\,\delta''(v - v_1). \tag{15}$$

Alegînd soluția în serie trigonometrică și dezvoltînd în același fel și funcția încărcare sub forma

$$w(u, v) = \sum_m V_m(v) \sin m\pi u, \tag{16}$$

$$B(u) = \sum_m B_m \sin \pi u,$$

se obține ecuația diferențială

$$V_m^{\mathrm{IV}} - 2\left[\frac{m\pi}{\alpha}\right]^2 V_m'' + \left[\frac{m\pi}{\alpha}\right]^4 V_m = -\,\frac{b}{D}\,B_m \delta''(v - v_1). \tag{17}$$

Integrînd această ecuație diferențială, utilizînd transformata Laplace se obține funcția imagine

$$L_m(s) = \mathcal{L}\{V_m(v)\},$$

de forma

$$L_m = \frac{1}{s^2 - \dfrac{m^2\pi^2}{\alpha^2}} - \frac{m^2\pi^2}{\alpha^2}\frac{1}{\left(s^2 - \dfrac{m^2\pi^2}{\alpha^2}\right)^2} C_{2m} + \frac{1}{\left(s^2 - \dfrac{m^2\pi^2}{\alpha^2}\right)^2} C_{4m} -$$

$$- \frac{b}{D} B_m \frac{s^2 e^{-v_1 s}}{\left(s^2 - \dfrac{m^2\pi^2}{\alpha^2}\right)^2} \tag{18}$$

unde s-a avut în vedere că

$$\mathcal{L}\{\delta''(v - v_1)\} = s^2 e^{-v_1 s},$$

$$V_m(0) = C_{1m} = 0, \quad V_m''(0) = C_{3m} = 0,$$

$$V_m'(0) = C_{2m}, \quad V_m'''(0) = C_{4m}.$$

Efectuînd transformata inversă, sîntem conduși la funcția originală $V_m(v)$.

Notînd cu $V_m^B(v)$ funcția original redusă cu constanta $b \cdot B_m/D$, aceasta va avea forma

$$V_m^B = \left[1{,}5\,\frac{\alpha}{m\pi} C_{2m} - 0{,}5\,\frac{\alpha^3}{m^3\pi^3} C_{4m}\right] \operatorname{sh}\frac{m\pi}{\alpha} v +$$

$$+ \left[0{,}5\,\frac{\alpha^2}{m^2\pi^2} C_{4m} - 0{,}5 C_{2m}\right] v \operatorname{ch}\frac{m\pi}{\alpha} v - \left[0{,}5\,\frac{\alpha}{m\pi} \operatorname{sh}\frac{m\pi}{\alpha}(v - v_1) +\right.$$

$$\left. + 0{,}5(v - v_1) \operatorname{ch}\frac{m\pi}{\alpha}(v - v_1)\right]\theta(v - v_1). \tag{19}$$

Constantele de integrare C_{2m}, C_{4m} se determină din condițiile limită la $y = b$, care în cazul simplei rezemări pe această latură sînt $V_m^B(1) = 0$; $V_m^{B''}(1) = 0$.

Se obține astfel starea de solicitare în placă dată de relațiile:

$$M_x^B = \frac{1}{b} \sum_m B_m \left[\frac{m^2\pi^2}{\alpha^2} V_m^B - \mu V_m^{B''}\right] \sin m\pi u,$$

$$M_y^B = \frac{1}{b} \sum_m B_m \left[\mu \frac{m^2\pi^2}{\alpha^2} V_m^B - V_m^{B''} \right] \sin m\pi u,$$

$$M_{xy}^B = \frac{1}{b}(1-\mu) \sum_m B_m \left[\frac{m\pi}{\alpha} V_m^{B'} \right] \cos m\pi u,$$

$$T_x^B = \frac{1}{b^2} \sum_m B_m \left[\frac{m^3\pi^3}{\alpha^3} V_m^B - \frac{m\pi}{\alpha} V_m^{B''} \right] \cos m\pi u,$$

$$T_y^B = \frac{1}{b^2} \sum_m B_m \left[\frac{m^2\pi^2}{\alpha^2} V_m^{B'} - V_m^{B'''} \right] \sin m\pi u.$$

2.2. PLACA PLANĂ DREPTUNGHIULARĂ SIMPLU REZEMATĂ PE CONTUR SUPUSĂ UNEI FUNCȚII DE ÎNCĂRCARE DE TIP MOMENT CONCENTRAT DIRIJAT DE ORDINUL III

Fie placa plană din figura 7 supusă funcției de încărcare $H(x)$ distribuită pe linia $y = y_1$.

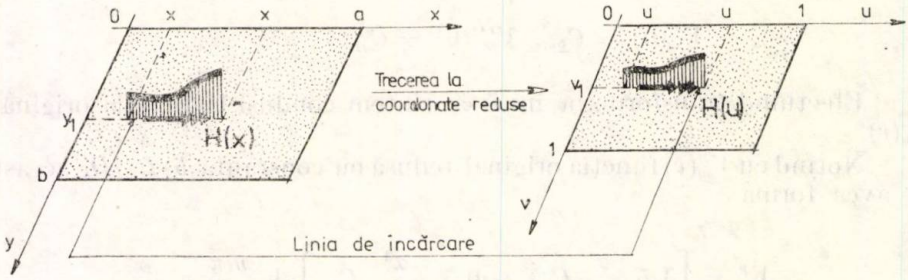


Fig. 7. — Momente concentrate dirijate de ordinul III pe placă.

Ecuația diferențială a plăcii

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{H(x)}{D}\delta'''(y - y_1), \tag{21}$$

în coordonate reduse, prin schimbările de variabile

$$u = x/a\,;\; v = y/b\,;\; \alpha = a/b\,;\; \delta'''(bv - bv_1) = \frac{1}{b^4}\delta'''(v - v_1),$$

devine

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\alpha^2 \frac{\partial^4 w}{\partial u^2 \partial v^2} + \alpha^4 \frac{\partial^4 w}{\partial v^4} = -\alpha^4 \frac{1}{D} H(u)\delta'''(v - v_1). \tag{22}$$

Ca și în cazul ecuației (15), se alege soluția w în serie trigonometrică și se dezvoltă în același fel și funcția încărcare $H(u)$:

$$w(u, v) = \sum_m V_m(v) \sin m\pi u,$$
$$H(u) = \sum_m H_m \sin \pi u. \tag{23}$$

Se obține astfel ecuația diferențială

$$V_m^{IV} - 2\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2 V_m'' + \left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2 V_m = -\frac{1}{D} H_m \delta'''(v - v_1), \tag{24}$$

care, integrată cu ajutorul transformatei Laplace în aceleași condiții limită ca și ecuația (15), conduce la funcția original V_m^H (cu V_m^H s-a notat funcția original redusă cu constanta H_m/D)

$$V_m^H = \left[1{,}5\,\frac{\alpha}{m\pi} C_{2m} - 0{,}5\,\frac{\alpha^3}{m^3\pi^3} C_{4m}\right] \operatorname{sh}\frac{m\pi}{\alpha} v +$$
$$+ \left[0{,}5\,\frac{\alpha^2}{m^2\pi^2} C_{4m} - 0{,}5 C_{2m}\right] v \operatorname{ch}\frac{m\pi}{\alpha} v -$$
$$- \left[\operatorname{ch}\frac{m\pi}{\alpha}(v - v_1) + 0{,}5\,\frac{m\pi}{\alpha}(v - v_1) \operatorname{sh}\frac{m\pi}{\alpha}(v - v_1)\right] \theta(v - v_1). \tag{25}$$

Constantele de integrare C_{2m}, C_{4m} se determină din condițiile limită la $y = b$, care în cazul simplei rezemări pe această latură sînt $V_m^H(1) = 0$; $V_m^{H''}(1) = 0$.

Se obține astfel starea de solicitare în placă dată de relațiile :

$$w = \frac{1}{D} \sum_m H_m V_m(v) \sin m\pi u,$$
$$M_x^H = \frac{1}{b^2} \sum_m H_m \left[\frac{m^2\pi^2}{\alpha^2} V_m^H - \mu V_m^{H''}\right] \sin m\pi u,$$
$$M_y^H = \frac{1}{b^2} \sum_m H_m \left[\mu \frac{m^2\pi^2}{\alpha^2} V_m^H - V_m^{H''}\right] \sin m\pi u, \tag{26}$$
$$M_{xy}^H = \frac{1}{b^2}(1 - \mu) \sum_m H_m \left[\frac{m\pi}{\alpha} V_m^{H'}\right] \cos m\pi u,$$

$$T_x^H = \frac{1}{b^3} \sum_m H_m \left[\frac{m^3\pi^3}{\alpha} V_m^H - \frac{m\pi}{\alpha} V_m^{H''} \right] \cos m\pi u,$$

$$T_y^H = \frac{1}{b^3} \sum_m H_m \left[\frac{m^2\pi^2}{\alpha^2} V_m^{H'} - V_m^{H'''} \right] \sin \pi u.$$

2.3. PLACA PLANĂ DREPTUNGHIULARĂ SIMPLU REZEMATĂ PE CONTUR SUPUSĂ UNEI FUNCȚII DE ÎNCĂRCARE CONSTANTE ÎN RAPORT CU y

În vederea determinării stării de solicitare în placa plană avînd o linie de îmbinare articulată se va da mai întîi modul de obținere a stării de eforturi în placa plană supusă unei funcții de încărcare constante în raport cu y (în particular, sarcina uniform distribuită p).

Fie placa plană supusă unei funcții de încărcare ca în figura 8.

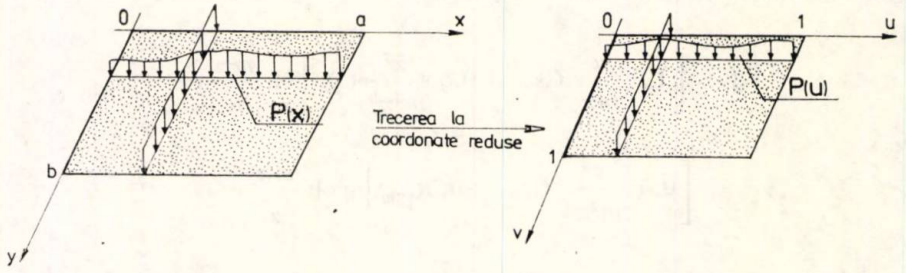


Fig. 8. — Încărcare distribuită constantă cu y, pe placă.

Funcția încărcare se poate pune sub forma

$$p(x, y) = p(x)\theta(y), \tag{27}$$

unde $\theta(y)$ este distribuția lui Heaviside.

Ecuația diferențială a plăcii,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x)}{D}\theta(y), \tag{28}$$

în coordonate reduse, prin schimbările de variabile

$$u = x/a\,;\ v = y/b\,;\ \alpha = a/b\,;\ \theta(bv) = \theta(v),$$

devine

$$\frac{\partial^4 w}{\partial u^4} + 2\alpha\frac{\partial^4 w}{\partial u^2 \partial v^2} + \alpha\frac{\partial^4 w}{\partial v^4} = \frac{a^4}{D}p(u)\theta(v). \tag{29}$$

Se alege soluția w în serie trigonometrică după variabila u și se dezvoltă și încărcarea $p(u)$ în același fel:

$$w(u, v) = \sum_m V_m(v) \sin m\pi u, \tag{30}$$

$$p(u) = \sum_m p_m \sin m\pi u.$$

Se obține ecuația diferențială sub forma

$$V_m^{IV} - 2\frac{m^2\pi^2}{\alpha^2} V_m'' + \frac{m^4\pi^4}{\alpha^4} V_m = \frac{b^4}{D} P_m \theta(v). \tag{31}$$

Aplicînd transformata Laplace ecuației (31) și ținînd cont că $\mathcal{L}\{\theta(v)\} = \frac{1}{s}$, se obține funcția imagine $L_m(s)$, care, prin transformata inversă, conduce la funcția original

$$V_m^p = \left[1{,}5\,\frac{\alpha}{m\pi} C_{2m} - 0{,}5\,\frac{\alpha^3}{m^3\pi^3} C_{4m}\right] \operatorname{sh}\frac{m\pi}{\alpha} v +$$

$$+ \left[0{,}5\,\frac{\alpha^2}{m^2\pi^2} C_{4m} - 0{,}5\, C_{2m}\right] v \operatorname{ch}\frac{m\pi}{\alpha} v +$$

$$+ \left[0{,}5\,\frac{\alpha^3}{m^3\pi^3} v \operatorname{sh}\frac{m\pi}{\alpha} v - \frac{\alpha^4}{m^4\pi^4}\left(\operatorname{ch}\frac{m\pi}{\alpha} v - 1\right)\right]. \tag{32}$$

unde, la fel ca și în cazurile precedente, cu V_m^p s-a notat funcția original redusă cu $b^4 P_m/D$. Constantele C_{2m} și C_{4m} se determină din aceleași condiții puse la $y = b$.

Rezultă starea de solicitare în placă dată de relațiile:

$$w = \frac{b^4}{D} \sum_m p_m V_m^p(v) \sin m\pi u,$$

$$M_x^p = b^2 \sum_m p_m \left[\frac{m^2\pi^2}{\alpha^2} V_m^p - \mu V_m^{p''}\right] \sin m\pi u,$$

$$M_y^p = b^2 \sum_m p_m \left[\mu\frac{m^2\pi^2}{\alpha^2} V_m^p - V_m^{p''}\right] \sin m\pi u, \tag{33}$$

$$M_{xy}^p = (1-\mu) b^2 \sum_m p_m \left[\frac{m\pi}{\alpha} V_m^{p'}\right] \cos m\pi u,$$

$$T_x^p = b \sum_m p_m \left[\frac{m^3\pi^3}{\alpha^3} V_m^p - \frac{m\pi}{\alpha} V_m^{p''} \right] \cos m\pi u,$$

$$T_y^p = b \sum_m p_m \left[\frac{m^2\pi^2}{\alpha^2} V_m^{p'} - V_m^{p''} \right] \sin m\pi u.$$

2.4. PLACA PLANĂ DREPTUNGHIULARĂ SIMPLU REZEMATĂ PE CONTUR AVÎND O LINIE DE ÎMBINARE ARTICULATĂ

Elementele prefabricate pentru planșee au o largă utilizare la construcțiile de locuințe în condițiile industrializării execuției. Greutatea prefabricatelor este limitată de capacitatea macaralei cu ajutorul căreia se efectuează montarea lor.

Dacă dimensiunile plăcii sînt mari astfel încît se depășește această limită a greutății, placa se execută din două elemente, iar pentru eliminarea manoperelor de monolitizare se poate utiliza un detaliu de îmbinare ca cel din figura 9, care transmite forță tăietoare fără a transmite moment încovoietor pe direcția normală liniei de îmbinare (articulație deplasabilă).

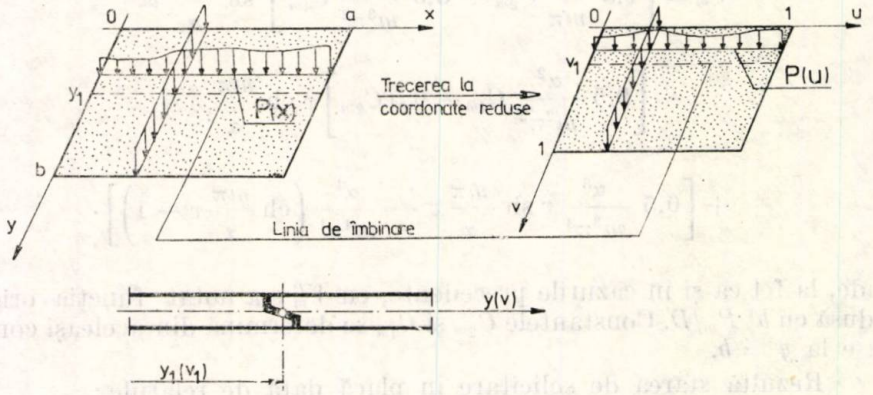


Fig. 9. — Placă plană avînd o linie de îmbinare articulată.

Studiul acestei plăci cu discontinuitate în rotire la ordonata y_1 se reduce în metoda dată la a considera o placă fictivă cu continuitate în rotire (fără linie de articulație), încărcată cu sarcina exterioară, suprapusă cu o funcție de încărcare de tip moment concentrat dirijat de ordinul II, $B(x)$, la ordonata y_1 care să conducă în placă la moment încovoietor $M_y(x, y_1)$ nul. Placa fictivă astfel încărcată se comportă ca și cea reală cu discontinuitate în rotire.

În placa fictivă încărcată cu o sarcină constantă în raport cu y, momentul încovoietor la ordonata y_1 este dat de relația

$$M_y^p = b^2 \sum_m p_m \left[\mu \frac{m^2\pi^2}{\alpha^2} V_m^p(y_1) - V_m^{p''}(y_1) \right] \sin \frac{m\pi x}{a}, \qquad (34)$$

iar din funcția de încărcare $B(x)$

$$M_y^B = \frac{1}{b} \sum_m B_m \left[\mu \frac{m^2\pi^2}{\alpha^2} V_m^B(y_1) - V_m^{B''}(y_1) \right] \sin \frac{m\pi x}{a}. \tag{35}$$

Funcția de încărcare necunoscută $B(x)$ se alege în termenii nedeterminați B_m ai dezvoltării în serie Fourier, care se vor determina punînd condiția ca de-a lungul liniei $y = y_1$ momentul încovoietor M_y, datorat ambelor încărcări, să fie nul, adică

$$M_y^B + M_y^p = 0 \tag{36}$$

sau

$$B_m \frac{1}{b} \left[\mu \frac{m^2\pi^2}{\alpha^2} V_m^B(y_1) - V_m^{B''}(y_1) \right] +$$

$$+ p_m b^2 \left[\mu \frac{m^2\pi^2}{\alpha^2} V_m^p(y_1) - V_m^{p''}(y_1) \right] = 0, \tag{37}$$

de unde

$$B_m = - b^3 p_m \frac{\mu \frac{m^2\pi^2}{\alpha^2} V_m^p(y_1) - V_m^{p''}(y_1)}{\mu \frac{m^2\pi^2}{\alpha^2} V_m^B(y_1) - V_m^{B''}(y_1)}. \tag{38}$$

În (38) funcțiile $V_m^{p''}$, $V_m^{B''}$ sînt derivatele funcțiilor V_m^p, respectiv V_m^B date de (19) și (32).

Suprapunînd stării de solicitare din sarcina exterioară p, în placa fictivă, starea de solicitare din funcția de încărcare de tip moment concentrat dirijat de ordinul II, $B(x)$, determinată de relația (38), se găsește starea de solicitare în placa fictivă care satisface condiției de moment M_y nul de-a lungul liniei $y = y_1$, adică starea de solicitare în placa reală cu linie de îmbinare articulată.

2.4.1. Deplasări și eforturi secționale într-o placă avînd o linie de îmbinare articulată

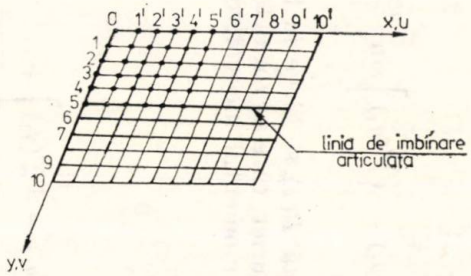
În baza relațiilor deduse mai înainte s-a elaborat un program în limbajul FORTRAN pentru determinarea stării de solicitare în plăcile plane dreptunghiulare simplu rezemate pe contur avînd o linie de îmbinare articulată paralelă cu o latură.

În cazul unei plăci pătrate simplu rezemate pe contur, avînd la mijloc o linie de articulație paralelă cu una din laturi, încărcată cu o sarcină uniform distribuită p, se dă în tabelul 3 starea de solicitare în placă în diferite puncte. În secțiunile cele mai solicitate sînt reprezentate în diagramele din figura 10 distribuțiile eforturilor.

Tabelul 3

Valorile deplasărilor și eforturile secționale.

Punct	w	M_x	M_y	M_{xy}	T_x	T_y
0,0	0	0	0	0,03505	0	0
0,1	0	0	0	0,03296	0,1238	0
0,2	0	0	0	0,02917	0,1884	0
0,3	0	0	0	0,02581	0,2168	0
0,4	0	0	0	0,02442	0,2157	0
0,5	0	0	0	0,01835	0,1828	0
1'0	0	0	0	0,03239	0	0,1530
1'1	0,0004776	0,008163	0,006645	0,03071	0,09563	0,08282
1'2	0,009122	0,01384	0,008949	0,02742	0,1508	0,04268
1'3	0,001296	0,1771	0,008636	0,02440	0,1763	0,01300
1'4	0,001645	0,02032	0,005926	0,02310	0,1761	0,00621
1'5	0,001998	0,02226	0	0	0,1498	0
2'0	0	0	0	0,02586	0	0,2338
2'1	0,0008902	0,01286	0,01107	0,02493	0,04645	0,1410
2'2	0,001706	0,02248	0,01538	0,02270	0,08246	0,01629
2'3	0,002431	0,02939	0,0493	0,02044	0,1012	0,02419
2'4	0,003092	0,03419	0,01009	0,01939	0,1023	0,01135
2'5	0,00759	0,03766	0	0	0,08778	0
3'0	0	0	0	0,01785	0	0,2608
3'1	0,001200	0,01473	0,01339	0,01735	0,02327	0,1735
3'2	0,002308	0,02650	0,01914	0,01603	0,04388	0,09818
3'3	0,003297	0,03536	0,01870	0,01460	0,05550	0,03235
3'4	0,004202	0,04171	0,01250	0,01387	0,05677	0,01741
3'5	0,005112	0,04618	0	0	0,04864	0
4'0	0	0	0	0,009237	0	0,2830
4'1	0,001392	0,01598	0,01475	0,008930	0,01664	0,1915
4'2	0,002682	0,02892	0,02133	0,008270	0,02694	0,1103
4'4	0,003838	0,03885	0,02092	0,007574	0,03252	0,03711
4'4	0,004897	0,04607	0,01395	0,007207	0,03303	0,01832
4'5	0,005961	0,05113	0	0	0,02782	0
5'0	0	0	0	0	0	0,2966
5'1	0,001458	0,01663	0,01531	0	0	0,1981
5'2	0,002809	0,03000	0,02213	0	0	0,1143
5'3	0,004022	0,04028	0,02173	0	0	0,03864
5'4	0,005134	0,04779	0,01452	0	0	0,01951
5'5	0,006251	0,05304	0	0	0	0



MULTIPLICATORI

$w : \frac{pa^4}{D}$

$M_x , M_y , M_{xy} : pa^2$

$T_x , T_y : pa$

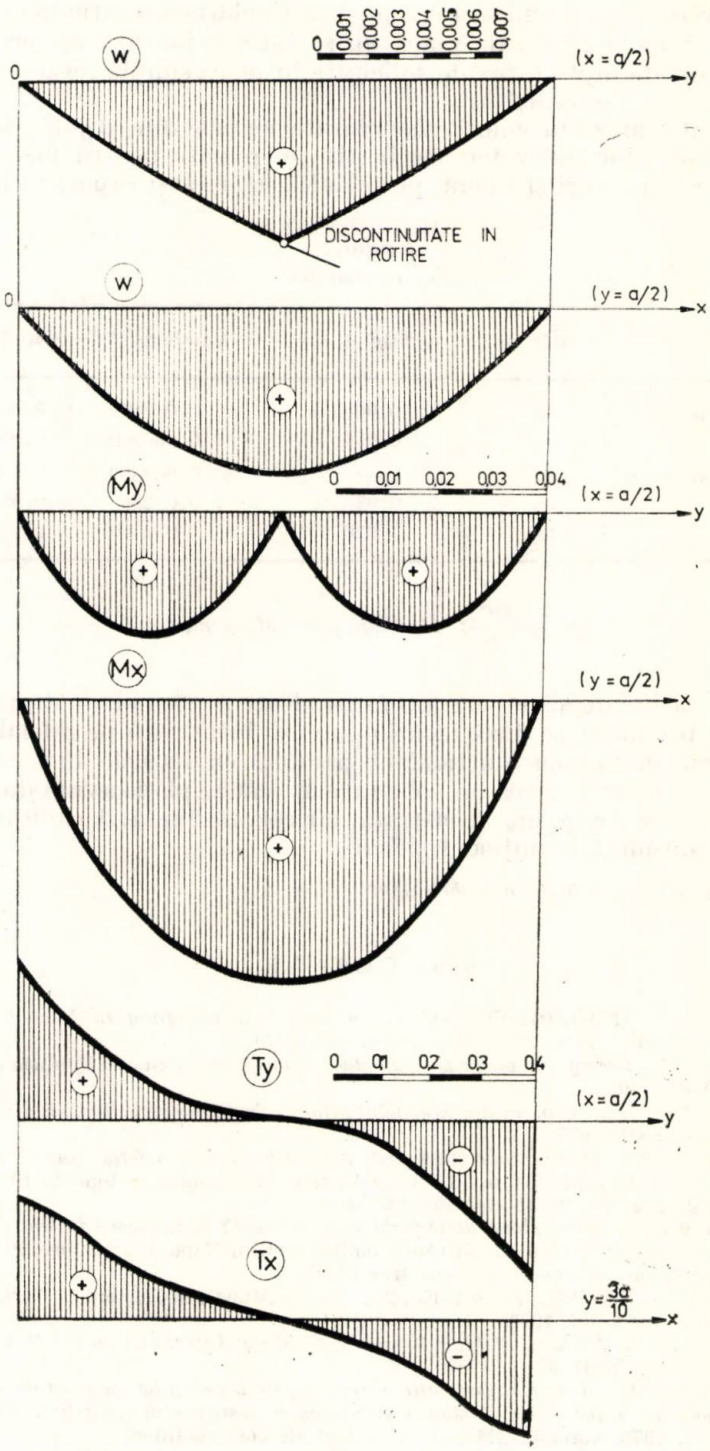


Fig. 10. — Diagramele deplasărilor și eforturilor secționale.

Deoarece în exemplul tratat linia de articulaţie este situată la mijlocul plăcii, cele două porţiuni de placă nu se interacţionează reciproc, astfel că s-a obţinut de fapt starea de solicitare în placa simplu rezemată pe trei laturi şi liberă pe cealaltă.

Tabelul 4 prezintă valorile comparate cu cele din [6], [7] ale săgeţilor şi momentelor încovoietoare în cîteva puncte pentru placa simplu rezemată pe trei laturi şi liberă pe cealaltă la acelaşi raport al laturilor.

Tabelul 4

Valori comparative

Punct	Mărime	Stiglat [6]	Vainberg [7]	Metoda propusă
Mijlocul laturii libere	k_w	0,005555	0,007097	0,006251
	m_x	0,051120	0,060200	0,053040
Centrul plăcii	k_w	—	0,003809	0,003415
	m_x	0,029580	0,02230	0,035140
	m_y	0,026590	0,03850	0,021930

$$w = k_w \frac{pa^4}{D}; \quad M_x = m_x\, pa^2; \quad M_y = m_y\, pa^2.$$

În aceeaşi manieră se pot obţine rezultate pentru placa dreptunghiulară simplu rezemată pe două laturi opuse şi încastrată pe celelalte două, avînd o linie de îmbinare articulată paralelă cu laturile încastrate, din care apoi să se obţină starea de solicitare în plăcile plane avînd două laturi opuse simplu rezemate, una încastrată, iar celaltă liberă, dacă linia de articulare se consideră la mijlocul plăcii.

Primită la redacţie la 13 octombrie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. W. KECS, P. P. TEODORESCU, *Aplicaţii ale teoriei distribuţiilor în Mecanică*, Editura Academiei R.S. România, Bucureşti, 1970.
2. M. R. SPIEGEL, *Theory and problems of Laplace Transforms*, Schaum Publishing Co., New York, 1965.
3. M. SOARE, *Plăci plane* cap. VI din *Manualul pentru calculul construcţiilor*, Editura tehnică, Bucureşti, 1977.
4. V. ILLE, I. BORŞ, *Placa plană dreptunghiulară acţionată de o forţă liniară concentrată*, Sesiunea ştiinţifică a institutului politehnic Cluj-Napoca, octombrie 1978, volumul „Metode de calcul ale construcţiilor".
5. V. ILLE, I. BORŞ, *Placa plană dreptunghiulară acţionată de un moment liniar concentrat*, Sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic Cluj-Napoca, octombrie 1978, volumul „Metode de calcul ale construcţiilor".
6. K. STIGLAT, H. WIPPEL, *Platten*, Ed. 2-a, Berlin, München, Düsseldorf Verlag Wilhlem Ernst & Sohn, 1973.
7. VAINBERG, D. V., *Plastini, diski, balki-stenki*, Gosizdat Literaturi po Stroitelstvo i Arhitecturi USSR, Kiev, 1959.
8. P.P. TEODORESCU, *Cîteva consideraţii asupra acţiunii sarcinilor concentrate în mecanica solidelor deformabile*, Sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic Cluj-Napoca, oct. 1978, volumul „Metode de calcul ale construcţiilor".

ALGORITM ŞI PROGRAM PENTRU CALCULUL DINAMIC LA ÎNCOVOIERE AL ARBORILOR

de N. POSEA, AL. ANGHEL, ŞT. DĂRVĂREANU, I. DUMITRU
Institutul de petrol şi gaze, Ploieşti

Lucrarea prezintă un algoritm pentru calculul vibraţiilor proprii şi forţate ale arborilor în trepte, luînd în consideraţie deformaţiile de încovoiere, deformaţiile de lunecare, inerţia de rotaţie a maselor distribuite a tronsoanelor şi ale discurilor, influenţa forţelor axiale şi elasticitatea lagărelor. Algortimul a fost transpus într-un program, denumit CDINARB, pentru calculatoare electronice cifrice.
Metoda elaborată conduce la rezultate exacte pentru pulsaţiile proprii (turaţiile critice), formele proprii ale oscilaţiei, vibraţiile forţate utilizate.

1. CONSIDERAŢII GENERALE

Arborii constituie principalele elemente de maşini pentru transmisia de puteri la diferite turaţii.

Studiul dinamic al acestora prezintă o mare importanţă teoretică şi practică, pentru buna funcţionare a subansamblelor şi ansamblelor din care fac parte.

Îmbunătăţirea parametrilor funcţionali ai instalaţiilor şi agregatelor a impus creşterea turaţiilor de lucru ale arborilor, ca, de exemplu, la compresoare centrifugale, pompe, turbine etc. Aceasta atrage după sine calculul şi proiectarea cît mai exactă din punct de vedere dinamic a arborilor, cu luarea în considerare a tuturor factorilor de care depinde comportarea dinamică reală. Pe această linie, în lucrarea de faţă se prezintă un algoritm, transpus într-un program pentru calculatoare electronice cifrice, privind calculul dinamic la încovoiere al arborilor în trepte, care ţine seama de distribuţia reală a maselor, de deformaţiile de încovoiere şi de lunecare, de inerţia de rotaţie, de efectul forţelor axiale şi de elasticitatea reazemelor.

Pe baza algoritmului şi programului elaborat, s-a analizat comportarea dinamică a rotorului compresorului centrifugal de fabricaţie Borsig, ce se găseşte în dotarea unor combinate petrochimice.

2. ECUAŢIA DIFERENŢIALĂ A VIBRAŢIILOR PROPRII ŢINÎND SEAMA DE DEFORMAŢIILE DE LUNECARE, INERŢIA DE ROTAŢIE A MASELOR ŞI DE FORŢA AXIALĂ

Dintr-o bară cu masa continuă, supusă la un efort axial de compresiune, se izolează un element de lungime $\mathrm{d}x$ pe care se introduc forţele exterioare şi eforturile în secţiunile *1* şi *2* (fig. 2.1 *a*).

În conformitate cu principiul lui d'Alembert se introduce torsorul forţelor de inerţie avînd componentele :

$$\mathrm{d}F^i = (\rho A\, \mathrm{d}x)\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad \mathrm{d}\mathfrak{M}^i = -(\rho I\, \mathrm{d}x)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \qquad \text{(a)}$$

în care intervin mărimile : ρ — densitatea materialului ; A, I — aria, respectiv, momentul de inerţie geometric al secţiunii transversale faţă de axa de rotaţie ; φ — rotirea secţiunii transversale.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 4, 1983, P. 367–388

Din ecuaţia de proiecţii pe axa y :

$$\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}F^i + f(xt)\mathrm{d}x = 0,$$

şi ecuaţia de momente faţă de punctul 2 (fig. 2.1 *a*)

$$Q\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}\mathfrak{M}^i + N\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\,\mathrm{d}x - \frac{\partial M}{\partial x}\,\mathrm{d}x - f(xt)\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}x}{2} = 0,$$

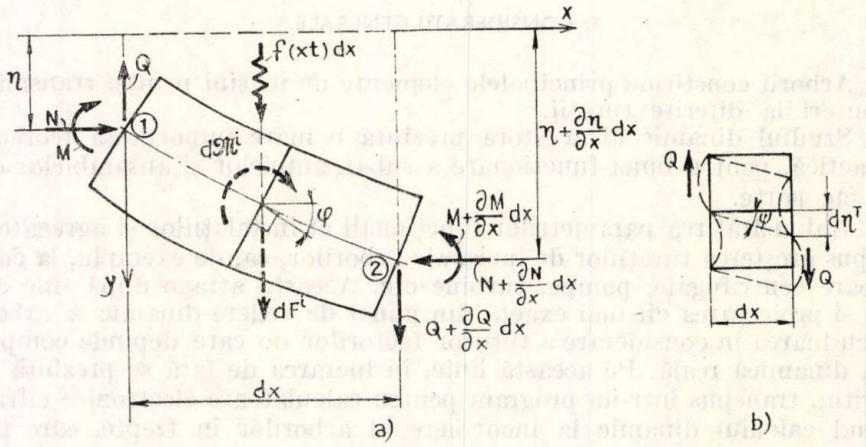


Fig. 2.1

în care se introduc relaţiile (a) şi se neglijează cantităţile mici de ordin superior, rezultă :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \rho A\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - f(xt), \tag{b}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q + N\,\frac{\partial \eta}{\partial x} - \rho I\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \tag{c}$$

Deformaţiile din forţa tăietoare Q fiind de tipul celor arătate în figura 2.1 *b*, produc rotaţia axei barei, notată cu ψ, fără o rotaţie a secţiunii transversale. Ţinînd seama de forţa tăietoare pe forma deformată (fig. 2.2 *b*) $Q^a \approx Q + N\,\frac{\partial \eta}{\partial x}$ şi de formula (9.11) din [4], rezultă relaţia :

$$\psi = \frac{1}{K'GA}\left(Q + N\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\right), \tag{d}$$

în care K' reprezintă coeficientul de formă al secţiunii transversale.

Întrucit rotirea totală a fibrei medii (fig. 2.2 *a*) este $\frac{\partial \eta}{\partial x} = \varphi + \psi$, folosind (d), se obţine

$$\varphi = \left(1 - \frac{N}{K'GA}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{Q}{K'GA},$$

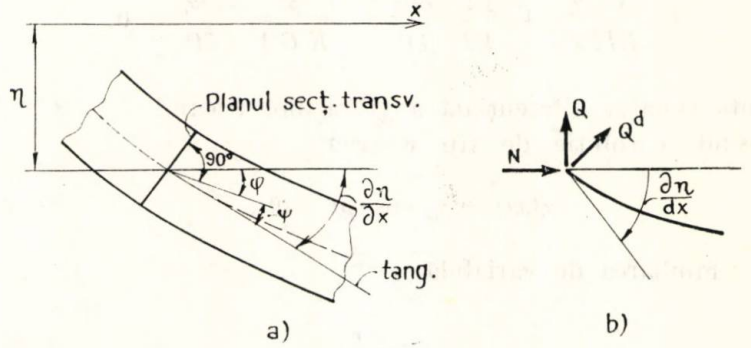


Fig. 2.2

din care, folosind (b), rezultă :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(1 - \frac{N}{K'GA}\right)\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{1}{K'GA}\left[\rho A \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - f(xt)\right]. \qquad \text{(e)}$$

Pe baza acestei relaţii şi a expresiei fibrei medii deformate

$$M = -EI\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \text{(f)}$$

rezultă

$$M = -EI\left[\left(1 - \frac{N}{K'GA}\right)\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{1}{K'GA}\left(\rho A \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - f(xt)\right)\right]. \qquad \text{(g)}$$

Derivînd pe (c) în raport cu x şi introducînd în mod corespunzător pe (b), (e) şi (g), se obţine ecuaţia :

$$\left(1 - \frac{N}{K'GA}\right)\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - \rho\left[\frac{1}{E}\left(1 - \frac{N}{K'GA}\right) + \frac{1}{K'G}\right]\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2\,\partial t^2} +$$

$$+ \frac{N\partial^2 \eta}{EI\partial x^2} + \frac{\rho A}{EI}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\rho^2}{K'GA}\frac{\partial^4 \eta}{\partial t^4} = \frac{f(xt)}{EI} + \frac{1}{K'GA}\frac{\partial^2 f(xt)}{\partial x^2} +$$

$$+ \frac{\rho}{K'EGA}\frac{\partial^2 f(xt)}{\partial t^2}, \qquad (2.1)$$

care reprezintă ecuaţia vibraţiilor unei bare cu masă distribuită, ţinînd seama de deformaţiile de lunecare, de inerţia de rotaţie şi de forţa axială.

În absența forțelor perturbatoare, ecuația (2.1) devine :

$$\left(1-\frac{N}{K'GA}\right)\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}-\rho\left[\frac{1}{E}\left(1-\frac{N}{K'GA}\right)+\frac{1}{K'G}\right]\frac{\partial^4\eta}{\partial x^2\partial t^2}+$$
$$+\frac{N\partial^2\eta}{EI\partial x^2}+\frac{\rho A}{EI}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\frac{\rho^2}{K'GA}\frac{\partial^4\eta}{\partial t^4}=0. \tag{2.2}$$

și reprezintă ecuația diferențială a vibrațiilor libere.

Folosind o soluție de tip Fourier,

$$\eta(xt)=\eta_x\cos(pt-\theta), \tag{2.3}$$

efectuînd schimbarea de variabilă,

$$\xi=\frac{x}{l}, \tag{2.4}$$

ecuația (2.2) devine :

$$\left(1-\frac{N}{K'GA}\right)\frac{\partial^4\eta}{\partial\xi^4}+\left\{\left[\frac{1}{E}\left(1-\frac{N}{K'GA}\right)+\frac{1}{K'G}\right]\rho l^2p^2+\right.$$
$$\left.+\frac{Nl^2}{EI}\right\}\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}-\frac{\rho Al^4p^2}{EI}\left(1-\frac{\rho I}{K'GA}p^2\right)\eta=0. \tag{2.5}$$

Dacă se notează

$$a^2=\frac{\rho Al^4p^2}{EI};\quad b=\frac{I}{Al^2};\quad c=\frac{EI}{K'GAl^2};\quad n=\frac{Nl^2}{EI},$$
$$d=b(1-nc)+c+\frac{n}{a^2}, \tag{2.6}$$

ecuația (2.5) ia forma :

$$\frac{\partial^4\eta}{\partial\xi^4}+\frac{a^2d}{1-nc}\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}-\frac{a^2}{1-nc}(1-a^2bc)\eta=0. \tag{2.7}$$

Din ecuația caracteristică

$$r^4+\frac{a^2d}{1-nc}r^2-\frac{a^2}{1-nc}(1-a^2bc)=0, \tag{h}$$

pentru cazul întîlnit în practică, cînd $a^2bc<1$, se obțin rădăcinile

$$r_{1,2}=\pm\alpha;\ r_{3,4}=\pm i\beta, \tag{i}$$

unde

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{\sqrt{2(1-nc)}} \sqrt{\mp d + \sqrt{d^2 + \frac{4}{a^2}(1-nc)(1-a^2bc)}}. \quad (2.8)$$

În această situaţie, soluţia ecuaţiei (2.7),

$$\eta(x) = C_1 \cos \beta\xi + C_2 \sin \beta\xi + C_3 \operatorname{ch} \alpha\xi + C_4 \operatorname{sh} \alpha\xi, \quad (2.9)$$

folosind (2.3), conduce la expresia vibraţiilor proprii

$$\eta(xt) = (C_1 \cos \beta\xi + C_2 \sin \beta\xi + C_3 \operatorname{ch} \alpha\xi + C_4 \operatorname{sh} \alpha\xi) \cos (pt - \theta). \quad (2.10)$$

Expresia rotirilor de încovoiere se aranjează sub forma :

$$\varphi(xt) = (C_1' \sin \beta\xi + C_2' \cos \beta\xi + C_3' \operatorname{sh} \alpha\xi + C_4' \operatorname{ch} \alpha\xi) \cos (pt - \theta). \quad (2.11)$$

În absenţa forţelor perturbatoare $f(xt) = 0$, introducînd (2.11) şi (2.10) în relaţia (e), care trebuie să devină o identitate, se obţine corespondenţa dintre constantele $C_1 \ldots C_4$ şi $C_1' \ldots C_4'$, de forma :

$$C_1' = -eC_1\,;\ C_2' = eC_2\,;\ C_3' = fC_3\,;\ C_4' = fC_4, \quad (2.12)$$

unde

$$e = \frac{(1-nc)\beta^2 - a^2c}{\beta l}\,;\quad f = \frac{(1-nc)\alpha^2 + a^2c}{\alpha l}. \quad (2.13)$$

Introducînd (2.12) în (2.11), se obţine

$$\varphi(xt) = (-C_1 e \sin \beta\xi + C_2 e \cos \beta\xi + C_3 f \operatorname{sh} \alpha\xi + C_4 f \operatorname{ch} \alpha\xi) \cos (pt - \theta). \quad (2.11')$$

Cu ajutorul acesteia, din (f) rezultă expresia momentelor

$$M(xt) = \frac{EI}{l} (C_1 \beta e \cos \beta\xi + C_2 e\beta \sin \beta\xi - C_3 \alpha f \operatorname{ch} \alpha\xi - C_4 f\alpha \operatorname{sh} \alpha\xi) \times \times \cos (pt - \theta). \quad (2.14)$$

Din relaţia (c), în care se introduce (2.14), (2.10) şi (2.11'), se obţine expresia forţei tăietoare

$$Q(xt) = \frac{EI}{l^2} (-C_1 g \sin \beta\xi + C_2 g \cos \beta\xi - C_3 h \operatorname{sh} \alpha\xi - C_4 h \operatorname{ch} \alpha\xi) \times \times \cos (pt - \theta), \quad (2.15)$$

unde s-a notat

$$g = e(\beta^2 - a^2b) - \frac{n}{l}\beta\,;\ h = f(\alpha^2 + a^2b) + \frac{n}{l}\alpha. \quad (2.16)$$

Cu expresiile (2.10), (2.11′), (2.14) şi (2.15) se determină valorile dinamice ale săgeţilor, rotirilor, momentele încovoietoare şi forţelor tăietoare în timpul vibraţiilor, ţinînd seama de deformaţiile de forfecare, inerţia de rotaţie şi forţa axială.

3. MATRICE DINAMICE DE TRANSMITERE

3.1. MATRICEA DINAMICĂ DE TRANSMITERE PENTRU UN TRONSON

Matricea dinamică de transmitere permite exprimarea parametrilor de la capătul din dreapta i al unui tronson de bară de secţiune constantă în funcţie de parametrii capătului din stînga $i-1$.

Astfel, definind vectorii:

$$\underset{\sim}{z}_{i-1} = [\eta_{i-1}\ \varphi_{i-1}\ M_{i-1}\ Q_{i-1}]^t; \qquad \underset{\sim}{z}_i = [\eta_i\ \varphi_i\ M_i Q_i]^t, \tag{a}$$

matricea de transmitere pentru tronsonul $i-1$, i, notată numai cu indicele din dreapta $\underset{\sim}{A}_i$, permite scrierea relaţiei

$$\underset{\sim}{z}_i = \underset{\sim}{A}_i\ \underset{\sim}{z}_{i-1}. \tag{b}$$

Pentru precizarea matricei $\underset{\sim}{A}_i$, se consideră originea în $i-1$ (fig. 3.1) şi din condiţiile ca expresiile (2.10), (2.11′), (2.14) şi (2.15) să aibă în origine valorile η_{i-1}, φ_{i-1}, M_{i-1}, Q_{i-1}, se obţin constantele C_1, C_2, C_3, C_4 în funcţie de acestea. Particularizînd apoi expresiile menţionate pentru capătul i, rezultă vectorul $\underset{\sim}{z}_i$ şi implicit, matricea $\underset{\sim}{A}_i$.

În consecinţă, din condiţiile:

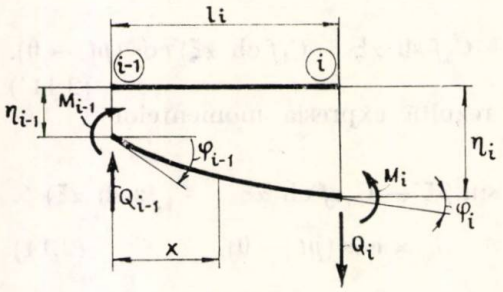


Fig. 3.1

$$C_1 + C_3 = \eta_{i-1};\ C_3 f + C_4 f = \varphi_{i-1},$$

$$\frac{EI}{l}\,(C_1\beta e - C_3\alpha f) = M_{i-1};$$

$$\frac{EI}{l^2}\,(C_2 g - C_4 h) = Q_{i-1},$$

se obţin constantele:

$$C_1 = \frac{1}{\alpha f + \beta e}\left(\alpha f \eta_{i-1} + \frac{l}{EI}\,M_{i-1}\right);\ C_2 = \frac{1}{eh + fg}\left(h\varphi_{i-1} + f\frac{l^2}{EI}\,Q_{i-1}\right),$$

$$C_3 = \frac{1}{\alpha f + \beta e}\left(\beta e \eta_{i-1} - \frac{l}{EI}\,M_{i-1}\right);\ C_4 = \frac{1}{eh + fg}\left(g\varphi_{i-1} - e\frac{l^2}{EI}\,Q_{i-1}\right).$$

Prin introducerea acestora în (2.10), (2.11′), (2.14), (2.15), se obţin expresiile η_i, φ_i, M_i, Q_i în funcţie de parametrii η_{i-1}, φ_{i-1}, M_{i-1}, Q_{i-1}.

Dacă se consideră valorile adimensionale :

$$\bar{\eta} = \eta/l_0\,;\ \bar{\varphi} = \varphi\,;\ \bar{M} = M\,\frac{l_0}{E_0 I_0}\,;\ \bar{Q} = Q\,\frac{l_0^2}{E_0 I_0}, \tag{3.1}$$

unde l_0 (în cm), E_0 (daN/cm^2), I_0 (în cm^4) sînt mărimi arbitrare, relaţia(b) devine :

$$\underset{\sim}{\bar{z}}_i = \underset{\sim}{\bar{A}}_i\,\underset{\sim}{\bar{z}}_{i-1}, \tag{3.2}$$

înţelegînd prin $\underset{\sim}{\bar{z}}_{i-1} = [\bar{\eta}_{i-1}\ \bar{\varphi}_{i-1}\ \bar{M}_{i-1}\ \bar{Q}_{i-1}]^t$ şi prin $\underset{\sim}{\bar{z}}_i = [\bar{\eta}_i\ \bar{\varphi}_i\ \bar{Q}_i\ \bar{M}_i]^t$ parametrii adimensionali la capătul $i-1$ şi, respectiv, capătul i al tronsonului (simbolul t înseamnă operaţia de transpunere), iar prin $\underset{\sim}{\bar{A}}_i$ matricea de transmitere exprimată în mărimi adimensionale.

Astfel, relaţia (3.2) se scrie sub formă dezvoltată (pentru $x = l$, ceea ce înseamnă $\xi = 1$) :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \eta_i \\ \varphi_i \\ M_i \\ Q_i \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{\bar{z}}_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 & S_1 & T_1 & U_1 \\ R_2 & S_2 & T_2 & U_2 \\ R_3 & S_3 & T_3 & U_3 \\ R_4 & S_4 & T_4 & U_4 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{\bar{A}}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \eta_{i-1} \\ \varphi_{i-1} \\ M_{i-1} \\ Q_{i-1} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{\bar{z}}_{i-1}}, \tag{3.2'}$$

Fără a mai scrie expresiile $\bar{\eta}_i$, $\bar{\varphi}_i$, $\bar{M}_i$, $\bar{Q}_i$, componentele matricei $\underset{\sim}{\bar{A}}$ sînt :

$$R_1 = \frac{1}{\alpha f + \beta e}\,(\alpha f \cos\beta + \beta e \operatorname{ch}\alpha),$$

$$R_2 = l_0\,\frac{ef}{\alpha f + \beta e}\,(-\alpha \sin\beta + \beta \operatorname{sh}\alpha),$$

$$R_3 = \frac{l_0}{sr}\,\frac{\alpha\beta\, ef}{\alpha f + \beta e}\,(\cos\beta - \operatorname{ch}\alpha),$$

$$R_4 = -\frac{l_0}{s^2 r}\,\frac{1}{\alpha f + \beta e}\,(\alpha f g \sin\beta + \beta\, eh \operatorname{sh}\alpha),$$

$$S_1 = \frac{1}{l_0(eh + fg)}\,(h \sin\beta + g \operatorname{sh}\alpha),$$

$$S_2 = \frac{1}{eh + fg}\,(eh \cos\beta + fg \operatorname{ch}\alpha),$$

$$S_3 = \frac{1}{sr(eh + fg)}\,(\beta eh \sin\beta - \alpha fg \operatorname{sh}\alpha)\,;$$

$$S_4 = \frac{1}{s^2 r(eh + fg)} (\cos \beta - \operatorname{ch} \alpha), \tag{3.3}$$

$$T_1 = \frac{sr}{l_0(\alpha f + \beta e)} (\cos \beta - \operatorname{ch} \alpha),$$

$$T_2 = -\frac{sr}{\alpha f + \beta e} (e \sin \beta + f \operatorname{sh} \alpha),$$

$$T_3 = \frac{1}{\alpha f + \beta e} (\beta e \cos \beta + \alpha f \operatorname{ch} \alpha),$$

$$T_4 = \frac{1}{s(\alpha f + \beta e)} (-g \sin \beta + h \operatorname{sh} \alpha),$$

$$U_1 = \frac{sr}{l_0(eh + fg)} (f \sin \beta - e \operatorname{sh} \alpha),$$

$$U_2 = \frac{s^2 r\, ef}{eh + fg} (\cos \beta - \operatorname{ch} \alpha),$$

$$U_3 = \frac{s\, ef}{eh + fg} (\beta \sin \beta + \alpha \operatorname{sh} \alpha);$$

$$U_4 = \frac{1}{eh + fg} (fg \cos \beta + he \operatorname{ch} \alpha).$$

În afara notațiilor cunoscute au mai intervenit:

$$s = \frac{l}{l_0} \quad \text{și} \quad r = \frac{E_0 I_0}{EI}, \tag{3.4}$$

unde l_0, I_0 sînt mărimi arbitrare de lungime, respectiv de moment de inerție geometric.

3.2. MATRICEA DE TRANSMITERE PESTE UN DISC

Se consideră un nod oarecare i (un rost dintre două tronsoane) în care se găsește un disc sau un rotor avînd masa concentrată m_i și momentul de inerție J_i al masei m_i față de axa de rotație (axa normală pe planul figurii 3.2). Se izolează nodul i, reprezentat în figura 3.2, pe care s-au

introdus, pe lîngă eforturile din stînga și din dreapta, forța de inerție corespunzătoare masei m_i,

$$F^i = -m_i \ddot{\eta}_i = m_i p^2 \eta_i, \tag{3.5}$$

și cuplul de inerție

$$\mathfrak{M}^i = -J_i \ddot{\varphi}_i = J_i p^2 \varphi_i. \tag{3.6}$$

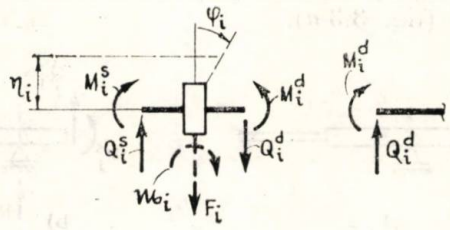


Fig. 3.2

Din echilibrul nodului i se obțin relațiile :

$$M_i^d = M_i^s + J_i p^2 \varphi_i ; \; Q_i^d = Q_i^s - m_i p^2 \eta_i,$$

care, împreună cu relațiile de continuitate,

$$\eta_i^d = \eta_i^s = \eta_i ; \; \varphi_i^d = \varphi_i^s = \varphi_i,$$

conduc la exprimarea vectorului parametrilor din secțiunea din dreapta nodului ($\underset{\sim}{z}_i^d$), în funcție de vectorul parametrilor din secțiunea din stînga ($\underset{\sim}{z}_i^s$) sub forma

$$\underset{\sim}{z}_i^d = \underset{\sim}{B}_i \, \underset{\sim}{z}_i^s, \tag{3.7}$$

unde $\underset{\sim}{B}_i$ reprezintă matricea dinamică de transmitere peste nodul i.

Dacă se folosesc mărimi adimensionale (3.1), ceea ce presupune folosirea forței de inerție (3.5) și a cuplului de inerție (3.6) sub forma :

$$\overline{F}^i = F^i \frac{l_0^2}{EI_0} = m_i p^2 \frac{l_0^3}{EI_0} \overline{\eta}_i, \tag{3.5'}$$

$$\overline{\mathfrak{M}}_i = \mathfrak{M}^i \frac{l_0}{EI_0} = J_i p^2 \frac{l_0}{EI_0} \overline{\varphi}_i, \tag{3.6'}$$

relația matriceală (3.7) devine :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \overline{\eta}_i^d \\ \overline{\varphi}_i^d \\ \overline{M}_i^d \\ \overline{Q}_i^d \end{bmatrix}}_{\overline{\underset{\sim}{z}}_i^d} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & J_i p^2 \dfrac{l_0}{EI_0} & 1 & 0 \\ -m_i p^2 \dfrac{l_0^3}{EI_0} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\overline{\underset{\sim}{B}}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{\eta}_i^s \\ \overline{\varphi}_i^s \\ \overline{M}_i^s \\ \overline{Q}_i^s \end{bmatrix}}_{\overline{\underset{\sim}{z}}_i^s} . \tag{3.7}$$

Forma dezvoltată (3.7′) pune în evidenţă matricea dinamică de nod $\underset{\sim}{B}_i$ (4×4).

3.3. MATRICEA DINAMICĂ DE TRANSMITERE PESTE UN REAZEM

Se notează cu j un reazem simplu intermediar în dreptul căruia se consideră nodul j (fig. 3.3 *a*).

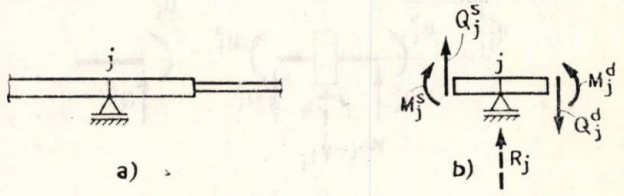


Fig. 3.3

În dreptul reazemului simplu j(fig. 3.3 *b*) se defineşte vectorul exterior necunoscut

$$\underset{\sim}{F}_j = [0 \quad 0 \quad 0 \quad R_j]^t, \tag{3.8}$$

sau sub formă adimensională

$$\underset{\sim}{\bar{F}}_j = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{l_0^2}{EI_0} R_j \right]^t = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \bar{R}_j]^t, \tag{3.8′}$$

cu ajutorul căruia, din echilibrul nodului j, se determină relaţia de trecere peste nod :

$$\underset{\sim}{\bar{z}}_j^d = \underset{\sim}{\bar{z}}_j^s + \underset{\sim}{\bar{F}}_j. \tag{3.9}$$

Ţinînd seama de faptul că vectorii $\underset{\sim}{\bar{z}}_j^d$, $\underset{\sim}{\bar{z}}_j^s$ au componentele $\bar{\eta}_j^d = \bar{\eta}_j^s = 0$, forma dezvoltată a relaţiei (3.9), în care se introduce şi relaţia (3.8′), este :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\varphi}_j^d \\ \bar{M}_j^d \\ \bar{Q}_j^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\varphi}_j^s \\ \bar{M}_j^s \\ \bar{Q}_j^s + \bar{R}_j \end{bmatrix}. \tag{3.9′}$$

În cazul unui reazem intermediar k cu cedare elastică (fig. 3.4 *a*), se

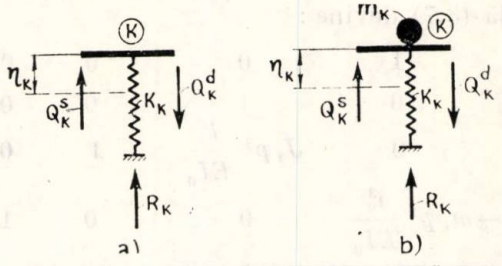


Fig. 3.4

exprimă reacțiunea sub forma :

$$R_k = K_k \eta_k, \tag{3.10}$$

unde K_k reprezintă constanta elastică a reazemului elastic.

Introducînd mărimi adimensionale, relația (3.10) devine

$$\bar{R}_k = \left(\frac{l_0^3}{EI_0}\right) \bar{\eta}_k = \bar{K}_k \bar{\eta}_k. \tag{3.10'}$$

Legătura dintre vectorii parametrilor secțiunii din dreapta și stînga nodului K, întrucît diferența apare numai la forța tăietoare $Q_k^d = Q_k^s + R_k$ (fig. 3.4 *a*), rezultă sub forma :

$$\underset{\sim}{z}_k^d = \underset{\sim}{\bar{C}}\, \underset{\sim}{z}_k^s, \tag{3.11}$$

în care matricea $\underset{\sim}{\bar{C}}$ (4 × 4) este :

$$\underset{\sim}{\bar{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \bar{K}_k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Dacă în nodul K există și o masă concentrată (fig. 3.4 *b*), trebuie ținut seama, pe lîngă deformabilitatea reazemului, de inerția de translație și rotație a masei, m_k.

Aceasta se realizează prin matricea $\underset{\sim}{\bar{B}}_k$ (3.7') și $\underset{\sim}{\bar{C}}_k$ (3.12), astfel încît rezultă relația :

$$\underset{\sim}{z}_k^d = (\underset{\sim}{\bar{B}}_k + \underset{\sim}{\bar{C}}_k)\, \underset{\sim}{z}_k^s. \tag{3.13}$$

4. ALGORITM GENERAL PENTRU DETERMINAREA PULSAȚIILOR ȘI FORMELOR PROPRII DE OSCILAȚIE

Se consideră un arbore cu secțiuni variabile în trepte, avînd mase concentrate (discuri sau rotoare) notate cu m_i, reazeme rigide (j), reazeme elastice (k), forțe perturbatoare armonice de pulsație ω ($F_0 \cos \omega t$), așa cum se prezintă în figura 4.1.

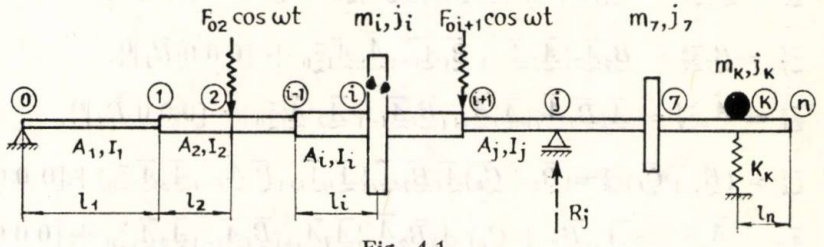


Fig. 4.1

În dreptul salturilor de secţiune, a maselor concentrate (discurilor), a reazemelor rigide sau elastice, a forţelor sau cuplurilor perturbatoare, se consideră noduri, care se notează cu $0, 1, 2, \ldots i-1; i, \ldots, n$.

Parametrii η_i, φ_i, M_i, Q_i ai fiecărei secţiuni de trecere de la un tronson la altul, ca şi ai secţiunilor unde apar discontinuităţi (rezemări, forţe perturbatoare etc.), se constituie în vectori-coloană $\underset{\sim}{\bar{z}}_0, \underset{\sim}{\bar{z}}_1, \ldots, \underset{\sim}{\bar{z}}_{i-1}, \underset{\sim}{\bar{z}}_i, \ldots, \underset{\sim}{\bar{z}}_n$.

Elementele fiecărui tronson (ρ, l, A, I) se notează numai cu indicele nodului din dreapta, ceea ce face ca matricea dinamică de transfer, adimensională, a tronsonului $i-1$, i notată cu $\underset{\sim}{\bar{A}}_i$ să aibă alcătuirea dată de (3.2′).

Se determină pentru fiecare tronson de bară (cuprins între două noduri succesive) matricea de transmitere notată cu indicele nodului din dreapta : $\underset{\sim}{\bar{A}}_1, \underset{\sim}{\bar{A}}_2 \cdots \underset{\sim}{\bar{A}}_{i-1}, \underset{\sim}{\bar{A}}_i \cdots \underset{\sim}{\bar{A}}_j \cdots \underset{\sim}{\bar{A}}_k, \underset{\sim}{\bar{A}}_n$.

Pentru fiecare masă concentrată (disc sau rotor) se determină, de asemenea, matricea de transmitere $\underset{\sim}{\bar{B}}_i$ definită în (3.7′).

De asemenea, pentru fiecare reazem elastic se calculează matricea de transmitere $\underset{\sim}{\bar{C}}_k$ având forma (3.12).

Folosind matricele de transmitere ale tronsoanelor $\underset{\sim}{\bar{A}}_i$, ale maselor concentrate $\underset{\sim}{\bar{B}}_i$, ale reazemelor elastice $\underset{\sim}{\bar{C}}_k$ precum şi modul precizat în § 3.3 de trecere peste un reazem rigid intermediar, se exprimă vectorul parametrilor pentru fiecare nod al modelului dinamic : $\underset{\sim}{\bar{z}}_1, \underset{\sim}{\bar{z}}_2 \cdots \underset{\sim}{\bar{z}}_i \cdots \underset{\sim}{\bar{z}}_j \cdots \underset{\sim}{\bar{z}}_k \cdots \underset{\sim}{\bar{z}}_n$ în funcţie de parametrii nodului de capăt stînga $\underset{\sim}{\bar{z}}_0$ şi de reacţiunile din reazemele rigide $\underset{\sim}{\bar{R}}_j$. Astfel, pentru modelul dinamic considerat în figura 4.1, având opt noduri (unele noduri au fost notate generic cu litere $i \ldots, j, k, n$), vectorii parametrilor nodurilor se obţin din relaţiile :

$$
\begin{aligned}
&\underset{\sim}{\bar{z}}_1 = \underset{\sim}{\bar{A}}_1 \underset{\sim}{\bar{z}}_0 \,;\; \underset{\sim}{\bar{z}}_2 = \underset{\sim}{\bar{A}}_2 \underset{\sim}{\bar{z}}_1 = \underset{\sim}{\bar{A}}_2 \underset{\sim}{\bar{A}}_1 \underset{\sim}{\bar{z}}_0, \ldots \\
&\underset{\sim}{\bar{z}}_{i-1} = \underset{\sim}{\bar{A}}_{i-1} \underset{\sim}{\bar{z}}_2 = \underset{\sim}{\bar{A}}_{i-1} \underset{\sim}{\bar{A}}_2 \underset{\sim}{\bar{A}}_1 \underset{\sim}{\bar{z}}_0, \\
&\underset{\sim}{\bar{z}}_i^s = \underset{\sim}{\bar{A}}_i \cdot \underset{\sim}{\bar{z}}_{i-1} = \underset{\sim}{\bar{A}}_i \underset{\sim}{\bar{A}}_{i-1} \underset{\sim}{\bar{A}}_2 \underset{\sim}{\bar{A}}_1 \underset{\sim}{\bar{z}}_0 \,;\; \underset{\sim}{\bar{z}}_i^d = \underset{\sim}{\bar{B}}_i \underset{\sim}{\bar{z}}_i^s = \underset{\sim}{\bar{B}}_i \underset{\sim}{\bar{A}}_{i-1} \underset{\sim}{\bar{A}}_2 \underset{\sim}{\bar{A}}_1 \underset{\sim}{\bar{z}}_0, \\
&\underset{\sim}{\bar{z}}_{i+1} = \underset{\sim}{\bar{A}}_{i+1} \underset{\sim}{\bar{z}}_i^d = \underset{\sim}{\bar{A}}_{i+1} \underset{\sim}{\bar{B}}_i \underset{\sim}{\bar{A}}_{i-1} \underset{\sim}{\bar{A}}_2 \underset{\sim}{\bar{A}}_1 \underset{\sim}{\bar{z}}_0, \qquad (4.1) \\
&\underset{\sim}{\bar{z}}_j^s = \underset{\sim}{\bar{A}}_j \underset{\sim}{\bar{z}}_{i+1} = \underset{\sim}{\bar{A}}_j \underset{\sim}{\bar{A}}_{i+1} \underset{\sim}{\bar{B}}_i \underset{\sim}{\bar{A}}_{i-1} \underset{\sim}{\bar{A}}_2 \underset{\sim}{\bar{A}}_1 \underset{\sim}{\bar{z}}_0, \\
&\underset{\sim}{\bar{z}}_j^d = \underset{\sim}{\bar{z}}_j^s + \underset{\sim}{\bar{F}}_j = \underset{\sim}{\bar{A}}_j \underset{\sim}{\bar{A}}_{i+1} \underset{\sim}{\bar{B}}_i \underset{\sim}{\bar{A}}_{i-1} \underset{\sim}{\bar{A}}_2 \underset{\sim}{\bar{A}}_1 \underset{\sim}{\bar{z}}_0 + [0\ 0\ 0\ \bar{R}_j]^t, \\
&\underset{\sim}{\bar{z}}_7^s = \underset{\sim}{\bar{A}}_7 \underset{\sim}{\bar{z}}_j^d = \underset{\sim}{\bar{A}}_7 \{ \underset{\sim}{\bar{A}}_j \underset{\sim}{\bar{A}}_{i+1} \underset{\sim}{\bar{B}}_i \underset{\sim}{\bar{A}}_{i-1} \underset{\sim}{\bar{A}}_2 \underset{\sim}{\bar{A}}_1 \underset{\sim}{\bar{z}}_0 + [0\ 0\ 0\ \bar{R}_j]^t \}, \\
&\underset{\sim}{\bar{z}}_7^d = \underset{\sim}{\bar{B}}_7 \underset{\sim}{\bar{z}}_7^s = \underset{\sim}{\bar{B}}_7 \underset{\sim}{\bar{A}}_7 \{ \underset{\sim}{\bar{A}}_j \underset{\sim}{\bar{A}}_{i+1} \underset{\sim}{\bar{B}}_i \underset{\sim}{\bar{A}}_{i-1} \underset{\sim}{\bar{A}}_2 \underset{\sim}{\bar{A}}_1 \underset{\sim}{\bar{z}}_0 + [0\ 0\ 0\ \bar{R}_j]^t \}, \\
&\underset{\sim}{\bar{z}}_k^s = \underset{\sim}{\bar{A}}_k \underset{\sim}{\bar{z}}_7^d = \underset{\sim}{\bar{A}}_k \underset{\sim}{\bar{B}}_7 \underset{\sim}{\bar{A}}_7 \{ \underset{\sim}{\bar{A}}_j \underset{\sim}{\bar{A}}_{i+1} \underset{\sim}{\bar{B}}_i \underset{\sim}{\bar{A}}_{i-1} \underset{\sim}{\bar{A}}_2 \underset{\sim}{\bar{A}}_1 \underset{\sim}{\bar{z}}_0 + [0\ 0\ 0\ \bar{R}_j]^t \}, \\
&\underset{\sim}{\bar{z}}_k^d = (\underset{\sim}{\bar{B}}_k + \underset{\sim}{\bar{C}}_k) \underset{\sim}{\bar{z}}_k^s = (\underset{\sim}{\bar{B}}_k + \underset{\sim}{\bar{C}}_k) \underset{\sim}{\bar{A}}_k \underset{\sim}{\bar{B}}_7 \underset{\sim}{\bar{A}}_7 \{ \underset{\sim}{\bar{A}}_j \underset{\sim}{\bar{A}}_{i+1} \underset{\sim}{\bar{B}}_i \underset{\sim}{\bar{A}}_{i-1} \underset{\sim}{\bar{A}}_2 \underset{\sim}{\bar{A}}_1 \underset{\sim}{\bar{z}}_0) + [0\ 0\ 0\ \bar{R}_j]^t, \\
&\underset{\sim}{\bar{z}}_n = \underset{\sim}{\bar{A}}_n \underset{\sim}{\bar{z}}_k^d = \underset{\sim}{\bar{A}}_n (\underset{\sim}{\bar{B}}_k + \underset{\sim}{\bar{C}}_k) \underset{\sim}{\bar{A}}_k \underset{\sim}{\bar{B}}_7 \underset{\sim}{\bar{A}}_7 \} \underset{\sim}{\bar{A}}_j \underset{\sim}{\bar{A}}_{i+1} \underset{\sim}{\bar{B}}_i \underset{\sim}{\bar{A}}_{i-1} \underset{\sim}{\bar{A}}_2 \underset{\sim}{\bar{A}}_1 \underset{\sim}{\bar{z}}_0 + [0\ 0\ 0\ \bar{R}_j]^t \}.
\end{aligned}
$$

Necunoscutele care intervin în relaţiile (4.1) sînt parametrii vectorului $\underset{\sim}{\bar{z}}_0$ şi reacţiunile $\bar{R}_j$ din reazemele fixe intermediare.

Vectorii $\underset{\sim}{\bar{z}}_0$ şi $\underset{\sim}{\bar{z}}_n$ au cîte două componente nule în funcţie de tipurile de legături ale capetelor arborelui. Pentru modelul dinamic luat ca exemplu în figura 4.1, vectorul $\underset{\sim}{\bar{z}}_0$ are nule componentele $\bar{\eta}_0 = 0$ şi $\bar{M}_0 = 0$, iar vectorul $\underset{\sim}{\bar{z}}_n$ are nule componentele $\bar{M}_n = 0$ şi $\bar{Q}_n = 0$.

Vectorii nodurilor din dreptul reazemelor fixe $\underset{\sim}{\bar{z}}_j^s$ sau $\underset{\sim}{\bar{z}}_j^d$ (j ia pe rînd numărul nodurilor din dreptul reazemelor fixe, înţelegînd deci că pot fi mai multe reazeme fixe) au componentele $\underset{\sim}{\eta}_j^d = \underset{\sim}{\eta}_j^s = 0$.

Punînd condiţiile ca parametrii $\underset{\sim}{\eta}_j$ ai nodurilor din dreptul reazemelor fixe să fie zero, precum şi scriind expresiile celor doi parametrii nuli ai vectorului $\underset{\sim}{\bar{z}}_n$ care de asemenea se egalează cu zero, se obţine un sistem algebric omogen, avînd ca necunoscute cei doi parametrii nenuli ai vectorului $\underset{\sim}{\bar{z}}_0$ precum şi reacţiunile $\bar{R}_j$ din reazemele fixe intermediare j ($j \neq 0, n$).

Pentru exemplul din figura 4.1, sistemul algebric omogen este format din trei ecuaţii cu trei necunoscute (parametrii $\bar{\varphi}_0$, $\bar{Q}_0$ şi reacţiunea $\bar{R}_j$).

Condiţia ca sistemul algebric omogen să aibă soluţii diferite de cea banală este ca determinantul caracteristic al său să fie zero, obţinîndu-se, astfel o relaţie de forma

$$\Delta(p) = 0, \tag{4.2}$$

denumită ecuaţia pulsaţiilor proprii.

Rezolvarea acestei ecuaţii se face prin studiul numeric al variaţiei funcţiei $f = \Delta(p)$ şi conduce la obţinerea pulsaţiilor proprii, rezultînd un număr infinit de pulsaţii. Pulsaţia cea mai mică p_1 reprezintă pulsaţia fundamentală. Practic, prezintă interes primele pulsaţii p_1, $p_2 \ldots p_n$, unde n (numărul de ordine al pulsaţiei maxime cerute) se alege astfel încît să se obţină două sau trei pulsaţii ale căror valori să fie peste pulsaţia ω de funcţionare a arborelui (a rotorului compresorului centrifugal) de studiat.

Fiecărei pulsaţii proprii îi corespunde o formă proprie de oscilaţie (avînd şi denumirea de vector propriu). Notînd cu p_α o pulsaţie proprie oarecare ($\alpha = 1, 2, \ldots, n$), amplitudinile $\eta_{x,\alpha}$ şi rotirile $\varphi_{x,\alpha}$ ale formei deformate corespunzătoare lui p_α reprezintă forma proprie de oscilaţie α (vectorul propriu α).

Pentru determinarea formelor proprii se procedează astfel:

— se introduce $p = p_\alpha$ în sistemul algebric omogen avînd ca necunoscute cei doi parametri nenuli ai vectorului $\underset{\sim}{\bar{z}}_0$ şi reacţiunile $\bar{R}_j$ din reazemele fixe;

— se alege o valoare arbitrară, de obicei unitară, pentru una din necunoscutele sistemului algebric omogen, şi prin rezolvarea sistemului rezultă valorile celorlalte necunoscute;

— folosind relaţiile de forma (4.1), în care se introduce $p = p_\alpha$ şi valorile determinate ale necunoscutelor aşa cum s-a arătat la punctul anterior, se determină în nodurile modelului dinamic valorile parametrilor $\eta_{i\alpha}$, $\varphi_{i\alpha}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots n$).

Se obţin astfel atîtea forme proprii cîte pulsaţii proprii s-au determinat ($\alpha = 1, 2, \ldots n$).

5. STUDIUL VIBRAȚIILOR FORȚATE TRANSVERSALE ALE ARBORILOR FOLOSIND FORMELE PROPRII

Se consideră că asupra rotorului (arborelui) compresorului centrifugal acționează, într-un plan, forțe și respectiv cupluri perturbatoare armonice, în fază, de pulsație ω. În punctele de acțiune ale acestora se consideră noduri, așa cum se arată și pentru modelul dinamic din figura 4.1.

În cazul arborilor, în general, și în cazul rotorilor compresoarelor centrifugale, în special, interesează deformata dinamică produsă de forțele perturbatoare și anume amplitudinile maxime ale deformatei dinamice, care nu trebuie să depășească anumite limite pentru buna funcționare a compresorului.

Pentru studiul vibrațiilor forțate stabilizate se folosește procedeul descompunerii după formele proprii de oscilație. Conform acestui procedeu, se alege soluția de forma :

$$\eta_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \eta_{i,\alpha} \; q_\alpha(t), \tag{5.1}$$

care reprezintă o combinație liniară a formelor proprii de oscilație cu ajutorul funcțiilor necunoscute $q_\alpha(t)$.

Folosirea soluției (5.1) necesită descompunerea forțelor perturbatoare în componente după formele proprii :

$$F_i(t) = \sum_{\alpha} F_{i,\alpha} = \sum_{\alpha} m_i \, \eta_{i,\alpha} \, p_\alpha^2 \, s_\alpha(t), \tag{5.2}$$

în care $s_\alpha(t)$ reprezintă o funcție de timp, care, pentru forțe perturbatoare armonice $F_i = F_{i0} \cos \omega t$, are forma :

$$s_\alpha(t) = s_\alpha^0 \cos \omega t, \tag{a}$$

unde

$$s_\alpha^0 = \frac{1}{p_\alpha^2} \frac{\sum_i F_{i0} \, \eta_{i,\alpha}}{\sum_i m_i \, \eta_{i,\alpha}^2}. \tag{5.3}$$

În acest caz, pentru vibrațiile forțate stabilizate, soluția particulară a ecuației diferențiale,

$$\ddot{q}_\alpha(t) + p_\alpha^2 \, q_\alpha(t) = p_\alpha^2 \, s_\alpha(t), \tag{b}$$

este

$$q_\alpha(t) = s_\alpha^0 \, \psi_\alpha \cos(\omega t), \tag{5.4}$$

în care prin

$$\psi_\alpha = \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{p_\alpha^2}} \tag{5.5}$$

s-a notat coeficientul dinamic la vibrații forțate pentru forma proprie de oscilație α.

Introducînd (5.4) în (5.1) și considerînd cos $\omega t = 1$, rezultă expresia generală a amplitudinii dinamice maxime după direcția de oscilație din nodul oarecare i :

$$\eta_{li} = \sum_{\alpha=1}^{n} \eta_{i,\alpha} s_{\alpha}^{0} \psi_{\alpha}. \tag{5.6}$$

6. TRANSPUNEREA ALGORITMULUI ÎN PROGRAM DE CALCULATOR

Algoritmul elaborat, pentru calculul dinamic al arborilor, a fost transpus într-un program denumit „CDINARB", scris în limbaj FORTRAN, pentru calculatoare FELIX C—256.

În figura 6.1, se prezintă schema generală a setului de programe CDINARB.

Durata de execuție pe calculator depinde atît de structura arborelui (numărul de tronsoane al acestuia, discuri sau alte mase concentrate, numărul și tipul reazemelor etc.), cît și de numărul de pulsații proprii cerut, în general nedepășind 20—25 min., timp efectiv de calculator.

Pentru arborele de calculat se stabilește mai întîi modelul dinamic, precizîndu-se nodurile ce se numerotează cu cifre de la 0, 1, 2,..., n (0 este capătul din stînga al arborelui, iar n capătul din dreapta).

Se numerotează, de asemenea, tronsoanele, fiecare tronson avînd cifra nodului din dreapta (1, 2,..., n). Unul din tronsoane se ia drept referință, aceasta precizîndu-se în datele de intrare. Se precizează, de asemenea, mărimile generale : ρ — masa specifică, K' — factorul de formă al secțiunii ($K' = 0{,}9$, pentru secțiuni circulare), E și G—modulul de elasticitate longitudinală, respectiv transversală, precum și precizia cu care se dorește calculul pulsațiilor (EPS).

Modul de introducere a datelor de intrare în programul „CDINARB" pentru calculul vibrațiilor proprii și al vibrațiilor forțate se prezintă în detaliu în lucrarea [1].

La imprimantă se transmit datele de intrare spre a se putea verifica atît corectitudinea lor, cît și modul de evoluție a iterațiilor efectuat la calculul pulsațiilor proprii.

Ca rezultate se dau la imprimată valorile pulsațiilor proprii și formele proprii de oscilație pentru numărul de pulsații cerut, acestea fiind ordonate începînd cu pulsația fundamentală p_1. De asemenea, se afișează la imprimantă amplitudinile maxime ale deformatei dinamice produse de forțele perturbatoare ce provin din excentricitatea maselor neechilibrate.

7. ANALIZA COMPORTĂRII DINAMICE A ARBORELUI CU ROTORI A UNUI COMPRESOR CENTRIFUGAL

7.1. MODELUL DINAMIC AL ARBORELUI

Modelul dinamic al arborelui analizat este prezentat în figura 7.1, în două variante : o variantă cu reazeme rigide (fig. 7.1 *a*) și o variantă cu reazeme elastice (fig. 7.1 *b*), avînd constantele elastice $k = 10^6$ daN/cm.

SCHMA GENERALĂ SET PROGRAME CDINARB

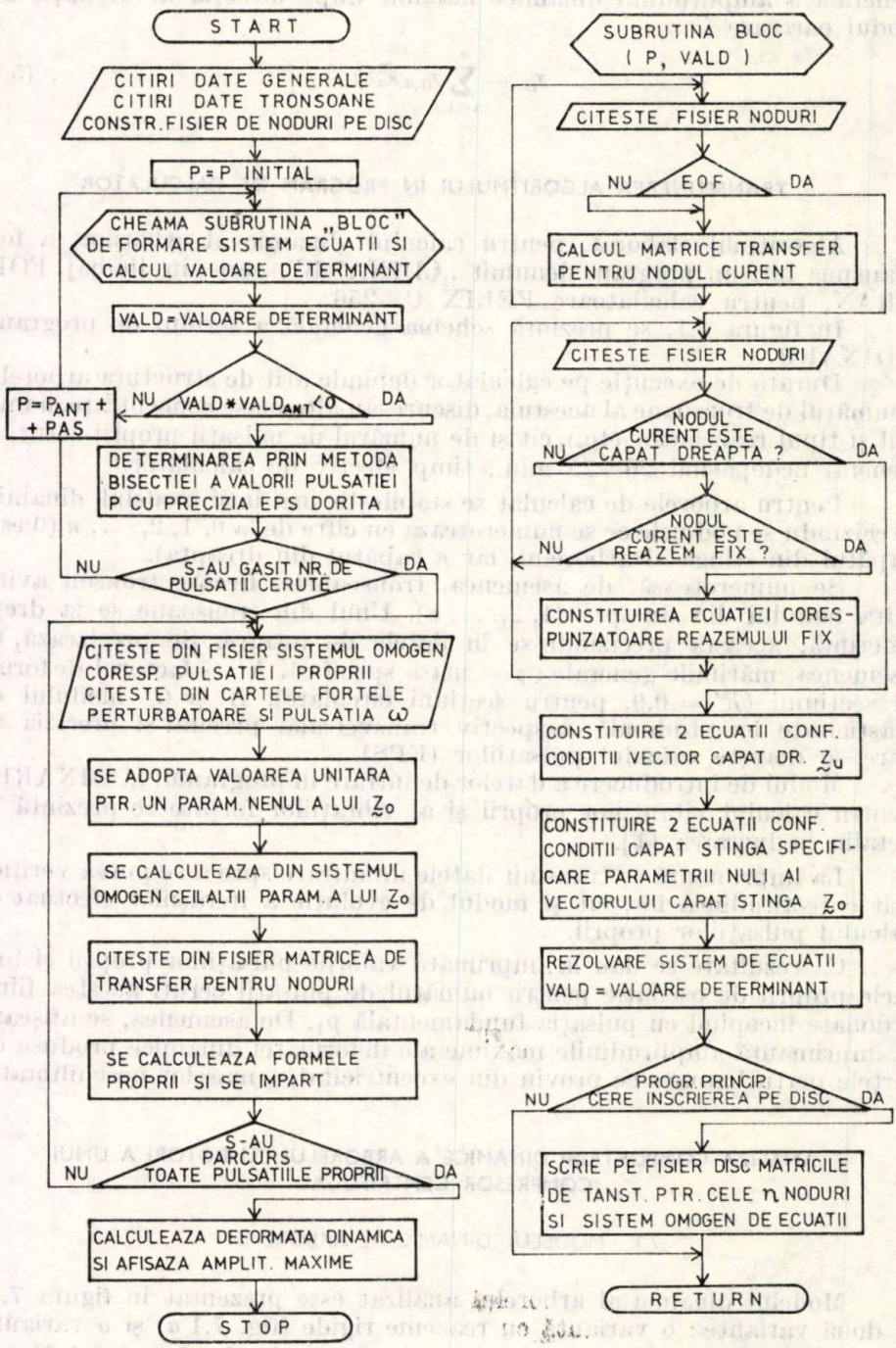
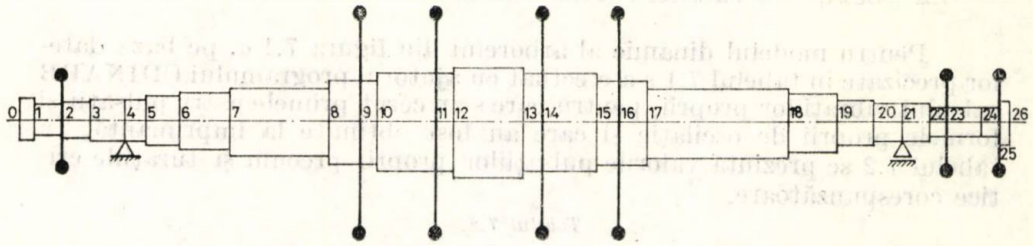
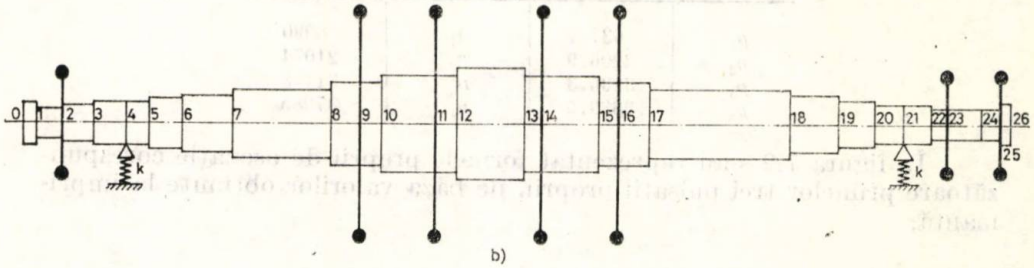


Fig. 6.1



a)



b)

Fig. 7.1

Datele necesare atît pentru tronsoane, cît și pentru rotorii și discurile fixate pe arbore, se prezintă în tabelul 7.1.

Tabelul 7.1.

Nr. nod	Elementele tronsonului		Discul sau rotorul din nod	
	diametru d[cm]	lungime [cm]	masa m [daN s²/cm]	momentul de inerție masic J [daN s² cm]
1	8,0	2,2		
2	6,5	5,0	0,00728	0,11494
3	6,7	5,0		
4	7,0	6,0		
5	7,0	4,2		
6	8,5	5,6		
7	9,0	9,1		
8	12,0	17,1		
9	14,026	7,8	8,02125	1,44037
10	14,026	3,02		
11	14,527	10,53	0,02119	1,44935
12	14,527	3,02		
13	18,6	10,31		
14	17,032	3,02	0,02070	1,50137
15	17,032	9,73		
16	16,03	3,02	0,02071	1,47405
17	16,03	5,79		
18	12,0	24,96		
19	9,0	9,1		
20	8,5	5,6		
21	7,0	4,2		
22	7,0	5,5		
23	5,0	2,5	0,00219	0,02105
24	5,0	6,0		
25	5,0	3,0	0,002322	0,02512
26	8,0	2,2		

7.2. PULSAŢIILE ŞI FORMELE PROPRII ÎN CAZUL ARBORELUI CU LAGĂRE RIGIDE

Pentru modelul dinamic al arborelui din figura 7.1 *a*, pe baza datelor precizate în tabelul 7.1 s-a efectuat cu ajutorul programului CDINARB calculul vibraţiilor proprii, pentru care s-au cerut primele patru pulsaţii şi formele proprii de oscilaţie şi care au fost obţinute la imprimantă. În tabelul 7.2 se prezintă valorile pulsaţiilor proprii precum şi turaţiile critice corespunzătoare.

Tabelul 7.2.

Pulsaţii proprii [rad/s]		Turaţii critice [rot/min]	
p_1	637,7	n_1	6090
p_2	2206,9	n_2	21074
p_3	3296,3	n_3	31478
p_4	3883,5	n_4	37085

În figura 7.2 s-au reprezentat formele proprii de oscilaţie corespunzătoare primelor trei pulsaţii proprii, pe baza valorilor obţinute la imprimantă.

7.3. PULSAŢIILE ŞI FORMELE PROPRII ÎN CAZUL ARBORELUI CU LAGĂRE ELASTICE

Considerînd lagărele elastice (fig. 7.1 *b*), s-a efectuat calculul vibraţiilor proprii obţinîndu-se, de asemenea, de la imprimantă primele patru pulsaţii şi forme proprii de oscilaţie. Pulsaţiile proprii şi turaţiile critice corespunzătoare sînt date în tabelul 7.3.

Tabelul 7.3.

Pulsaţii proprii [rad/s]		Turaţii critice [rot/min]	
p_1	625,2	n_1	5970
p_2	2188,9	n_2	20902
p_3	3072,2	n_3	29338
p_4	3093,7	n_4	29543

Formele proprii de oscilaţie sînt reprezentate în figura 7.3.

7.4. VIBRAŢIA FORŢATĂ STABILIZATĂ

Pentru calculul vibraţiilor forţate s-au considerat forţele perturbatoare armonice, de pulsaţie ω, provenite din mase neechilibrate. Nodurile în care acţionează forţele perturbatoare rezultă din figura 7.4; valoarea pulsaţiei ω s-a considerat pentru turaţia de regim a arborelui compresorului centrifugal ($\omega = 1380$ rad/s) pentru care forţele perturbatoare maxime sînt :

$$F_2^0 = 3000 \text{ daN}\,; F_9^0 = 5000 \text{ daN} \text{ şi } F_{14}^0 = 2000 \text{ daN}.$$

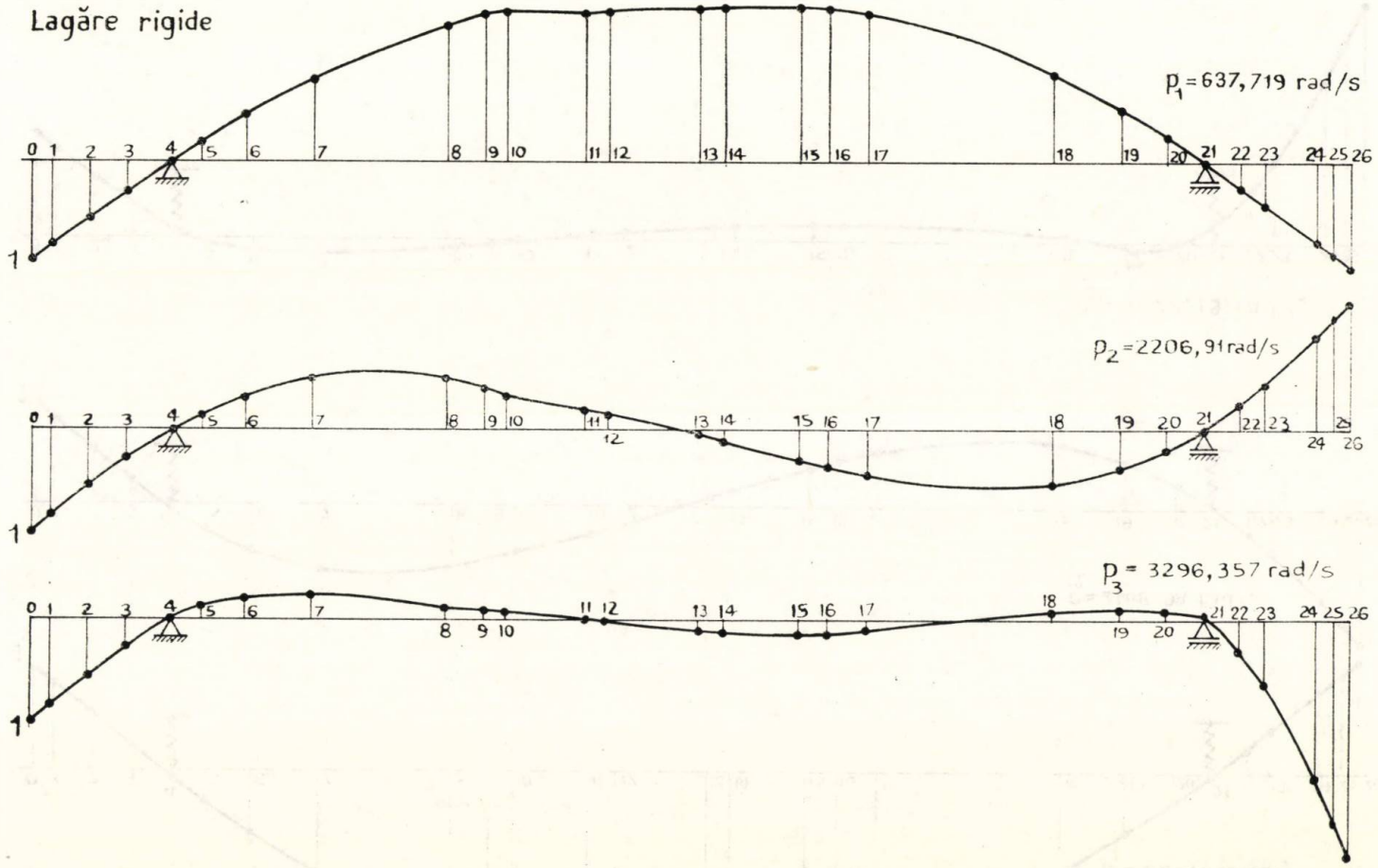


Fig. 7.2

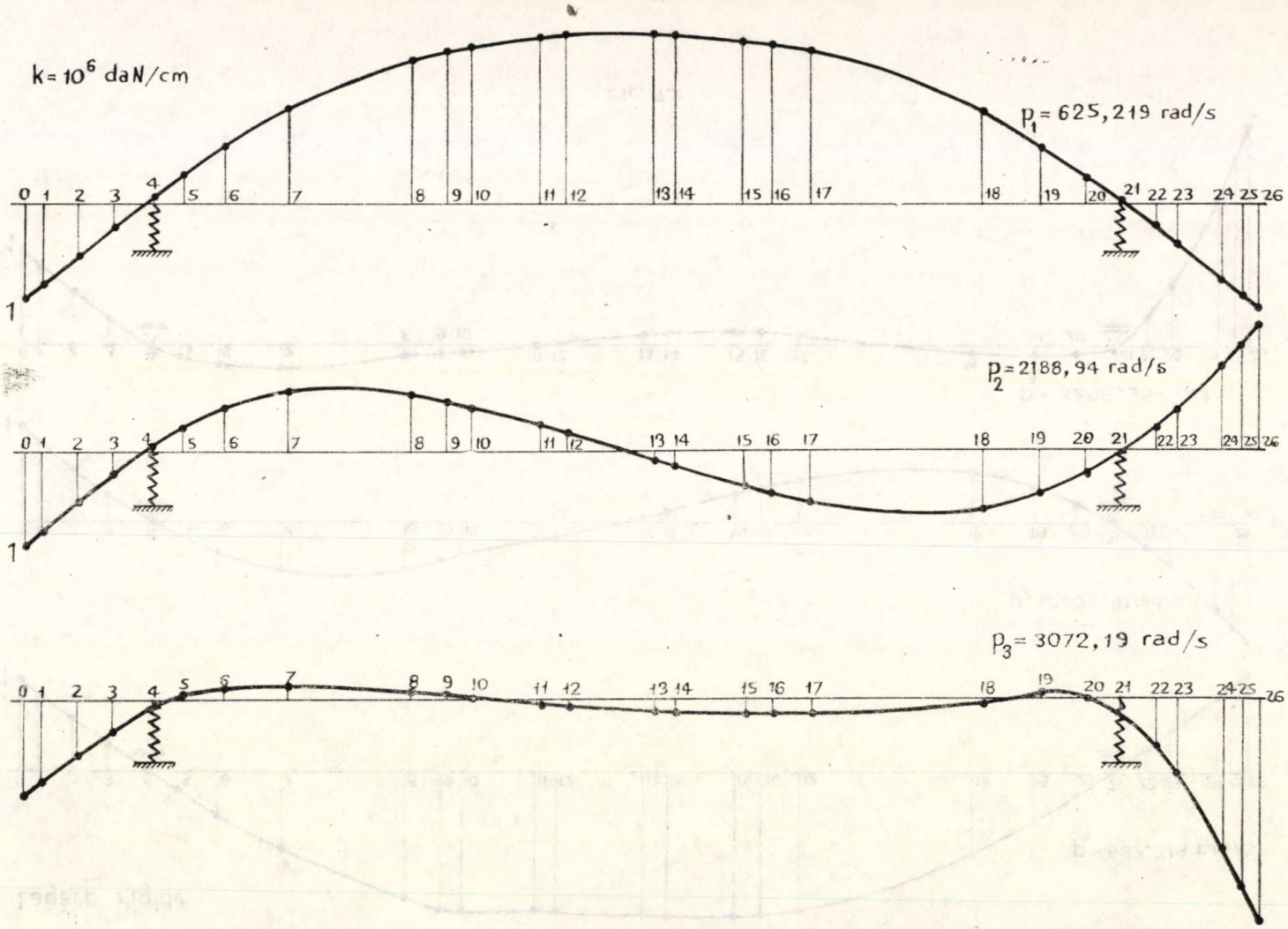

k = 10⁶ daN/cm
p₁ = 625,219 rad/s
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26
1
p₂ = 2188,94 rad/s
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26
1
p₃ = 3072,19 rad/s
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

Fig. 7.3

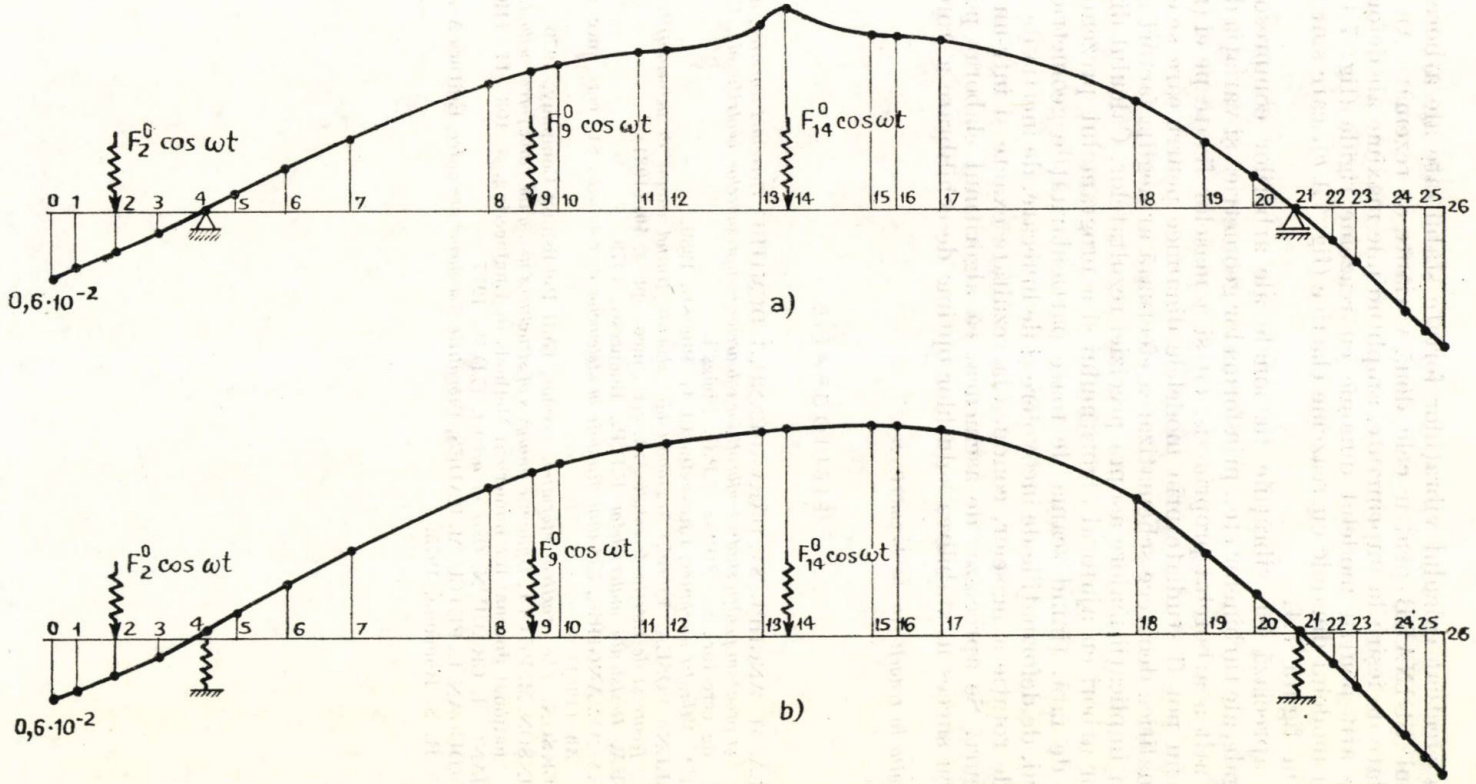

$F_2^0 \cos \omega t$
$F_9^0 \cos \omega t$
$F_{14}^0 \cos \omega t$
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26
$0{,}6 \cdot 10^{-2}$
a)
$F_2^0 \cos \omega t$
$F_9^0 \cos \omega t$
$F_{14}^0 \cos \omega t$
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26
$0{,}6 \cdot 10^{-2}$
b)

Fig. 7.4

S-a efectuat calculul vibraţiilor forţate stabilizate ale arborelui cu programul CDINARB pentru cele două variante de rezemări. Au rezultat, ca date de ieşire la imprimante, amplitudinile maxime ale deformatei dinamice atît pentru modelul dinamic cu reazeme rigide (fig. 7.1 *a*),cît şi pentru modelul dinamic cu reazeme elastice (fig. 7.1 *b*), care sînt reprezentate în figura 7.4.

Se apreciază că vibraţiile flexionale ale arborilor compresoarelor centrifugale, ale turbinelor etc., prin forma lor geometrică şi variaţia dimensiunilor, atît a arborelui propriu-zis, cît şi a maselor fixate pe ei (rotori, discuri), nu pot fi studiate prin modelele dinamice pentru care se cunosc soluţii analitice deoarece schematizarea efectuată ar neglija factori importanţi, cu implicaţii majore asupra preciziei rezultatelor. Calculul dinamic al acestor arbori cu ajutorul algoritmului şi a programului prezentate în lucrarea de faţă, ţinînd seama de toate particularităţile geometrice ale sistemului, de deformaţiile de încovoiere şi de lunecare, de inerţia de translaţie şi de rotaţie a maselor, conduce la rezultate exacte şi într-un timp foarte scurt. Se apreciază, de asemenea, că algoritmul elaborat poate fi utilizat cu succes în stabilirea soluţiilor optime de echilibrare a rotorilor.

Primită la redacţie la 29 decembrie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. N. POSEA, AL. ANGHEL, ST. DĂRVĂREANU, I. DUMITRU, *Cercetări teoretice, algoritm şi program pentru studiul vibraţiilor rotoarelor compresoarelor centrifugale*, Contract de cercetare nr. 3/1982. I.P.G. Ploieşti.
2. N. POSEA, *Vibraţii mecanice*, Litografia I.P.G. Ploieşti, 1980.
3. MAGDALENA POSEA, *Vibraţii flexionale ale arborilor ţinînd seama de deformaţiile de forfecare şi de inerţia de rotaţie*. St. cerc. mec. apl. *3*, **40**, (1981).
4. N. POSEA, *Rezistenţa materialelor* E.D.P., Bucureşti, 1979.
5. N. POSEA, AL. ANGHEL, *Calculul dinamic al sistemelor de conducte*, St. cerc. mec. apl., *1*, **40**, (1981).
6. CH. JACKSON, *The practical vibration primar*, Gulf Publishing Company, 1979.
7. J. ROBINSON, M. PETYT, *Dynamic analysis of structures using the rank force method*, International Journal for numerical Methods in Engineering, **3**, 103—117 (1971).
8. A. RIPIANU, I. CRĂCIUN, *Osii şi arbori*, E.D.P., 1977.
9. GH. BUZDUGAN, L. FETCU, M. RADEŞ, *Vibraţiile sistemelor mecanice*, Editura Academiei R. S. România, 1975.

CALCULUL DE REZISTENȚĂ AL STRUCTURILOR TUBULARE PRESURIZATE LA EXTERIOR. I

de A. PAVEL

Institutul de petrol și gaze Ploiești

Se elaborează o teorie generală privind rezistența elastomecanostatică a structurilor tubulare de tip manta cilindrică sau tubulatură, rigidizate transversal și presurizate la exterior. Se prezintă și se analizează particularizările teoriei respective pentru presurizarea exterioară uniformă sau hidrostatică, unilaterală și multilaterală.

1. FORMULAREA PROBLEMEI

Din punct de vedere constructiv, structurile tubulare presurizate la exterior, care fac obiectul lucrării prezente, sînt structuri *mixte*, *rigi-*

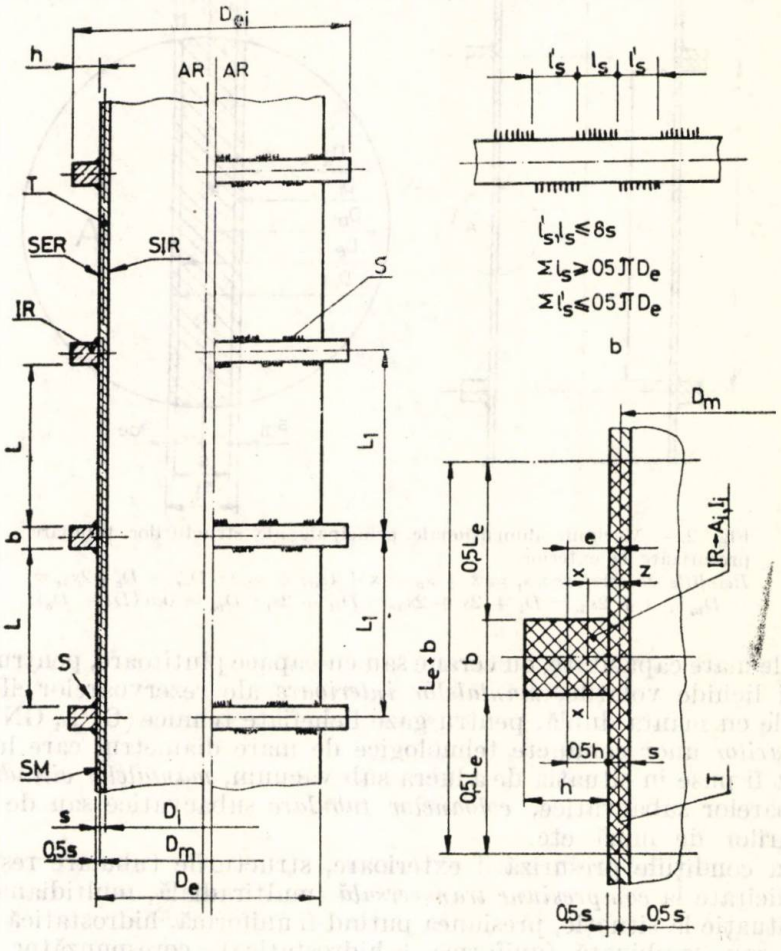


Fig. 1. — Structurile tubulare presurizate la exterior : *a* — schița constructivă ; *b* — detaliul privind solidarizarea, prin sudură discontinuă alternată, a dispozitivelor (inelelor) de rigidizare transversală cu tubulatura cilindrică circulară lungă de tip manta ; *c* — schema de calcul privind zona echivalentă de rigidizare transversală.

dizate transversal cu inele sau cu dispozitive inelare compuse sau chesonate (fig. 1), de tipul *mantalelor cilindrice* ale anumitor aparate tehnologice (coloane de distilare-vaporizare-fracţionare etc. sub vacuum, recipiente cu mantale cilindrice duble sau ecranate — în diferite scopuri — la exterior, reactoare chimice, autoclave ş.a.), *mantalelor* rezervoarelor cilindrice ver-

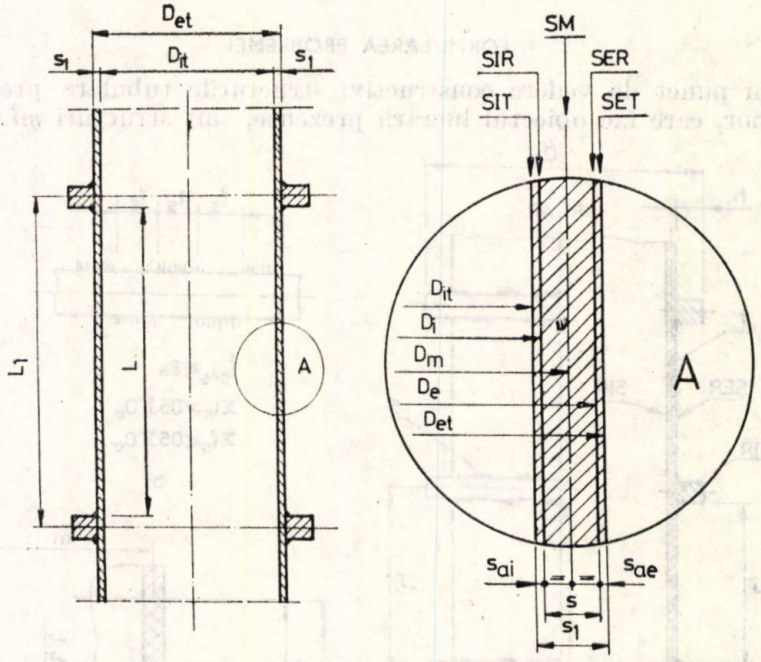


Fig. 2. — Mărimile dimensionale principale ale structurilor tubulare presurizate la exterior.
Relaţiile de corelare: $s_1 = s + s_a = s + (s_{ai} + s_{ae})$; $D_{et} = D_e + 2s_{ae} = D_m + s + 2s_{ae} = D_i + 2s + 2s_{ae} = D_{it} + 2s_1$; $D_m = 0{,}5\,(D_i + D_e)$.

ticale de mare capacitate, cu ecrane sau cu capace plutitoare, pentru hidrocarburi lichide volatile, *mantalelor interioare* ale rezervoarelor cilindrice verticale cu manta dublă, pentru gaze lichefiate tehnice (GPL, GNL etc.), *tubulaturilor* unor conducte tehnologice de mare diametru, care lucrează sau pot fi puse în situaţia de a lucra sub vacuum, *mantalelor cilindrice* ale rezervoarelor subacvatice, *coloanelor tubulare* subacvatice sau de tubare a puţurilor de mină etc.

În condiţiile presurizării exterioare, structurile tubulare respective sînt solicitate la *compresiune transversală* (multiradială, multidiametrală), de la situaţie la situaţie, presiunea putînd fi uniformă, hidrostatică (neuniformă) sau combinată (uniformă + hidrostatică), corespunzător statică (cu intensitate constantă în timp) sau variabilă (cu acţiune de scurtă durată ori dinamică (cu acţiune instantanee, intempestivă →şocuri de presiune). Dat fiindu-le caracterul lor *extraordinar*, în lucrarea de faţă, solicitările ce revin presurizărilor dinamice şi, de asemenea, celor datorite unor stări de avarie (cu sau fără accident) nu se vor lua în consideraţie. Considerîndu-se, deocamdată, ca fiind *neconcludente*, nu se vor lua în consideraţie nici

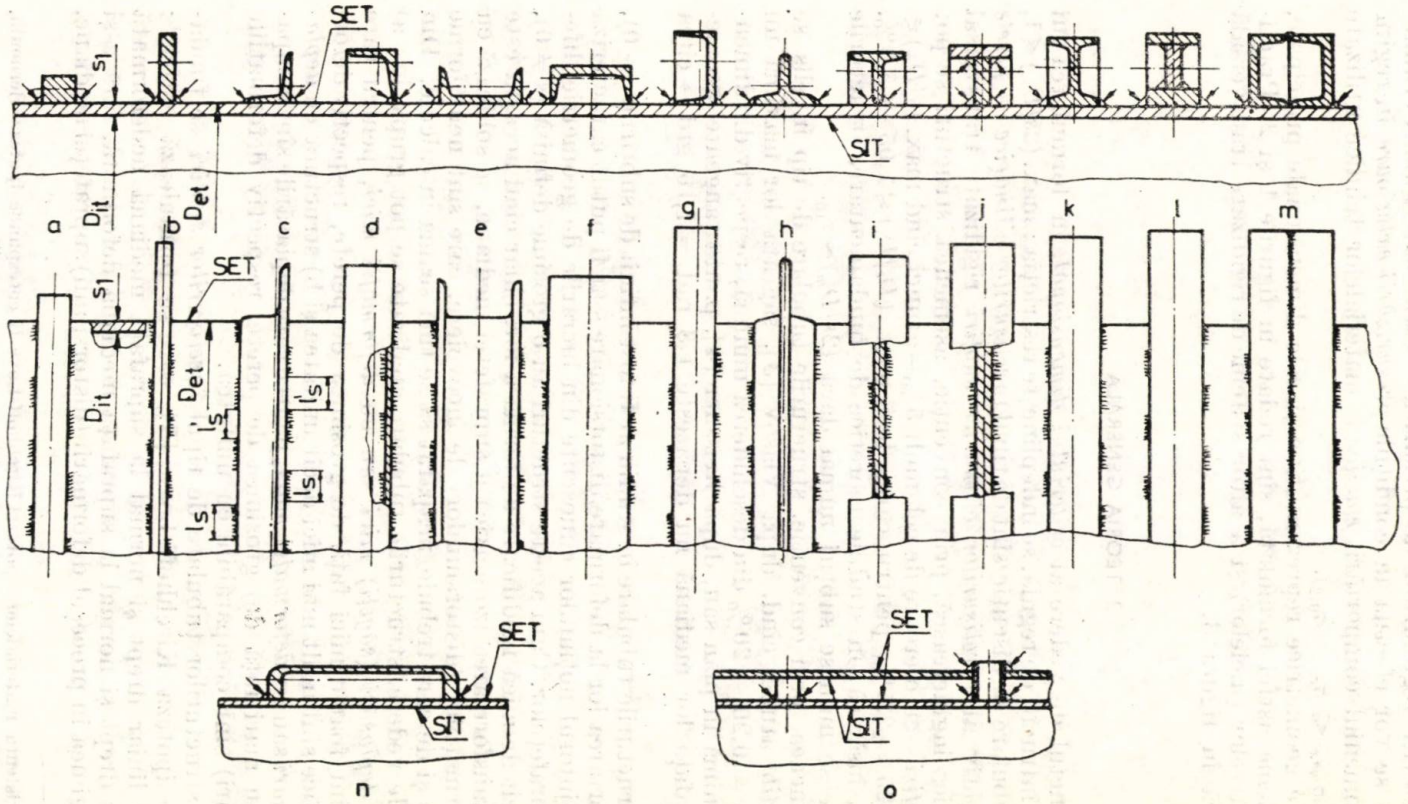


Fig. 3. — Practicarea dispozitivelor (inelelor) și sistemelor de rigidizare transversală. Variante constructive. Exemplificări : *a* — inelul cu profil pătrat ; *b* — inelul cu profil dreptunghiular : *c*, *d* — inelul cu profil cornier (cu aripi egale sau neegale) ; *e*, *f*, *g* — inelul cu profil U ; *h*, *i*, *j* — inelul cu profil *T* (simplu sau compus) ; *k*, *l* — inelul cu profil dublu *T* sau *H* (simplu sau compus) ; *m* — inelul chesonat, cu profil dublu U ; *n*, *o* — sistemele de rigidizare transversală care, împreună cu tubulatura (T) sau mantaua cilindrică, creează spații intermediare libere, de regulă etanșe.

Observație. Soluțiile constructive de tip *c*, *e* și *h* se vor evita, întrucît ele asigură momente de inerție *minime* în raport cu axa $x-x$, din figura 1 *c*, care trece prin centrul geometric al secțiunii corespunzătoare zonei echivalente de rigidizare transversală și este paralelă cu axa de revoluție AR (fig. 1 *a*).

solicitările datorite regimurilor de presurizare variabilă. Aşadar, studiile care urmează se vor efectua în condiţiile *presurizării exterioare* în regim *static* şi în domeniul comportării *elastice* a materialelor tehnice utilizate (pentru care $\sigma_{max} < \sigma_c = \sigma_{0,2}$).

Mărimile geometrice reprezentative şi cele dimensionale principale, privind problema astfel formulată, sînt redate în figurile 1 şi 2. Practicarea dispozitivelor (inelelor) şi a altor sisteme de rigidizare transversală se exemplifică în figura 3.

2. TEORIA GENERALĂ

Din punctul de vedere al *criteriului dimensional*, în formularea lui Galimov [1], întrucît, de regulă, se îndeplineşte restricţia : max. $(2s/D_m) \ll 1$, structurile tubulare în discuţie sînt de tipul *învelişurilor cilindrice cu perete subţire*, respectiv al *învelişurilor cilindrice subţiri* rigidizate transversal [2]. În practica inginerească, prin convenţie, asemenea structuri se pot considera *subţiri* — cu o eroare de cel mult 5 % — atunci cînd max. $(s/D_m) \leqslant \leqslant 1/40 = 0{,}025 \rightarrow 2{,}5\,\%$, pentru care, deci, max. $(D_e/D_i) \leqslant 1{,}05 \rightarrow 5{,}0\,\%$. De remarcat, însă, că, în studiile teoretice de fundamentare, structurile tubulare date se numesc subţiri numai dacă $(2s/D_m) \sim \varepsilon_{10}$.

De asemenea, prin convenţie, structurile tubulare de tip înveliş se numesc *pleoştite* atunci cînd, după Vlasov [3], săgeata lor maximă nu depăşeşte $1/5 = 0{,}20 \rightarrow 20\,\%$ din deschiderea minimă, respectiv din dimensiunea lor minimă în plan sau, după Reissner [4], panta tangentei geometrice la suprafaţa lor mediană nu depăşeşte $1/8$ rad $= 7{,}16$ grd $\rightarrow$ circa 7 grd.

Dacă structurile tubulare în studiu ar fi fost infinit de subţiri ($s \rightarrow 0$), atunci comportarea lor la deformare/distorsionare s-ar fi putut caracteriza complet cu ajutorul noţiunilor cunoscute din lucrările de geometrie diferenţială a suprafeţelor. Cum aceste structuri au o grosime definită ($s \neq 0$), oricare şi oricît de mică modificare de formă a lor, chiar cînd aceasta este însoţită de transformarea izometrică a suprafeţei mediane, se soldează cu apariţia deformaţiilor (distorsiunilor) de încovoiere, care sînt neuniforme pe grosimea s şi de care trebuie neapărat să se ţină seama în calcule. Din acest punct de vedere, structurile tubulare analizate se pot grupa în : a) structuri cu *deplasări* (*săgeţi*) *mici* sau cu *deformaţii mici*, pentru care deplasările sînt foarte mici faţă de grosimea de perete, respectiv deformaţiile specifice sînt mult mai mici decît unitatea şi b) structura cu *deplasări* (*săgeţi*) *mari* sau cu *deformaţii mari*, pentru care deplasările sînt comparabile cu (sau mari faţă de) grosimea de perete, respectiv deformaţiile specifice (mari) sînt comparabile cu unitatea.

Teoria structurilor tubulare de tipul *învelişurilor subţiri* se fundamentează pe ipoteza Kirchhoff-Love [5], care se formulează astfel*) : 1) elementul liniar drept şi normal la suprafaţa mediană nedeformată rămîne liniar drept şi normal la suprafaţa mediană deformată, fără a-şi modifica lungimea în procesul deformării (distorsiunii) suprafeţei mediane,

*) În Rezistenţa materialelor, ipotezei Kirchhoff-Love îi corespunde ipoteza Bernoulli, pe care se fundamentează teoria încovoierii barelor.

rezultînd s = const. și 2) eforturile unitare normale σ perpendiculare pe suprafața mediană sînt neglijabil de mici în comparație cu toate celelalte eforturi unitare. Această teorie*) se mai numește *teoria clasică*, spre deosebire de *teoria generală* modernă a structurilor tubulare de tip înveliș,care include :

— *teoria liniară*, care admite ipoteza deplasărilor infinit mici ale punctelor structurii, ceea ce permite—cu suficientă precizie din punctul de vedere al rigurozității matematice—să fie neglijate pătratele și puterile superioare ale deplasărilor respective, în comparație cu primele lor puteri; acestei teorii îi corespunde așa-numita *problemă liniară*, expuse pe larg în numeroase lucrări capitale din fondul actual al literaturii tehnice internaționale (vezi bibliografia lucrării [2]);

— *teoria neliniară*, care admite ipoteza deplasărilor mari, comparabile cu dimensiunile liniare ale structurilor și care, deci, ia în considerație pătratele (cazul calculelor de ordinul doi → teoria de ordinul doi) și chiar puterile superioare ale deplasărilor respective; acestei teorii îi corespunde așa-numita *problemă neliniară*, abordată din ce în ce mai frecvent în literatura de specialitate (citată în [2]).

Rezultă, așadar, că teoria structurilor tubulare de tipul învelișurilor subțiri este *cazul particular* al teoriei generale a acelorași structuri, însă de tipul învelișurilor, corespunzător problemei liniare. Structurile tubulare abordate în baza teoriei liniare se numesc *structuri tubulare fără moment* (încovoietor), cărora le va corespunde, deci, așa-numita *teoria fără moment*, iar cele studiate în baza teoriei neliniare se numesc *structuri tubulare cu moment* (încovoietor), cărora le va corespunde, deci, așa-numita *teorie cu moment*. Au fost elaborate, de asemenea, *teorii tranzitorii* care privesc așazisele *structuri tubulare cu semimoment* [3].

Ecuațiile fundamentale ale teoriei generale a structurilor tubulare de tipul învelișurilor de revoluție includ ecuațiile *de echilibru*, ecuațiile *geometrice* (preluate din ecuațiile deduse, în forma redusă, de către Reissner [4]) și ecuațiile *fizice* (extrase pin cele deduse de Vlasov [3], Novojilov [6], Goldenveizer [7] ș.a.). Evident, neliniaritatea teoriei abordate, în general, poate fi de natură geometrică sau fizică.

Sistemul ecuațiilor generale ale teoriei structurilor tubulare de tipul învelișurilor de revoluție cu grosimea de perete constantă (s = const.) are următoarea configurație [2]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(N_m R_2 \sin\varphi) - QR_2 \sin\varphi - N_t R_1 \cos\varphi + p_x R_1 R_2 \sin\varphi = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(QR_2 \sin\varphi) + N_m R_2 \sin\varphi + N_t R_1 \sin\varphi + p_z R_1 R_2 \sin\varphi = 0, \quad (2)$$

*) În general, teoria clasică se aplică nu numai structurilor de tip înveliș definite prin condițiile anterioare, ci și structurilor de același tip pentru care $(2s/D_m) \approx (1/5) \ldots (1/3) =$ $= 0{,}200 \ldots 0{,}333$. Dealtfel, Novojilov și Finkelștein (vezi Prikl. mat. i meh., 1943, vol. 7, nr. 4, p. 331...340) au demonstrat că, în teoria învelișurilor subțiri, eroarea corespunzătoare ipotezei Kirchhoff-Love este o mărime de ordinul $2s/D_m$ față de unitate.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(M_m R_2 \sin\varphi) - Q R_1 R_2 \sin\varphi - M_t R_1 \cos\varphi = 0, \tag{3}$$

$$N_m = \frac{Es}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \tag{4}$$

$$N_t = \frac{Es}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), \tag{5}$$

$$M_m = \frac{Es^3}{12(1-\mu^2)}\left[\frac{\varepsilon_1}{R_1} - \frac{1}{R_1}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\varphi} + \mu\frac{\varepsilon_2}{R_2} - \mu\frac{\vartheta}{R_2}\operatorname{ctg}\varphi\right] -$$

$$- D\left[\frac{1}{Es}\left(\frac{(N_m - \mu N_t}{R_1} + \frac{N_t - \mu N_m}{R_2}\right)\right] - \frac{1}{R_1}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\varphi} - \mu\frac{\vartheta}{R_2}\operatorname{ctg}\varphi, \tag{6}$$

$$M_t = D\left[\frac{1}{Es}\left(\frac{N_t - \mu N_m}{R_2} + \mu\frac{N_m - \mu N_t}{R_1}\right)\right] -$$

$$- \frac{\vartheta}{R_2}\operatorname{ctg}\varphi - \frac{\mu}{R_1}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\varphi}, \tag{7}$$

fiind, aşadar, un sistem de şapte ecuaţii cu şapte necunoscute (N_m, N_t, Q, M_m, M_t, $\varepsilon_1 = \varepsilon_m$ şi $\varepsilon_2 = \varepsilon_t$).

Muştari [8, 9] a dovedit că, atunci cînd max. $(s/D_m) \leqslant \sqrt{\varepsilon_{10}}$, eroarea de evaluare nu depăşeşte 10 % dacă (6) şi (7) se înlocuiesc prin următoarele expresii simplificate:

$$M_m = -D\left[\frac{1}{R_1}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\varphi} + \mu\frac{\vartheta}{R_2}\operatorname{ctg}\varphi\right], \tag{8}$$

$$M_t = -D\left[\frac{\mu}{R_1}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\vartheta}{R_2}\operatorname{ctg}\varphi\right]. \tag{9}$$

Pentru a evidenţia sugestiv importanţa practică a restricţiei lui Muştari, se consideră un oţel cu limita tehnică de proporţionalitate $\sigma_{10} = 250$ N/mm^2 $< \sigma_{0,2}$ şi $E = 21.10^4$ N/mm^2, pentru care $\varepsilon_{10} = \sigma_{10}/E = 250/21.10^4 = 0{,}00119$, rezultînd $\sqrt{\varepsilon_{10}} = \sqrt{0{,}00119} = 0{,}0345$. Aşadar, formulele (8, 9) conduc — în cazul considerat — la rezultate satisfăcătoare (cu erori sub 10 %) pentru max. $(s/D_m) \leqslant 0{,}0345$, respectiv max. $(s/0{,}5\ D_m) \leqslant 2{,}0{,}0345 = 0{,}069 \rightarrow 0{,}07$, ceea ce, practic, acoperă întregul sortiment tipodimensional al structurilor tubulare aflate în studiul dat. Evident, pentru oţelurile cu $\sigma_{10} > 250$ N/mm^2, ε_{10} va creşte, ceea ce va face ca satisfacerea restricţiei lui Muştari să fie şi mai bine asigurată. Iată de ce, în continuare, pentru evaluarea eforturilor M_m şi M_t vor fi utilizate numai formulele simplificate (8, 9).

Ecuaţiile (1)—(3) sînt *ecuaţii de echilibru*, iar ecuaţiile (4)—(7), respectiv (8, 9), sînt *ecuaţii ale teoriei cu moment*.

În *teoria fără moment*, conform căreia (M_m, M_t) $\to 0$, din (3) rezultă imediat că $Q \to 0$ și sistemul ecuațiilor de echilibru (1)—(3) capătă următoarea nouă structură :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(N_m R_2 \sin\varphi) - N_t R_1 \cos\varphi + p_x R_1 R_2 \sin\varphi = 0, \tag{10}$$

$$N_m R_2 + N_t R_1 + p_z R_1 R_2 = 0, \tag{11}$$

transformîndu-se, astfel, într-un sistem — ușor rezolvabil de două ecuații cu numai *două necunoscute* ($N_m \to \sigma_m$ și $N_t \to \sigma_t$). Acest din urmă sistem cuprinde așa-numitele *ecuații fundamentale ale teoriei fără moment*, respectiv :

a) *ecuația de echilibru a elementului de structură tubulară*, numită, de asemenea, ecuația lui Laplace, obținută din (11) după împărțirea prin $R_1 R_2$ și operarea substituției firești $R_1 = \infty$:

$$N_t = -p_z R_2 ; \quad \sigma_t' = -p_z R_2/s ; \tag{12, 13}$$

b) *ecuația de echilibru a zonei de structură tubulară*, obținută din ecuația diferențială (10), după ce aceasta din urmă se adună cu ecuația (11) multiplicată cu $\cos\varphi$ și se integrează în intervalul deschiderilor $\varphi_0 \to x_0$ (*conturul liber*) și $\varphi \to x$ (conturul curent), operîndu-se substituțiile care se impun $R_1 \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}x$ și $\varphi = \pi/2 = \text{const.}$:

$$N_m = \frac{P_0}{2\pi R_2} - \frac{1}{R_2}\int_{x_0}^{x} p_x R_2 \, dx, \tag{14}$$

$$\sigma_m' = \frac{P_0}{2\pi R_2 s} - \frac{1}{R_2 s}\int_{x_0}^{x} p_x R_2 \, \mathrm{d}x. \tag{15}$$

Pentru $\varphi_0 = 0$ și $P_0 = 0$ (cînd conturul liber *lipsește*), introducîndu-se notațiile :

$$I(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} R_1 R_2 (p_x \sin\varphi + p_z \cos\varphi) \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi ; \ [\mathrm{N}]$$

$$\Phi(\varphi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left[\left(\mu + \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{I(\varphi)}{\sin^2\varphi} - R_2^2 p_z\right] + \left(\mu + \frac{R_1}{R_2}\right) \times$$

$$\times \frac{I(\varphi)\cos\varphi}{\sin^3\varphi} + \left(\mu + \frac{R_2}{R_1}\right)\left[\frac{I(\varphi)}{\sin^2\varphi} - R_1 R_2 p_z\right] \mathrm{ctg}\,\varphi$$

și $V = QR_2$ [N],

în *teoria cu moment* se obține:

$$N_m = -Q \operatorname{ctg} \varphi - \frac{I(\varphi)}{R_2 \sin^2 \varphi}, \tag{16}$$

$$N_t = -\frac{1}{R_1}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{I(\varphi)}{R_1 \sin^2 \varphi} - p_z R_2, \tag{17}$$

sistemul *ecuațiilor diferențiale ale teoriei cu moment*, cu numai două necunoscute (V și ϑ), având configurația:

$$\frac{R_2}{R_1}\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\varphi^2} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{R_2}{R_1}\operatorname{ctg}\varphi\right]\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi} -$$

$$-\left[\frac{R_1}{R_2}\operatorname{ctg}^2\varphi - \mu\right]V = Es R_1 \vartheta + \Phi(\varphi), \tag{18}$$

$$\frac{R_2}{R_1}\frac{\mathrm{d}^2\vartheta}{\mathrm{d}\varphi^2} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{R_2}{R_1}\operatorname{ctg}\varphi\right]\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\varphi} -$$

$$-\left(\frac{R_1}{R_2}\operatorname{ctg}^2\varphi + \mu\right)\vartheta = -\frac{R_1}{D}V. \tag{19}$$

După cum se cunoaște, ecuațiile care redau relațiile cantitative dintre eforturi (eventual unitare) și deformații sau deplasări se numesc *ecuații fizice*, în cazul de față, acestea fiind următoarele [2]:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{Es}(N_m - \mu N_t) = \frac{1}{E}(\sigma'_m - \mu\sigma'_t), \tag{20}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{Es}(N_t - \mu N_m) = \frac{1}{E}(\sigma'_t - \mu\sigma'_m), \tag{21}$$

$$u = C \sin\varphi + \sin\varphi \int \frac{\varepsilon_m R_1 - \varepsilon_t R_2}{\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi, \tag{22}$$

$$v = C\cos\varphi + \cos\varphi \int \frac{\varepsilon_m R_1 - \varepsilon_t R_2}{\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi - \varepsilon_t R_2, \tag{23}$$

$$\Delta = C + \int \frac{\varepsilon_m R_1 - \varepsilon_t R_2}{\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi - \varepsilon_t R_2 \cos\varphi, \tag{24}$$

$$\Delta r = \varepsilon_t R_2 \sin \varphi = \varepsilon_t r = -\frac{R_2 \sin \varphi}{Es}(N_t - \mu N_m) =$$

$$= -\frac{R_2 \sin \varphi}{E}(\sigma_t' - \mu \sigma_m'), \tag{25}$$

$$\vartheta = \left(\varepsilon_m - \frac{R_2}{R_1}\varepsilon_t\right) \operatorname{ctg} \varphi - \frac{1}{R_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(\varepsilon_t R_2), \tag{26}$$

în care C este o constantă de integrare, care are semnificația unei deplasări *longitudinale* (în mm) a structurii tubulare, în ansamblul său. În mod obișnuit, în calculele practice, Δr se consideră *negativ* ($\Delta r < 0$), atunci cînd reprezintă o creștere a razei r a paralelei (din care motiv a apărut semnul *minus* în relația corespunzătoare) și *pozitiv* ($\Delta r > 0$), atunci cînd reprezintă o diminuare a aceleiași raze r. Deoarece corelează cantitativ mărimile fizice ϑ, ε_m și ε_t, ecuația (26) se mai numește *ecuație de simultaneitate*. De remarcat că, întrucît redau relații pur geometrice, ecuațiile fizice (22)—(24), (25)-prima parte și (26) sînt valabile atît în teoria fără moment, cît și în teoria cu moment.

Așadar, în alternativa generală a *teoriei cu moment*, rezolvînd sistemul ecuațiilor diferențiale (18) și (19), se determină mărimile V și ϑ, iar apoi, cu ajutorul acestora din urmă, se calculează eforturile N_m, N_t, Q și, respectiv, M_m, M_t, cu formulele corespunzătoare (16), (17), $Q = V/R_2$, (8) și (9). În continuare, se pot evalua imediat deformațiile specifice ε_m și ε_t, cu formulele știute (20,21), respectiv, deplasările u, v, Δ, Δr și ϑ, cu formulele cunoscute (22)—(26). Principial, cu acestea, problemele teoriei generale a structurilor tubulare, avînd $s = \text{const.}$, $\varphi_0 = 0$ și $P_0 = 0$, au fost rezolvate.

3. PARTICULARIZAREA TEORIEI GENERALE PENTRU PRESURIZAREA EXTERIOARĂ UNIFORMĂ

3.1. Presurizarea multilaterală. Structura tubulară se consideră ca fiind *obturată* la extremități (fig. 4) și solicitată la presiune exterioară uniformă *multilaterală*. Ca atare, corespund valorile $p_x = 0$ și $p_z = p = p_e > 0$, respectiv $R_1 = \infty$, $R_2 = r = R_m = 0{,}5\, D_m$, $D_m = \text{const.}$, $s = \text{const.}$ și $\varphi = \pi/2$.

3.1.1. Teoria fără moment. Din ecuațiile (12, 13) rezultă, în mod direct, că

$$N_t = -0{,}5\, p\, D_m, \quad \sigma_t = \sigma_t' = -pD_m/2s. \tag{27, 28}$$

Avînd în vedere aproximația $D_i = (D_m - s) \to D_m$, acceptabilă pentru $s \ll D_m$, conform cu [2] se obține $P_0 = \pi D_m^2 p/4$ și din ecuațiile (14, 15) rezultă, de asemenea, în mod direct, că

$$N_m = -0{,}25\, pD_m, \quad \sigma_m = \sigma_m' = pD_m/4s. \tag{29, 30}$$

Așadar, $N_t/N_m = \sigma_t/\sigma_m = 2$, ceea ce înseamnă că eforturile N_t și eforturile unitare corespunzătoare σ_t sînt duble față de cele N_m și, respectiv, σ_m.

Avînd în vedere că, deși sînt executate în construcție sudată, structurile tubulare analizate au o capacitate portantă condiționată de mărimile $\varphi_s = 1{,}00$ și σ_{ac}, respectiv σ_a și obser-

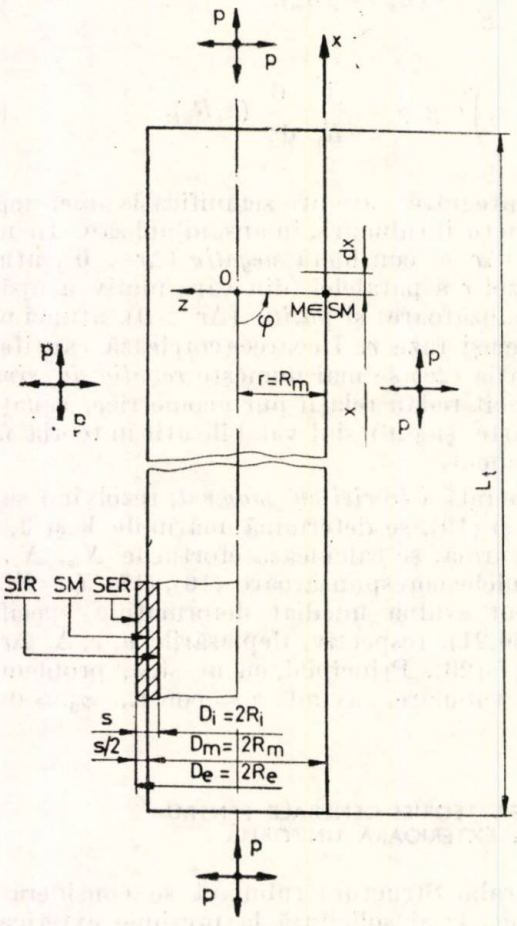


Fig. 4. — Schema de calcul pentru structurile tubulare solicitate la presiune exterioară uniformă multilaterală.

Observație. Aici, meridianul, din teoria generală a învelișurilor de revoluție, se identifică cu generatoarea suprafeței mediane cilindrice circulare, deci $\varphi = \pi/2 = \text{const.}$, $R_1 = \infty$ și $R_2 = r = R_m = 0{,}5\, D_m$.

vînd*) că efortul unitar normal principal maxim este $\sigma_{max} = \sigma_t > \sigma_m$, din *condiția de rezistență* formulată în conformitate cu criteriul Galilei-Rankine, și anume :

$$\sigma_{max} = \sigma_t = pD_m/2s \leqslant \sigma_{ac}, \tag{31}$$

rezultă următoarele *formule de dimensionare* :

$$s \geqslant \frac{pD_i}{2\sigma_{ac} - p} \; ; \quad s \geqslant \frac{pD_e}{2\sigma_{ac} + p}, \tag{32, 33}$$

*) Întrucît, în cazul dat, semnul algebric (minus) nu interesează atunci cînd se formulează condiția de rezistență.

respectiv

$$s_1 = s + s_a \geqslant \frac{pD_i}{2\sigma_{ac} - p} + s_a, \tag{34}$$

$$s_1 = s + s_a \geqslant \frac{pD_e}{2\sigma_{ac} + p} + s_a, \tag{35}$$

în situațiile *particulare* cu $p \ll 2\sigma_{ac}$ (de exemplu, cu $p/2\sigma_{ac} \leqslant 0{,}01 \rightarrow$ max. 1,00%) putîndu-se opera cu următoarea formulă *aproximativă* de dimensionare:

$$s_1 \geqslant \frac{pD_{m,i,e}}{2\sigma_{ac}} + s_a. \tag{36}$$

3.1.2. Deformațiile și deplasările. Rotirea structurilor tubulare, calculată cu (26) în condițiile $R_1 d\varphi = dx$, $\varphi = \pi/2 = \text{const.}$ și N_m, $N_t = \text{const.}$ (în raport cu deschiderea φ), este $\vartheta = 0$, iar lungirea Δr a razei $r = R_m = 0{,}5D_m$, determinată cu (25), are următoarea expresie analitică*):

$$\Delta r = pD_m^2(1 - 0{,}5\,\mu)/4Es. \tag{37}$$

Deformațiie (lungirile) specifice ε_m și ε_t, evaluate cu formulele corespunzătoare (20) și (21), au următoarele expresii de calcul:

$$\varepsilon_m = -pD_m(1 - 2\mu)/4Es, \tag{38}$$

$$\varepsilon_t = -pD_m(2 - \mu)/4Es, \tag{39}$$

deci rezultînd $\varepsilon_t/\varepsilon_m = 4{,}25$.

Deplasările u și v, calculate cu formulele (22) și (23), sînt, în mod corespunzător, următoarele**):

$$u = \varepsilon_m x \rightarrow \max.\ u = \varepsilon_m L_t = -pD_m L_t(1 - 2\mu)/4Es, \tag{40}$$

$$v = -0{,}5\,\varepsilon_t D_m = pD_m^2(2 - \mu)/8Es = \Delta r, \tag{41}$$

conform cu (24) rezultînd:

$$\Delta = u \rightarrow \max.\ \Delta = \max.\ u. \tag{42}$$

---

*) Apare semnul plus deoarece lungirea Δr se materializează în sensul axei z (fig. 4).

**) Se presupune că, în secțiunea sa transversală de capăt, aflată la extremitatea inferioară (fig. 4), structura tubulară este *încastrată* pentru deplasările longitudinale, astfel că $u_{x=0} = 0$ și, deci, $\Delta_{x=0} = 0$, rezultînd $C = 0$.

3.1 3. Teoria cu moment. Particularizînd pentru cazul de față ($R_1 = \infty$, $\varphi = \pi/2 = \text{const.}$, $\vartheta = 0$) expresiile generale (6) și (7), se obține:

$$M_m = -\frac{\mu(1-0{,}5\mu)}{1-\mu^2}\frac{ps^2}{12}, \tag{43}$$

$$M_t = -\frac{1-0{,}5\mu}{1-\mu^2}\frac{ps^2}{12} = \frac{M_m}{\mu}, \tag{44}$$

deci $M_m = \mu M_t$, rezultînd:

$$\sigma_m'' = \pm 6M_m/s^2 = \mp\frac{\mu(1-0{,}5\mu)}{1-\mu^2}\frac{p}{2}, \tag{45}$$

$$\sigma_t'' = \pm 6M_t/s^2 = \mp\frac{1-0{,}5\mu}{1-\mu^2}\frac{p}{2} = \sigma_m''/\mu, \tag{46}$$

astfel că, în teoria cu moment, eforturile unitare normale σ_t și σ_m au următoarele expresii de calcul:

$$\sigma_t = \sigma_t' + \sigma_t'' = -p[D_m/2s \mp (1-0{,}5\mu)/2(1-\mu^2)]; \tag{47}$$

$$\sigma_m = \sigma_m' + \sigma_m'' = -p[D_m/4s \mp \mu(1-0{,}5\mu)/2(1-\mu^2)]. \tag{48}$$

Prin urmare, indiferent de mărimile dimensionale (s, D_m, L_t etc.), efortul unitar maxim $\sigma_t'' \gg \sigma_m''(\to \sigma_t''/\sigma_m'' = \mu^{-1})$ are (pentru $\mu = 0{,}3$) ordinul de mărime al lui cel mult $0{,}5p$, în general fiind *neglijabil* de mic în comparație atît cu $\sigma_t' = pD_m/2s$, cît și cu valorile uzuale σ_{ac}. Ca atare, formulele de dimensionare (32)—(36) își mențin valabilitatea și în condițiile teoriei cu moment, corectarea lor fiind necesară doar pentru unele situații de excepție privind îndeplinirea *la limită* a condiției de rezistență (31).

3.2. Presurizarea unilaterală. În această abordare, structura tubulară dată (fig. 1) se presupune *deschisă* la ambele extremități (fig. 4) și solicitată la presiune exterioară uniformă *unilaterală*.

3.2.1. Teoria fără moment. De această dată, $P_0 = 0$, deoarece contururile libere superior și inferior *nu sînt solicitate*, astfel că $N_m = 0 \to$ $\to \sigma_m = \sigma_m' = 0$. În rest, rămîn valabile expresiile de calcul cunoscute (27, 28) și (31) — (36).

3.2.2. Deformațiile și deplasările. Cum $\vartheta = 0$ (formula 26) și $N_m = 0$, particularizînd expresiile (20)—(25) în condițiile pentru care $C = 0$, se obține:

$$\varepsilon_m = pD_m\mu/2Es, \tag{49}$$

$$\varepsilon_t = -pD_m/2Es = -\varepsilon_m/\mu, \tag{50}$$

$$u = \Delta = \varepsilon_m x \to \max.\ u = \max.\ \Delta = pD_mL_t\mu/2Es, \tag{51}$$

$$v = \Delta r = -pD_m^2/4Es, \tag{52}$$

deci $\varepsilon_t/\varepsilon_m = -\mu^{-1}$.

3.2.3. Teoria cu moment. Din expresiile generale (6) și (7) se obține:

$$M_m = -\frac{\mu}{1-\mu^2}\frac{ps^2}{12}, \tag{53}$$

$$M_t = -\frac{1}{1-\mu^2}\frac{ps^2}{12} = \frac{M_m}{\mu}, \tag{54}$$

ceea ce înseamnă iarăși că $M_m = \mu M_t$, rezultînd:

$$\sigma_m'' = \pm 6M_m/s^2 = \mp p\mu/2(1-\mu^2), \tag{55}$$

$$\sigma_t'' = \pm 6M_t/s^2 = \mp p/2(1-\mu^2) = \sigma_m''/\mu, \tag{56}$$

astfel că:

$$\sigma_t = \sigma_t' + \sigma_t'' = -p[D_m/2s \pm 1/2(1-\mu^2)], \tag{57}$$

$$\sigma_m = \sigma_m' + \sigma_m'' = \mp p\mu/2(1-\mu^2). \tag{58}$$

Așadar, pentru oricare mărimi dimensionale (s, D_m, L_t etc.) efortul unitar maxim $\sigma_t'' \gg \sigma_m''$ ($\rightarrow \sigma_t''/\sigma_m'' = \mu^{-1}$) are (pentru $\mu = 0{,}3$) ordinul de mărime al lui cel mult $0{,}55p$, și de această dată fiind *neglijabil* de mic față de $\sigma_t' = pD_m/2s$ și de σ_{ac}. În plus, trebuie remarcat că σ_t este considerabil mai mare decît σ_m. Drept consecință, formulele de dimensionare (32)—(36) rămîn valabile și în condițiile teoriei cu moment, corectarea lor impunîndu-se numai în unele cazuri de îndeplinire *la limită* a condiției de rezistență (31).

4. PARTICULARIZAREA TEORIEI GENERALE PENTRU PRESURIZAREA EXTERIOARĂ HIDROSTATICĂ

4.1. Rezemare simplă pe conturul inferior. Sstructura tubulară, avînd grosime de perete constantă (s=const.), se consideră echipată cu un dispozitiv sau sistem de tipul *fundului* la extremitatea inferioară, *deschisă* la extremitatea superioară, rezemată simplu pe conturul inferior (fig. 5) și solicitată *unilateral* la presiune *exterioară* hidrostatică. Acestei din urmă solicitări, corespunzătoare presurizării hidrostatice exercitate de un fluid de lucru exterior avînd greutatea volumică γ_e, pentru care $p = \gamma_e(H_c - x)$, respectiv $p_{max} = \gamma_e H$, îi revin condițiile: $p_x = 0$ și $p_z = p = \gamma_e(H - x)$.

4.1.1. Teoria fără moment. Din ecuațiile (12, 13) rezultă direct:

$$N_t = -0{,}5\,\gamma_e D_m(H - x), \tag{59}$$

$$\sigma_t = \sigma_t' = -\gamma_e D_m(H - x)/2s, \tag{60}$$

respectiv :

$$\max. N_t = -0{,}5\,\gamma_e D_m H, \tag{61}$$

$$\max. \sigma_t = \max. \sigma_t' = -\gamma_e D_m H/2s, \tag{62}$$

remarcîndu-se identitatea structurală a expresiilor (27, 28) şi (59)—(62).

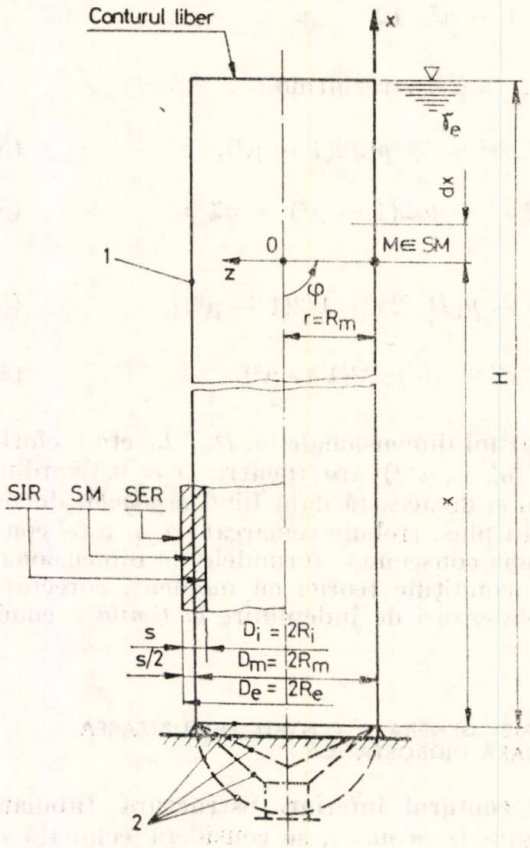


Fig. 5. — Schema de calcul pentru structurile tubulare rezemate simplu pe conturul inferior şi presurizate hidrostatic la exterior : *1* — mantaua cilindrică sau tubulatura propriu-zisă ; *2* — dispozitivele sau sistemele de tipul fundului (plat, conic, tronconic sau bombat → semisferic, torosferic, sferic sau elipsoidal) inferior.

Deoarece conturul inelar superior liber al structurii tubulare, aflat la cota $x = H$, nu este solicitat, corespunde $P_0 = 0$ şi din ecuaţiile (14, 15) rezultă imediat $N_m = 0 \rightarrow \sigma_m = \sigma_m' = 0$.

Reformulînd *condiţia de rezistenţă* (31) pentru situaţia de faţă, şi anume :

$$\sigma_{max} = \max. \sigma_t = \max. \gamma_e D_m (H - x)/2s \leqslant \sigma_{ac}, \tag{63}$$

se obţin (pentru $x = 0$) următoarele *formule de dimensionare* :

$$s \geqslant \frac{\gamma_e D_i H}{2\sigma_{ac} - \gamma_e H} \quad ; \qquad s \geqslant \frac{\gamma_e D_e H}{2\sigma_{ac} + \gamma_e H}, \tag{64, 65}$$

respectiv

$$s_1 = s + s_a \geqslant \frac{\gamma_e D_i H}{2\sigma_{ac} - \gamma_e H} + s_a, \tag{66}$$

$$s_1 = s + s_a \geqslant \frac{\gamma_e D_e H}{2\sigma_{ac} + \gamma_e H} + s_a, \tag{67}$$

în cazurile *particulare* cu $\gamma_e H \ll 2\sigma_{ac}$ (bunăoară, cu $\gamma_e H/2\sigma_{ac} \leqslant 0{,}01 \rightarrow$ max. 1,00 %) putîndu-se utiliza următoarea formulă *aproximativă* de dimensionare:

$$s_1 \geqslant \frac{\gamma_e D_{m,i,e} H}{2\sigma_{ac}} + s_a. \tag{68}$$

De această dată este interesant, din punctul de vedere practic, a se remarca cum, pentru stări și, deci, condiții de solicitare identice, eforturile și eforturile unitare din mantaua cilindrică sau tubulară sînt invariabil aceleași, indiferent de forma constructiv-geometrică și de dimensiunile dispozitivului (sistemului) inferior de tipul fundului (fig. 5).

Presiunea hidrostatică de calcul fiind variabilă cu dimensiunea $(H - x)$ după o *lege liniară*, evident, dimensionarea structurilor tubulare date trebuie să fie *optimizată*, această problemă rezolvîndu-se prin *tronsonarea* după criteriul treptelor de grosime s_1, standardizate, crescătoare către conturul de rezemare.

4.1.2. Deformațiile și deplasările. În conformitate cu expresiile ecuațiilor fizice (20)—(26), după particularizare, se obține:

$$\varepsilon_m = \gamma_e D_m (H - x)\, \mu/2Es, \tag{69}$$

$$\varepsilon_t = -\gamma_e D_m (H - x)/2Es = -\varepsilon_m/\mu, \tag{70}$$

$$u = \Delta = \varepsilon_m x = \gamma_e D_m (H - x) x \mu/2Es, \tag{71}$$

$$v = \Delta r = \gamma_e D_m^2 (H - x)/4Es, \tag{72}$$

$$\vartheta = -\gamma_e D_m^2/4Es, \tag{73}$$

rotirea ϑ a structurii tubulare fiind independentă de poziția punctului $M \in SM$ (fig. 5) și, deci, de cota x. De remarcat, totodată, că pentru $x = 0$ și $x = H$, corespunde $u = \Delta = 0$, ceea ce nu constituie o surpriză, dată fiind schema de calcul (fig. 5).

4.1.3. Teoria cu moment. Pentru cazul de față, din ecuațiile generale (6) și (7) se obțin:

$$M_m = -\gamma_e (H - x)\, s^2 \mu/12(1 - \mu^2), \tag{74}$$

$$M_t = -\gamma_e (H - x)\, s^2/12(1 - \mu^2) = M_m/\mu, \tag{75}$$

rezultînd

$$\sigma_m'' = \mp \gamma_e(H - x)\,\mu/2(1 - \mu^2), \tag{76}$$

$$\sigma_t'' = \mp\gamma_e(H - x)/2(1 - \mu^2), \tag{77}$$

astfel că

$$\sigma_t = \sigma_t' + \sigma_t'' = -\gamma_e(H - x)[D_m/2s \pm 1/2(1 - \mu^2)], \tag{78}$$

$$\sigma_m = \sigma_m' + \sigma_m'' = \mp \gamma_e(H - x)\,\mu/2(1 - \mu^2). \tag{79}$$

4.2. Rezemare simplă pe conturul inelar intermediar cu h ∈ (0, H). De această dată (fig. 6), structura tubulară din alternativa precedentă se

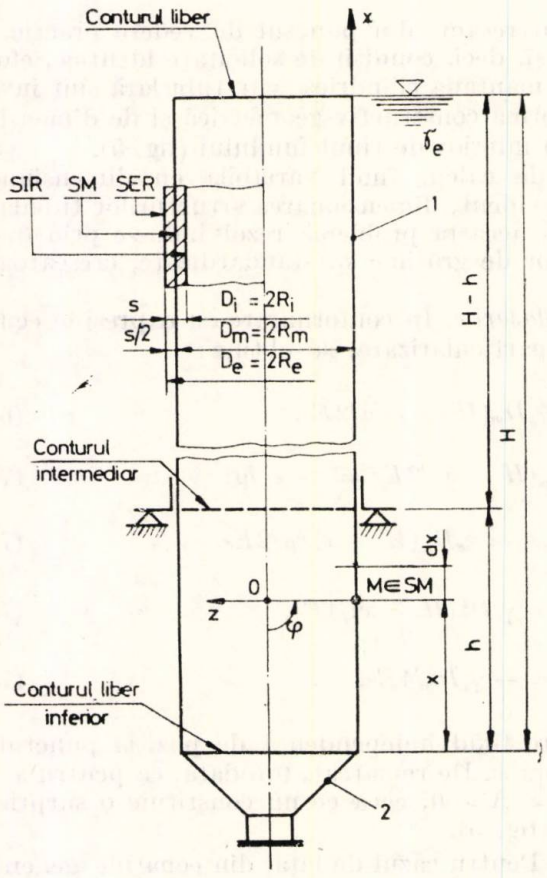


Fig. 6. — Schema de calcul pentru sistemele tubulare rezemate simplu pe conturul intermediar cu $h \in (0, H)$ și presurizate hidrostatic la exterior: *1* — mantaua cilindrică sau tubulatura propriu-zisă; *2* — dispozitivul sau sistemele de tipul fundului (tronconic) inferior.

consideră rezemată simplu pe conturul *intermediar* poziționat prin cota $h \in (0, H)$, toate celelalte condiții păstrîndu-se ca atare.

4.2.1. Teoria fără moment. Admițînd aproximația cunoscută $D_e \to D_m$ și presupunînd că dispozitivul sau sistemul de tipul fundului infe-

rior este închis etanș, rezultanta P_0, egală cu cea a forțelor de presiune preluate de frontalul extremității inferioare a structurii tubulare (fig. 6), are următoarea expresie evidentă:

$$P_0 = -(\pi/4)\gamma_e D_m^2 H, \tag{80}$$

pentru $x \in [0, h]$, în baza ecuațiilor (14, 15), rezultînd:

$$N_m = -\gamma_e D_m H/4, \tag{81}$$

$$\sigma_m = \sigma'_m = -\gamma_e D_m H/4s, \tag{82}$$

fără ca ecuațiile (59)—(62) să-și piardă valabilitatea.

Așadar, pentru oricare $x \leqslant h \leqslant 0{,}5\,H$, îndeplinirea restricției $\sigma'_m \leqslant \sigma'_t$ este asigurată și, deci, $\sigma_{max} = \sigma'_t$, formulele (63)—(68) rămînînd valabile, cu structura dată (se reamintește că semnul algebric nu interesează atunci cînd se formulează condiția de rezistență). Dacă, însă, apar situații cu $x \leqslant h$ pentru care $x > 0{,}5\,H$, cînd $\sigma'_m > \sigma'_t$, condiția de rezistență se reformulează astfel:

$$\sigma_{max} = \sigma_m = \sigma'_m = 0{,}25\,\gamma_e D_m H/4s \leqslant \sigma_{ac}, \tag{83}$$

rezultînd direct următoarele noi *formule de dimensionare*:

$$s_1 = s + s_a \geqslant \frac{\gamma_e D_i H}{4\sigma_{ac} - \gamma_e H} + s_a, \tag{84}$$

$$s_1 = s + s_a \geqslant \frac{\gamma_e D_e H}{4\sigma_{ac} + \gamma_e H} + s_a, \tag{85}$$

respectiv (pentru $\gamma_e H \ll 4\sigma_{ac}$):

$$s_1 = s + s_a \geqslant \frac{\gamma_e D_{m;i;e} H}{4\sigma_{ac}} + s_a. \tag{86}$$

Evident, rezolvarea prezentată, căreia îi corespund expresiile de calcul (80)—(86), este conformă și, deci, valabilă numai în intervalul $x \in [0, h]$.

În afara acestui din urmă interval, adică pentru $x \in [h, H]$, problema enunțată se rezolvă la fel ca la pct. 4.1.

În situațiile practice cînd dispozitivul sau sistemul de tipul fundului inferior este neetanș sau se deschide instantaneu, desigur, $P_0 \to 0$, respectiv $N_m \to 0$, adică $\sigma_m = \sigma'_m \to 0$ și problema teoriei fără moment se rezolvă ca la § 4.1.1, indiferent de valoarea $x \in [0, H]$, ceea ce, de această dată, atestă inutilitatea rezemării simple pe un contur inelar intermediar oarecare.

4.2.2. Deformațiile și deplasările. Conform ecuațiilor fizice (20)—(26), după particularizare, pentru $x \in [0, h]$, se obține:

$$\varepsilon_m = -\gamma_e D_m H[1 - 2\mu(1 - x/H)]/4Es, \tag{87}$$

$$\varepsilon_t = -\gamma_e D_m H[1 - (\mu/2 + x/H)]/2Es, \tag{88}$$

$$\Delta r = v = \gamma_e D_m^2 H[1 - (\mu/2 + x/H)]/4Es, \tag{89}$$

$$\Delta = u = -\gamma_e D_m H x[1 - 2\mu(1 - x/h)]/4Es, \tag{90}$$

iar pentru $x \in [h, H]$ se regăsesc expresiile cunoscute (69)—(73).

4.2.3. Teoria cu moment. Pentru $x \in [0, h]$, după particularizarea ecuațiilor (6) și (7), se obține:

$$M_m = -\gamma_e H s^2 \mu(1 - x/H - \mu/2)/12(1 - \mu^2), \tag{91}$$

$$M_t = -\gamma_e H s^2(1 - x/H - \mu/2)/12(1 - \mu^2), \tag{92}$$

rezultînd:

$$\sigma_m'' = \mp \gamma_e H \mu(1 - x/H - \mu/2)/(1 - \mu^2), \tag{93}$$

$$\sigma_t'' = \mp \gamma_e H(1 - x/H - \mu/2)/2(1 - \mu^2), \tag{94}$$

astfel că

$$\sigma_t = -\gamma_e H[(D_m/2s)(1 - x/H) \pm (1 - x/H - \mu/2)/2(1 - \mu^2)], \tag{95}$$

$$\sigma_m = -\gamma_e H[D_m/s \pm \mu(1 - x/H - \mu/2)/2(1 - \mu^2)]. \tag{96}$$

Evident, în intervalul $x \in [h, H]$, problemele teoriei cu moment se vor rezolva ca la § 4.1.3.

Primită la redacție la 11 octombrie 1982

ASUPRA CALCULULUI DEFORMAȚIEI DANTURII LA ANGRENAJELE PARALELE CILINDRICE CU DINȚI DREPȚI ÎN CONDIȚIILE ANGRENĂRII REALE

de GEORGE DOBRE

Institutul politehnic, București

Pornind de la particularizarea unui nou model elastic în cazul angrenării reale în afara segmentului teoretic, se prezintă metodologia de calcul a deformației danturii. Se face o discuție critică a rezultatelor obținute, din care se remarcă variația fără salturi bruște a deformației în lungul liniei de angrenare, neevidențiată teoretic, dar stabilită experimental în literatură.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Problema calculului deformației și al rigidității danturii s-a pus îndeosebi în cazul angrenajelor paralele cilindrice exterioare; explicația o constituie performanțele ridicate sub aspectul puterii și turației ale acestor angrenaje și, ca urmare, larga lor utilizare în tehnică, impunîndu-se în acest caz studiul dinamic, în care este necesară cunoașterea deformației și a rigidității danturii.

Calculul deformației și al rigidității danturii la categoria menționată de angrenaje a fost efectuat în literatura domeniului, de regulă, *pe segmentul teoretic de angrenare*, în care caz variațiile în timp rezultate sînt de formă cvasidreptunghiulară, cu salturi bruște între domeniile de angrenare.

În cazul angrenării reale a fost analizată, practic, numai problema calculului rigidității danturii, fără să se facă analiza formei de variație a deformației (vezi, de exemplu, lucrările [7] și [11] din bibliografie, care nu este exhaustivă; lucrarea [11] se referă la angrenajele cu dinți înclinați).

În contradicție cu rezultatele teoretice privind variația în timp a deformației danturii, măsurătorile deplasării relative a roților (vezi, de exemplu, [2], [9]) au arătat că salturile dintre domeniile de angrenare nu sînt bruște și că ele se desfășoară pe o durată suficient de mare. Acest fapt a sugerat ideea că modelul elastic și matematic al angrenării trebuie să se refere la noțiunea cu sferă mai largă a deplasării relative a roților.

În lucrare, după definirea deplasării relative, se prezintă modelul elastic și matematic pentru calculul acestei mărimi. Se arată că problema poate fi particularizată la angrenarea reală în afara segmentului teoretic a angrenajelor fără erori tehnologice; în această situație, deplasarea relativă coincide cu deformația unipară maximă. Pentru acest caz se prezintă metodologia de calcul în afara segmentului teoretic a deplasării relative (deformației). În final, se face o discuție critică a rezultatelor, care evidențiază justețea folosirii noțiunii de deplasare relativă în cazul ideal al angrenajelor fără erori tehnologice, dar cu erori funcționale posibil de stabilit.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 4, 1983, P. 407–418

2. DEPLASAREA RELATIVĂ A ROȚILOR

Pentru o mai bună înțelegere a utilizării acestei mărimi la rezolvarea problematicii lucrării, sînt prezentate sintetic considerațiile expuse în [6] asupra noțiunii și modelului elastic și matematic de stabilire a deplasării relative.

A. Cîteva elemente definitorii ale deplasării relative liniare (în lungul liniei de angrenare) în sarcină rezultă din analiza figurii 1.

Se consideră un angrenaj în evolventă, neîncărcat, cu roțile în mișcare uniformă (cu viteze unghiulare dependente prin raportul de angrenare). Se presupune că, datorită poziției inițiale a mișcării roților și mărimii abaterilor de pas, într-o poziție curentă de angrenare bipară[1] (fig. 1) apar jocuri între profiluri (trasate cu linie continuă) la ambele perechi de dinți

$$j_j = j_{j,1} + j_{j,2}, \tag{1}$$

unde $j_{j,i}$ reprezintă jocul dintre profilurile (evolventele) roții i cu și fără abateri de pas.

Este evident că jocul unei perechi de dinți j_j trebuie considerat o mărime algebrică, putînd fi negativ, pentru evitarea blocării mersului fiind necesar ca $j_1 + j_2 \geqslant 0$.

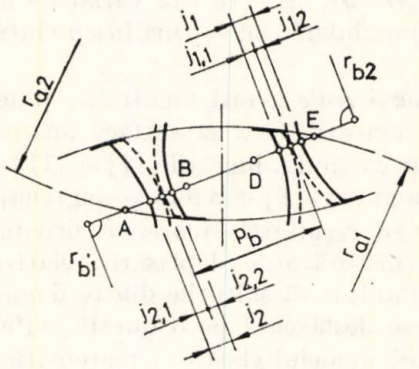


Fig. 1

B. Modelul elastic al angrenării care ține seama de existența jocurilor este reprezentat în figura 2. Sub sarcină apar deformațiile unipare δ_{uj} și deplasarea relativă liniară în sarcină w.

C. Se poate scrie

$$\frac{F_n}{b_w} = \delta_{u1}k_{u1} + \delta_{u2}k_{u2} = (w - j_1)\,k_{u1} + (w - j_2)\,k_{u2} = \sum_j (w - j_j)\,k_{uj}, \tag{2}$$

[1] Se consideră că dantura este definită de conturul generator standardizat, în care caz există numai domenii de angrenare unipară și bipară.

unde F_n este forța normală; b_w — lățimea de lucru a coroanei dințate; k_{uj} — rigiditatea specifică (raportată la unitatea lățimii de lucru) a perechii de dinți j.

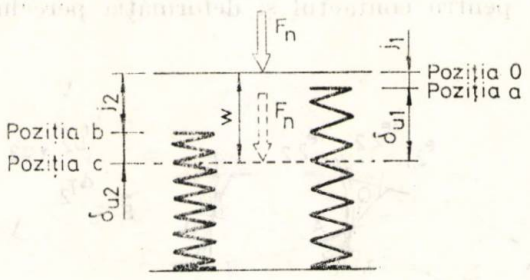


Fig. 2

Din (2) rezultă mărimea deplasării relative

$$w = \frac{\frac{F_n}{b_w} + \sum_j j_j k_{uj}}{\sum_j k_{uj}}. \tag{3}$$

3. ASUPRA PARTICULARIZĂRII MODELULUI ELASTIC; CAZUL ANGRENĂRII PE MUCHIE

A. După cum se constată, este dificilă stabilirea jocurilor în fiecare poziție curentă de angrenare, deoarece aceasta implică cunoașterea abaterilor de pas în funcție de poziția inițială de mișcare a roților.

Problema determinării deplasării relative poate fi, deci, rezolvată dacă se cunoaște o lege pentru mărimea jocului. O astfel de lege se poate stabili dacă există numai erori funcționale, cum sînt cele caracteristice flancării și cele care apar la angrenarea reală (pe muchie) în afara segmentului teoretic; metodologia de stabilire a jocurilor în ultima situație va fi analizată în această lucrare.

B. Modelul elastic al angrenării bipare cu jocuri din figura 2 poate fi particularizat în cazul angrenării reale pe muchie.

Fie *cazul intrării în angrenare*, înaintea punctului teoretic A (fig. 3). Ca urmare a deformației perechii de dinți (cu indicele 1) aflate în angrenare într-un anumit domeniu înaintea punctului D (de ieșire teoretică din angrenarea unipară) se produce angrenarea perechii următoare de dinți (cu indicele 2). Într-adevăr, fie angrenajul neîncărcat și fie U punctul de angrenare al perechii de dinți 1 și P—punctul de contact (aflat la distanța de un pas de bază de punctul U) dintre evolventa $e_{2.1}$ și prelungirea evolventei $e_{2,2}$. Dacă se încarcă angrenajul, perechea de dinți 2 intră în contact în punctul Q dacă deformația unipară δ_{u1} a perechii de dinți 1 este cel puțin egală cu jocul funcțional j_2 al perechii de dinți 2 (jocul j_2 se citește pe linia de angrenare între evolventele paralele $e_{2,2}$ și $e'_{2,2}$); dacă $\delta_{u1} > j_2$, atunci se produce și deformația δ_{u2} a perechii de dinți 2.

Se constată că la intrarea în angrenare a angrenajului fără erori tehnologice $j_1 = 0$.

Se pune problema dacă modelul elastic de arcuri cuplate în paralel poate fi acceptat pentru contactul și deformația perechii de dinți 2 în

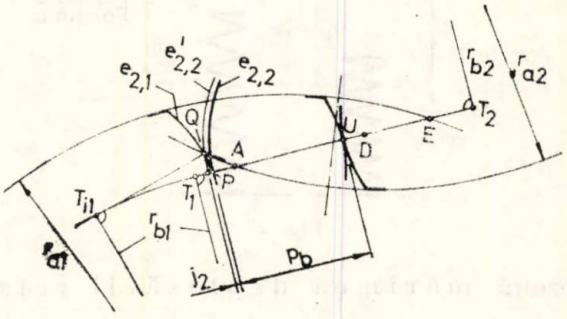


Fig. 3

afara liniei teoretice de angrenare T_1T_2. Admițînd că deformația δ_{u2} apare fizic în lungul liniei $T_{i1}Q$, de acțiune a forței preluate de perechea de dinți 2, și că — referindu-ne la roata 1 — se produce retragerea evolventei $e_{2,1}$ paralel cu ea însăși cu valoarea δ_{u2}, atunci δ_{u2} se reproduce și pe cealaltă normală comună, T_1T_2, în lungul căreia apare deformația unipară δ_{u1}; rezultă că, în cadrul ipotezelor enunțate, poate fi admis montajul în paralel al arcurilor din modelul elastic.

Analiza problemei la *ieșirea din angrenare* nu se mai face, deoarece este similară celei anterioare.

Observația 1. Dacă la intrarea în angrenare există numai jocul funcțional j_2 ($j_1 = 0$), la ieșirea din angrenare apare numai jocul funcțional $j_1(j_2 = 0)$. Ca urmare, așa cum se vede din analiza figurii 2, deplasarea relativă liniară coincide cu deformația unipară maximă, care poate fi considerată deformația totală a danturii

$$w = \max(\delta_{u1}, \delta_{u2}) = \delta. \tag{4}$$

Observația 2. Ținînd seama de faptul că unul din jocurile funcționale este nul și deoarece în continuare intervin numeroase notații cu indicele de roată, pentru claritatea scrierii se va renunța la indicele perechii de dinți, folosindu-se pentru perechea care intră sau iese din angrenare indicele i, respectiv e; pentru cealaltă pereche de dinți, care angrenează pe segmentul teoretic, nu se folosește indice, astfel încît expresia (3) devine

$$w = \delta = \frac{\dfrac{F_n}{b_w} + j_{i(e)}\, k_{ui(e)}}{k_u + k_{ui(e)}}. \tag{3'}$$

4. ELEMENTE DE GEOMETRIE IN CAZUL ANGRENĂRII IN AFARA SEGMENTULUI TEORETIC

În continuare se analizează aspectele privind stabilirea elementelor geometrice care definesc poziția limită a punctelor de contact la intrarea ($Q_{i\,lim}$) și ieșirea ($Q_{e\,lim}$) din angrenare și a jocurilor funcționale în puncte curente de angrenare în afara segmentului teoretic. Discuția se face pe baza reprezentării din figura 4, în care apar elementele geometrice corespunzătoare perechilor de dinți care intră și ies din angrenare (nu sînt figurate perechile anterioară și, respectiv, posterioară, aflate în angrenare pe segmentul teoretic).

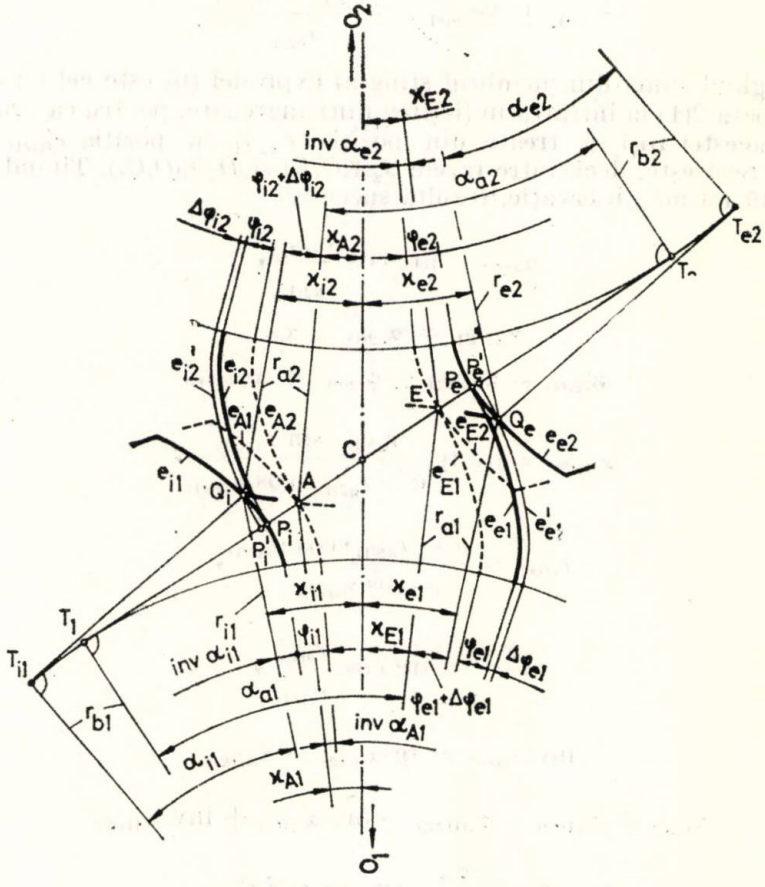


Fig. 4

A. Expresiile elementelor geometrice care se vor deduce mai jos vor fi scrise într-o formă valabilă atît pentru intrarea, cît și pentru ieșirea din angrenare; atunci cînd este necesar, ultimul caz este scris prin scrierea între paranteze a notațiilor sau a indicilor.

Poziţiile punctelor de pe linia de angrenare sînt definite de abscisele λ ale acestora pe axa reală care are direcţia liniei de angrenare, originea în polul C şi sensul spre ieşirea din angrenare[1].

Fie o poziţie de angrenare în afara segmentului teoretic, în care punctul de contact este $Q_{i(e)}$. Se consideră cunoscută abscisa $\lambda_{Pi(e)}$ a punctului $P'_{i(e)}$, care este intersecţia evolventei $e'_{i2(e1)}$ cu linia T_1T_2. Rezultă

$$|\lambda_{A(E)} - \lambda'_{Pi(e)}| = |\lambda_{A(E)} - \lambda_{Pi(e)}| + |\lambda_{Pi(e)} - \lambda'_{Pi(e)}| = \\ = [\varphi_{i2(e1)} + \Delta\varphi_{i2(e1)}] \cdot r_{b2(1)}, \tag{5}$$

de unde

$$\varphi_{i2(e1)} + \Delta\varphi_{i2(e1)} = \frac{|\lambda_{A(E)} - \lambda'_{Pi(e)}|}{r_{b2(1)}}. \tag{6}$$

Unghiul sumă din membrul stîng al expresiei (6) este cel cu care se roteşte roata 2(1) la intrarea în (ieşirea din) angrenare, pentru ca evolventa dintelui acestei roţi să treacă din poziţia $e_{A2(E1)}$ în poziţia $e'_{i2(e1)}$; acest unghi se regăseşte, deci, între razele $O_2A(O_1E)$ şi $O_2Q_i(O_1Q_e)$. Ţinînd seama de această ultimă observaţie, rezultă succesiv :

$$\alpha_{a2(1)} = \arccos \frac{r_{b2(1)}}{r_{a2(1)}}, \tag{7}$$

$$\varkappa_{A2(E1)} = \alpha_{a2(1)} - \alpha_w, \tag{8}$$

$$\varkappa_{i2(e1)} = \varkappa_{A2(E1)} + \varphi_{i2(e1)} + \Delta\varphi_{i2(e1)}, \tag{9}$$

$$\varkappa_{i1(e2)} = \operatorname{arc\,tg} \frac{r_{a2(1)} \cdot \sin \varkappa_{i2(e1)}}{a - r_{a2(1)} \cdot \cos \varkappa_{i2(e1)}}, \tag{10}$$

$$r_{i1(e2)} = \frac{a - r_{a2(1)} \cdot \cos \varkappa_{i2(e1)}}{\cos \varkappa_{i1(e2)}}, \tag{11}$$

$$\alpha_{i1(2)} = \arccos \frac{r_{b1(2)}}{r_{i1(2)}}, \tag{12}$$

$$\operatorname{inv} \alpha_{i1(e2)} = \operatorname{tg} \alpha_{i1(e2)} - \alpha_{i1(e2)}, \tag{13}$$

$$\varphi_{i1(e2)} = \varkappa_{i1(e2)} - \varkappa_{A1(E2)} - \operatorname{inv} \alpha_{i1(e2)} + \operatorname{inv} \alpha_{A1(E2)}, \tag{14}$$

$$\varphi_{i2} = \frac{\varphi_{i1}}{i_{12}} \quad (\varphi_{e1} = \varphi_{e2} i_{12}), \tag{15}$$

$$\Delta\varphi_{i2(e1)} = \varkappa_{i2(e1)} - \varkappa_{A2(E1)} - \varphi_{i2(e1)}. \tag{16}$$

[1] Abscisa λ a unui punct va avea ca indice notaţia punctului scrisă pe un rînd; dacă există, indicele superior „prim" al notaţiei punctului se ataşează, tot ca indice superior, potaţiei λ.

Se poate obține acum jocul funcțional

$$j_{i(e)} = |\lambda_{Pi(e)} - \lambda'_{Pi(e)}| = \Delta\varphi_{i2(e1)} r_{b2(1)}. \tag{17}$$

B. Procedura anterioară se poate aplica în oricare punct de contact, $Q_{i(e)}$, pentru care abscisa punctului asociat $P'_{i(e)}$ satisface condiția

$$\lambda'_{Pi\,lim} \leqslant \lambda'_{Pi} \leqslant \lambda_A \qquad (\lambda_E \leqslant \lambda'_{Pe} \leqslant \lambda'_{Pe\,lim}). \tag{18}$$

Se pune deci problema stabilirii coordonatei $\lambda'_{Pi\,lim}(\lambda'_{Pe\,lim})$.

Coordonata curentă $\lambda'_{Pi}(\lambda'_{Pe})$ coincide cu cea limită, dacă jocul funcțional $j_{i(e)}$ obținut cu această coordonată este egal cu deformația unipară δ_u a perechii de dinți anterioare (următoare)[1].

Pentru obținerea coordonatei limită se poate admite funcția

$$f = j_{i(e)} - \delta_u \tag{19}$$

și se rezolvă ecuația $f = 0$, utilizînd una din metodele iterative de stabilire a rădăcinilor reale ale unei ecuații.

Observație. După stabilirea jocurilor funcționale în punctele curente de contact din afara segmentului teoretic de angrenare, pentru care este îndeplintă condiția (18), în aceste puncte și în punctele de contact de pe segmentul teoretic ale perechii de dinți anterioare (posterioare), aflate la un pas de bază de $Q'_{i(e)}$, se calculează rigiditățile unipare, cu care rezultă, apoi, deformația (deplasarea) danturii în aceste zone de angrenare.

5. COMPONENTELE DEFORMAȚIEI UNEI PERECHI DE DINȚI

Rigiditatea unipară rezultă dacă se cunoaște deformația perechii de dinți la o încărcare oarecare; dacă sarcina specifică este F_n/b_w și deformația obținută este δ_u, rigiditatea specifică unipară este

$$k_u = \frac{F_n/b_w}{\delta_u}. \tag{20}$$

Calculul deformației unipare se face utilizînd expresiile componentelor ei.

În continuare sînt prezentate sintetic expresiile adoptate cu justificările din [5], utilizînd formulările din [12], [1] și [7].

Se consideră dintele încastrat frontal pe coarda $\bar{s}_f$ determinată de punctele de început ale profilurilor de racord pe cercul de picior (fig. 5 *a*).

[1] Notația δ_u s-a scris — așa cum s-a convenit anterior — fără indicele de roată.

Componentele deformației unui dinte în lungul liniei de acțiune a forței [1] sînt :

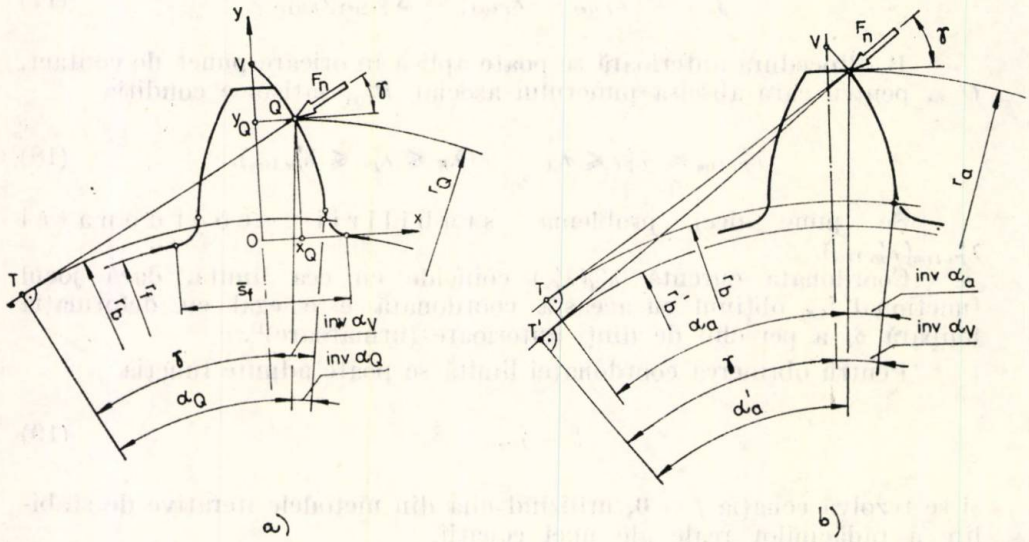


Fig. 5

a) *deplasarea elastică a dintelui* modelat ca grindă încastrată (cauzată de eforturile — moment încovoietor, forță tăietoare și forță axială —, care apar sub acțiunea sarcinii F_n)

$$\delta'_d = \frac{2F_n}{b_w \cdot E}\left[6(1-\mu^2)\int_0^{y_Q}\frac{(y_Q - y - x_Q \cdot \operatorname{tg}\gamma)^2}{(2x)^3}\,dy + \right.$$

$$\left. + 1,2(1+\mu)\left(1+\frac{1-\mu}{2,4}\operatorname{tg}^2\gamma\right)\int_0^{y_Q}\frac{1}{2x}\,dy\right]\cos^2\gamma\,; \qquad (21)$$

b) *deplasarea elastică a încastrării bazei dintelui*, modelată ca un semiplan elastic

$$\delta''_d = \frac{2F_n}{b_w E}\left\{\frac{9(1-\mu^2)}{\pi}\frac{1}{\bar{s}_f^2}(y_Q\cos\gamma - x_Q\sin\gamma)^2 + \right.$$

$$\left. + (1+\mu)(1-2\mu)\frac{1}{\bar{s}_f}(y_Q\cos\gamma - x_Q\sin\gamma)\cos\gamma + \right.$$

[1] Cu notațiile din figura 4, linia de acțiune a forței coincide : a) cu linia de angrenare T_1T_2 — la angrenarea pe segmentul teoretic ; b) cu direcția $T_{i1}\,Q_i(T_{e2}Q_e)$ — la angrenarea în afara segmentului teoretic.

$$+\frac{1-\mu^2}{\pi}\left(\cos^2\gamma+\frac{1-\mu}{2{,}4}\sin^2\gamma\right)\left[\left(\frac{s}{\bar{s}_f}+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{s}{\bar{s}_f}+\frac{1}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{s}{\bar{s}_f}-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{s}{\bar{s}_f}-\frac{1}{2}\right)\right]\Bigg\}, \tag{22}$$

recomandîndu-se

$$s \approx 0{,}73\, r_f. \tag{23}$$

În expresiile de mai sus intervin : E — modulul de elasticitate longitudinal ; μ — coeficientul de contracție transversală ; s — distanța între punctele fixe (simetrice față de axa de simetrie a dintelui) în raport cu care se produce deplasarea elastică a bazei dintelui.

Rezultă *deformația unui dinte*

$$\delta_d = \delta'_d + \delta''_d. \tag{24}$$

Deformația de contact a unei perechi de dinți este

$$\delta_k = 3{,}22\,\frac{F_n}{b_w E}. \tag{25}$$

Ca urmare, *deformația perechii de dinți* este

$$\delta_u = \delta_{d1} + \delta_{d2} + \delta_k. \tag{26}$$

Observația 1. Se constată existența unei dependențe liniare între sarcina specifică și componentele deformației unipare. În această idee se poate accepta în calculul rigidității unipare sarcina specifică egală cu unitatea. Dacă se calculează δ_u folosind $F_n/b_w = 1$, atunci (20) devine

$$k_u = \frac{1}{\delta_u}. \tag{20'}$$

Observația 2. Unghiul γ rezultă în funcție de poziția de angrenare și, eventual, de roată ; astfel :

a) dacă punctul de contact se află pe segmentul teoretic de angrenare (fig. 5 *a*),

$$\gamma = \operatorname{tg}\alpha_Q - \operatorname{inv}\alpha_V ; \tag{27}$$

b) dacă contactul are loc în afara segmentului teoretic, iar calculul se desfășoară la roata care angrenează pe muchia dintelui (fig. 5 *b*)[1],

$$\gamma = \alpha'_a + \operatorname{inv}\alpha_a - \operatorname{inv}\alpha_V ; \tag{28}$$

[1] Indicația din STAS 915/1-81, de a nu fi folosită cu prioritate varianta de referire la elementele de rostogolire cu ajutorul apostrofului, este acceptată în lucrare (vezi notația α'_a din fig. 5 *b*).

cu notațiile din figura 4 și asociind indicele de roată notației α'_a din (28), rezultă

$$\alpha'_{a2(1)} = \alpha_{i1(e2)} + \varkappa_{i1(e2)}. \tag{29}$$

Observația 3. O metodologie pentru calculul integralelor din (21) pe profilul dintelui (de racord și în evolventă) este expusă în [4].

7. APLICAȚIE, DISCUȚIE

A. Pentru *aplicarea metodologiei* prezentate în lucrare, a fost întocmit un program de calcul, scris în limbajul FORTRAN IV, ținînd seama de particularitățile sistemului de calcul FELIX C—256 (C—512).

În figura 6 sînt prezentate variațiile danturii în lungul liniei de angrenare, obținute pentru încărcarea maximă F_n atît prin metodologia prezentată în lucrare — care ține seama de existența angrenării reale —, cît și prin metodologia în care se consideră numai angrenarea teoretică.

Au fost utilizate datele : $a = 125$ mm ; $m = 4$ mm ; $\beta_0 = 0°$; $z_1 = 23$ dinți ; $z_2 = 37$ dinți ; $x_1 = 0{,}69$; $x_2 = 0{,}733$; $b_w = 46$ mm ; $M_{t1} = 78{,}24$ daN m. Angrenajul este încărcat la limita de portanță, după calculul din [8]. Angrenajul are roți etalon.

B. Se constată că *variația în timp a deformației* obținută după metodologia din lucrare prezintă salturi nebruște între domeniile de angrenare—

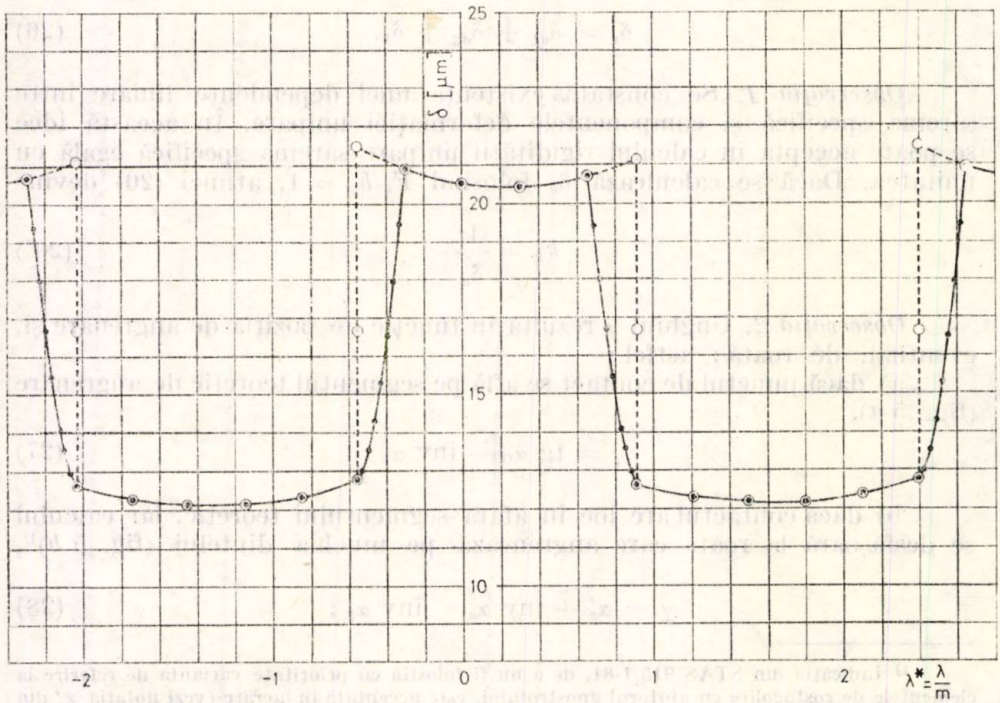


Fig. 6. — ⊙ cu considerarea angrenării reale ; ○ fără considerarea angrenării reale.

aspect care nu a fost stabilit pe cale teoretică în literatura domeniului, dar a fost pus în evidență experimental [2], [9]. Variația măsurată a deplasării din figura 7 [9] (probabil la un angrenaj cu erori tehnologice, nefăcîndu-se observațiil asupra preciziei de execuție) atestă o formă similară a trecerilor dintre domeniile de angrenare.

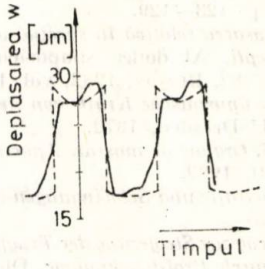


Fig. 7. — (după [9])
—— valori măsurate
---- valori calculate.

Este interesantă discuția cauzelor formulate în [3] pentru trecerile nebruște dintre domeniile de angrenare, constatate experimental, și anume : folosirea în calcule a unei expresii pentru deformația de contact care determină o dependență neliniară între sarcină și această componentă a deformației ; influența lubrifiantului, în sensul modificării în timp a rigidității filmului la intrarea și ieșirea din angrenare. Prima cauză este mai puțin plauzibilă sub aspectul posibilității ca dependență neliniară sarcină-deformația de contact să influențeze variația în timp a deformației danturii ; a doua cauză rămîne discutabilă din punctul de vedere al duratei mari în care s-ar manifesta. Aceste observații sînt întărite de rezultatele teoretice obținute în lucrare — variații în timp ale deformației similare celor experimentale prin forma în zonele de trecere —, pe baza considerării unei alte cauze, și anume a deplasării relative în sarcină a roților.

8. CONCLUZII

Metodologia dezvoltată în lucrare pentru calculul deformației danturii în condițiile angrenării reale, pe muchie, se bazează pe considerarea noțiunii de deplasare relativă în sarcină a roților. Variația teoretică în timp a deformației rezultată pe baza acestei metodologii prezintă — față de literatură — salturi nebruște între domeniile de angrenare, cu o formă asemănătoare celor obținute experimental [9].

Prin faptul că a fost soluționat teoretic un aspect relevat experimental cu mult timp înainte, și anume existența salturilor nebruște în variația deformației danturii, este confirmată valabilitatea metodologiei propuse, de calcul a deformației pe domeniul angrenării reale, pe baza folosirii noțiunii de deplasare relativă în sarcină a roților.

BIBLIOGRAFIE

1. E. L. AIRAPETOV, M. D. GHENKIN, D. I. KOLIN, *Podatlivosti priamozubogo zubcialogo zațepleniia*, Vibroakusticeskaia aktivnosti mehanizmov s zubciatimi peredaciami, Nauka, Moskva, 1971, p. 13...59.
2. J. G. BOLLINGER, *Darstellung des dynamischen Verhaltehs eines nichtlinearen Zahnradgetriebesystems auf Analogrechner*, Industrie-Anzeiger, **87**, 6, p. 147—152, (9163).

3. M. BOSCH, *Über das dynamische Verhalten von Stirnradgetrieben unter besonderer Berücksichtigung der Verzahnungsgenauigkeit*, Diss. TH Aachen, 1965.
4. G. DOBRE, *Metodă de rezolvare a calculului deformațiilor și caractristicii elastice a danturii în evolventă la rotile dințate cilindrice cu dinți drepți*, Simpozionul „Mecanisme și transmisii mecanice", Reșița, 1976, vol. 4, p. 923—932.
5. G. DOBRE, *Elemente de calcul a deformațiilor și rigidității danturii la angrenajele cilindrice cu dinți drepți*, Simpozionul „Proiectarea asistată de calculator", Brașov, 1978, vol. II, p. 123—129.
6. G. DOBRE, *Deplasarea relativă în sarcină a roților angrenajului paralel cilindric exterior cu dinți drepți*, Al doilea simpozion național de mecanisme și organe de mașini PRASIC '82, Brașov, 1982, vol. III, p. 91—98.
7. J. PAGEL, *Innere dynsmische Kräfte von einstufigen Stirnradgetrieben mit Schrägverzahnung*, Diss. TU Dresden, 1972.
8. G. RĂDULESCU, *Organe de mașini. Angrenaje cilindrice*. Vol. II. Institutul politehnic din București, 1982.
9. H. RETTIG, *Zahnkräfte und Schwingungen in Stirnradgetrieben*, Konstruktion, **17**, 2, p. 41—53, (1965).
10. G. SCHLAF, *Beitrag zur Steigerung der Tragfähigkeit und Laufruhe von geradverzahnten Stirnrädern durch Profilrücknahme*, Diss. TU Dresden, 1962.
11. H. ZIEGLER, *Verzahnungssteifigkeit und Lastverteilung schrägverzahnter Stirnräder*, Diss. TH Aachen, 1971.

MECANISM HIDRAULIC DE AVANS FOLOSIT PE INSTALAȚIILE DE PRELUCRAT ELECTROCHIMIC

de MIHAI MINCĂ
Institutul politehnic, București

În articol este prezentat un mecanism hidraulic cu mișcare rectilinie construit dintr-un cilindru în care se poate deplasa un piston, a cărui mișcare poate fi controlată prin debitul de ulei trimis printr-un distribuitor de construcție specială către camera activă a mecanismului. Acest mecanism de construcție specială constituie obiectul unei invenții brevetată cu nr. 82458/1978.
Funcționarea acestui dispozitiv este caracterizată printr-o rapiditate mare a răspunsului, printr-o autoreglare continuă a vitezei de avans în funcție de viteza de dizolvare a materialului care se prelucrează și printr-o mare precizie a mecanismului de acționare datorită absenței jocurilor și a frecărilor uscate.
Pentru studiul dinamic al mecanismului de avans, unde s-au stabilit relațiile între mărimile de intrare și de ieșire ale elementelor lanțului mecanismului de acționare, s-a utilizat calculul operațional, prin liniarizarea diferitelor elemente considerînd variații mici ale mărimilor studiate în jurul punctelor de echilibru.

După cum este cunoscut, prelucrarea electrochimică, pe lîngă faptul că este un procedeu modern cu multiple aplicații în aproape toate ramurile industriale, reprezintă în același timp un fenomen fizico-chimic și o ramură a industriei constructoare de mașini. O serie de piese deseori complexe și costisitoare realizate din oțeluri, aliaje și metale extrem de dure și greu s-au chiar imposibil de a fi prelucrate mecanic ca urmare a unor proprietăți mecanice superioare, au devenit rentabil de realizat prin acest procedeu.

Prelucrarea electrochimică prin insensibilitatea față de proprietățile fizice ale metalelor și posibilitatea de a reproduce cu precizie cele mai complexe forme date electrodului sculă precum și lipsa uzurii acestuia constituie o metodă potrivită pentru prelucrarea pieselor la care se cere, după caz, o rezistență înaltă la uzură, la șocuri, sau la solicitări termice și chimice.

Prelucrarea electrochimică penetrează azi tot mai mult în numeroase sectoare ale industriei cum ar fi industria aerospațială, industria reactorilor nucleari, industria constructoare de mașini, de automobile și altele.

În scopul obținerii unor produse de o calitate din ce în ce mai bună și o productivitate mare, se impune modernizarea și diversificarea dispozitivelor existente cu care sînt echipate mașinile actuale de prelucrat electrochimic. Avînd în vedere că partea cea mai importantă a unei instalații de prelucrat electrochimic o constituie mecanismul de avans în acest articol se va analiza mecanismul ce constituie obiectul invenției nr. 82458.

La prelucrarea electrochimică sistemul de avans trebuie să asigure o mare rapiditate a răspunsului, o deplasare a sculei către piesă proporțională cu viteza de dizolvare a materialului de prelucrat, precum și o mare sensibilitate la micile variații ale spațiului dintre sculă și piesă de la valoarea inițial reglată. Aceasta înseamnă a obține și păstra constant un spațiu mic între sculă și piesă pe tot parcursul prelucrării.

Mecanismul de avans conform schemei de principiu din figura nr. 1 a cărei descriere de funcționare este făcută în dosarul invenției mai sus

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 4, 1983, P. 419–435

menţionată asigură pe lîngă condiţiile arătate şi posibilitatea de autoreglare şi stabilizare a parametrilor optimi de funcţionare în scopul obţinerii unei productivităţi mari, însoţită de o bună precizie dimensională cu o calitate superioară a suprafeţelor.

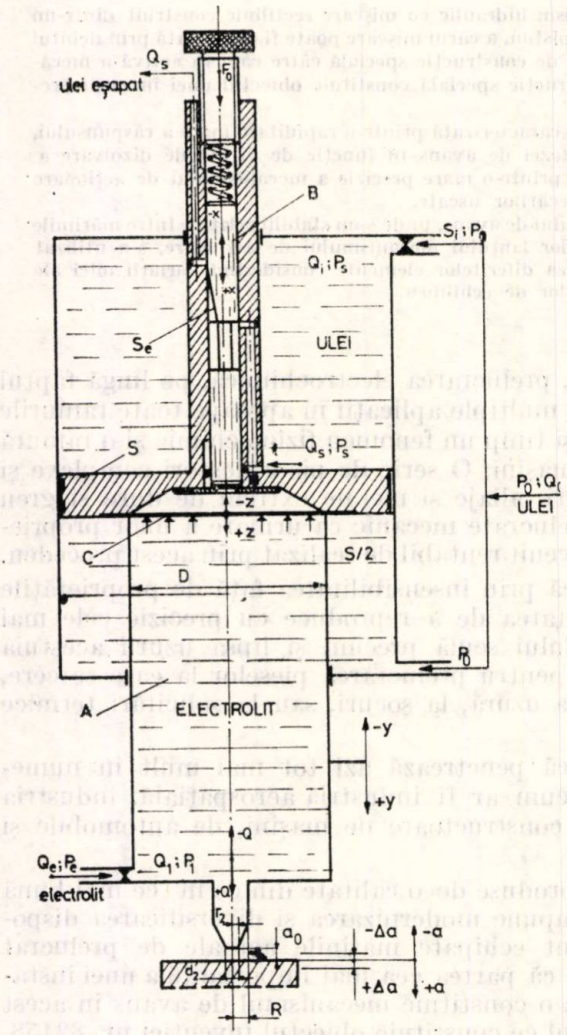


Fig. 1.

Ecuaţia diferenţială a mişcării pistonului B din sertarul distribuitor, ţinînd seama de mişcarea lichidului de comandă (electrolitul) în funcţie de spaţiul dintre sculă şi piesă, a, se determină avînd în vedere forţa necesară suplimentară învingerii energiei masei de lichid aflat în camera amplificatorului cu membrană A; $\left(m \frac{d^2x}{dt^2}\right)$, care trebuie să fie egală cu suma tuturor forţelor suplimentare:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = (F_0 - Cx)\, h \frac{dx}{dt} - p_1 \frac{S_1}{s}, \qquad (1)$$

unde

m — reprezintă masa pistonului distribuitor şi a arcului împreună cu masa raportată a lichidului de lucru;

x — deplasarea pistonului din sertarul distribuitor, citită de la poziţia de mijloc (cm);

p_1 — presiunea electrolitului în camera intermediară a amplificatorului;

F_0 — forţa de întindere iniţială a arcului la distribuitor;

C — forţa de rigiditate a arcului;

h — factorul de frecare vîscoasă al pistonului şi uleiului care se deplasează în cilindrul sertarului.

Pentru calculul presiunii p_1 din camera de amplificare A vom considera situaţia din figura 2 astfel:

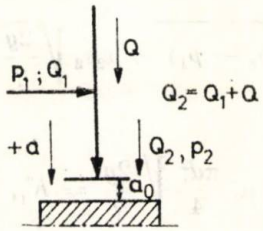


Fig. 2

La variaţia spaţiului dintre sculă şi piesă, a, se modifică debitul lichidului de lucru ce trece prin acest spaţiu şi presiunea p_1 în camera de amplificare variază, iar pistonaşul din sertarul distribuitor se mişcă în sus sau în jos în funcţie de presiunea p_1.

Sistemul hidraulic de comandă din figura 1 are proprietăţi statice şi dinamice caracteristice. Astfel, în regim static fiecărei valori a spaţiului dintre sculă şi piesă îi corespunde o anumită presiune în camera de amplificare A, iar pentru studiul proprietăţilor dinamice se va determina reacţia pistonului distribuitor B la deplasările membranei C.

În regim static, pistonaşul distribuitor fiind nemişcat, deci rămînînd fixă şi membrana C, debitul de lichid electrolit ce trece printr-o rezistenţă hidraulică la intrare este egal cu debitul lichidului ce trece prin spaţiul dintre sculă şi piesă, deoarece $Q = 0$ (debitul din camera intermediară). Deci

$$Q_1 = \mu_1 s_1 \sqrt{\frac{2g}{\gamma}(p_e - p_1)},$$

$$Q_2 = \mu_2 s_2 \sqrt{\frac{2g}{\gamma}(p_1 - p_2)},$$

unde

μ_1 reprezintă coeficientul de debit prin secţiunea constantă la intrare;

μ_2 — coeficientul de debit la ieşire a electrolitului prin spaţiul dintre sculă şi piesă;

$s_1 = \dfrac{\pi d_1^2}{4}$ — suprafaţa secţiunii de trecere prin drosel constant;

$s_2 = \pi \cdot d_s \cdot a$ — suprafaţa secţiunii de trecere în spaţiul dintre sculă şi piesă;

d_s — suma tuturor suprafeţelor de ieşire a electrolitului prin sculă;

g — acceleraţia gravitaţională;

γ — greutatea specifică a lichidului electrolit;

p_e — presiunea la intrare prin drosel în dispozitiv a electrolitului;

p_1 — presiunea în camera de amplificare A;

p_2 — presiunea exercitată în spaţiul dintre sculă şi piesă.

În cazul scurgerii electrolitului în atmosferă, atunci $p_2 = 0$.
În regim static, $Q_1 = Q_2$,

$$\mu_1 s_1 \sqrt{\frac{2g}{\gamma}(p_e - p_1)} = \mu_2 s_2 \sqrt{\frac{2g}{\gamma}(p_1 - p_2)}.$$

Notăm

$$\mu_1 \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{\frac{2g}{\gamma}} = K_1,$$

$$\mu_2 \pi d_s \sqrt{\frac{2g}{\gamma}} = K_2.$$

Rezultă

$$K_1 \sqrt{p_e - p_1} = K_2 a \sqrt{p_1 - p_2},$$

$$K_1^2(p_e - p_1) = K_2^2 a^2 (p_1 - p_2),$$

$$p_1 = \frac{K_1^2 p_e + K_2^2 a^2 p_2}{K_2^2 a^2 + K_1^2}. \tag{2}$$

Egalitatea (2) reprezintă caracteristica statică a mecanismului de avans din figura 1.

În general, la prelucrarea electrochimică presiunea $p_2 \neq 0$ şi ea, conform figurii 1, depinde de suprafaţa de ieşire a electrolitului prin orificiile practicate în sculă şi suprafaţa piesei care se prelucrează la un moment dat. Considerînd a foarte mic, atunci presiunea p_2 variază după o lege liniară de la p_1 la 0, adică

$$p_2 = p_1 \left(1 - \frac{r}{R}\right). \tag{3}$$

unde

r este raza orificiului practicat în tija sculei;

R — raza suprafeţei piesei care se prelucrează.

În regim dinamic de mişcare a pistonaşului distribuitor se vor introduce în calcul şi coeficienţii de amplificare.

Considerînd coeficientul de debit la intrarea electrolitului în spaţiul dintre sculă şi piesă că variază între limite mici, se poate considera că la variaţii foarte mici ale lui a, coeficientul K_1 se poate considera constant. În acest caz, coeficientul de amplificare va fi:

$$K_{ap} = \frac{\partial p_1}{\partial a} = \frac{2aK_1^2K_2^2(p_e - p_2)}{(K_2^2a^2 + K_1^2)^2}. \tag{4}$$

Considerînd a_0 mărimea de ieșire a electrolitului corespunzătoare poziției de zero a sistemului cînd debitul Q este nul, conform figurii 2, atunci

$$(K_{ap})_{a=a_0} = \frac{2a_0K_1^2K_2^2(p_2 - p_e)}{(K_2^2a_0^2 + K_1^2)^2}, \tag{5}$$

iar presiunea în camera A de amplificare va fi:

$$p_{10} = \frac{K_1^2p_e + K_2^2a_0^2p_2}{K_2^2a_0^2 + K_1^2}. \tag{6}$$

Din relația (6) rezultă valoarea spațiului dintre sculă și piese a_0 la echilibru:

$$a_0 = \frac{K_1}{K_2}\sqrt{\frac{p_e - p_{10}}{p_{10} - p_2}}.$$

Notînd

$$\frac{K_1}{K_2} = \lambda,$$

rezultă

$$a_0 = \lambda\sqrt{\frac{p_e - p_{10}}{p_{10} - p_2}}. \tag{7}$$

Sensibilitatea dispozitivului de avans se exprimă prin curba caracteristicii statice. Dispozitivul trebuie să aibă sensibilitatea maximă în punctul corespunzător începutului regimului tranzitoriu, adică

$$(K_{ap})_{a=a_0} = (K_{ap})_{\substack{max \\ a=a_0}} \tag{8}$$

Pentru determinarea relației dintre presiunea p_1 din camera de amplificare A și presiunea de alimentare p_e pentru care este valabilă relația (8), vom lua $p_2 \cong 0$, considerînd că scurgerea din spațiul de lucru se face în atmosferă și în acest caz relația (5) devine:

$$(K_{ap})_{a=a_0} = -\frac{2K_1^2K_2^2p_ea_0}{(K_1^2 + K_2^2a_0^2)^2}. \tag{9}$$

Dar presiunea în camera de amplificare A a mecanismului va fi:

$$p_{10} = \frac{K_1^2p_e}{K_1^2 + K_2^2a_0^2}. \tag{10}$$

Înmulțind numărătorul și numitorul expresiei (9) prin $a_0 p_e$, substituind $K_2^2 a_0^2$ cu valoarea din expresia (10) și ținînd seama de egalitatea (7) și (10), coeficientul de amplificare în presiune va putea fi exprimat astfel:

$$(K_{ap})_{a=a_0} = -\frac{2p_{10}}{\lambda_{p_e}} \sqrt{p_{10}(p_e - p_{10})}. \tag{11}$$

Derivata în presiune p_{10} din expresia (11) se consideră egală cu zero și va fi:

$$\frac{\mathrm{d}(K_{ap})_{a=a_0}}{\mathrm{d}_{p_{10}}} = \frac{2p_{10}(3p_e - 4p_{10})}{\lambda_{p_e} \sqrt{p_{10}(p_e - p_{10})}}. \tag{12}$$

Dar $\frac{2p_{10}}{\lambda_{p_e}} \neq 0$, atunci $3p_e - 4p_{10} = 0$ și deci presiunea în camera A de amplificare este $p_{10} = \frac{3}{4} p_e$. (13)

Din relația (12) între presiuni, ținînd cont de (13), rezultă

$$(K_{ap})_{\substack{\max \\ a=a_0}} = -\frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{p_e}{\lambda}, \tag{14}$$

introducînd (13) în (7) pentru $p_2 = 0$, rezultă

$$a_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{3}}. \tag{15}$$

Variația spațiului dintre sculă și piesă provoacă mișcarea electrolitului în sensul membranei C, deplasînd-o cu o valoare $\pm Z$, la care corespunde deplasarea pistonașului distribuitor cu o valoare $\pm Y$, care se amplifică cu raportul suprafețelor $\frac{S_1}{s}$ din figura 1. Considerînd cazul prezentat în figura 2, în care a_0 își modifică valoarea de echilibru în sensul creșterii lui cu Δa, respectiv $a = a_0 + \Delta a$, iar suprafața s_2 crește proporțional cu Δa, deci în acest caz debitul de electrolit care iese prin spațiul dintre sculă și piesă, Q_2, va crește cu valoarea debitului Q scurs din camera de amplificare A datorită deplasării membranei C cu valoarea $+Z$ conform figurii 1.

În aceste condiții,

$$Q = Q_2 - Q_1. \tag{16}$$

La începutul regimului tranzitoriu, presiunea p_1 în camera A de amplificare este încă egală cu presiunea p_{10} corespunzător spațiului de echilibru a_0. Deci

$$Q = K_2 a \sqrt{p_{10}} - K_1 \sqrt{p_e - p_{10}}. \tag{17}$$

Coeficientul de amplificare în debit care asigură creşterea vitezei de deplasare a pistonaşului distribuitor va fi :

$$(K_Q)_{a=a_0} = \left(\frac{\partial Q}{\partial a}\right)_{a=a_0} = K_2 \sqrt{p_{10}}. \tag{18}$$

Pentru satisfacerea condiţiei, din relaţia (13) se obţine

$$(K_Q)_{a=a_0} = \frac{K_2}{2}\sqrt{3p_e}. \tag{19}$$

Avînd în vedere existenţa celor trei fluxuri, conform figurii 2, şi a presiunii p_1 în camera A de amplificare a mecanismului din figura 1, cînd $p_{10} \neq p_1$ şi $a_0 \neq a$, din (17) rezultă

$$p_1 = \frac{[K_2 aQ + K_1\sqrt{p_e(K_2^2a^2 + K_1^2) - Q^2]^2}}{(K_2^2a^2 + K_1^2)^2}. \tag{20}$$

Descompunînd în serie Taylor expresia (20) şi limitînd seria de termeni de gradul I pentru liniarizare, rezultă

$$p_1 = p_{10} + \left(\frac{\partial p_1}{\partial a}\right)_{Q=0} \Delta a + \left(\frac{\partial p_1}{\partial Q}\right)_{a=a_0} \Delta Q. \tag{21}$$

Dacă $Q = 0$, ecuaţia (21) revine la expresia (10), unde $p_{10} = p_1$.

La începutul regimului tranzitoriu, derivata $\left(\frac{\partial p_1}{\partial a}\right)_{Q=0}$ va corespunde coeficientului $(K_{ap})_{a=a_0}$, iar cînd Q are încă valoarea zero, se obţine

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial Q}\right)_{a=a_0} = \frac{2K_2 a_0 K_1\sqrt{p_e}}{(K_2^2a_0^2 + K_1^2)\sqrt{K_2^2a_0^2 + K_1^2}} \tag{22}$$

sau folosind expresia (10), se obţine

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial Q}\right)_{a=a_0} = \frac{2K_2\, a_0\, p_{10}\sqrt{p_{10}}}{K_1^2\, p_e}. \tag{23}$$

Derivata (23) poate fi reprezentată prin modulul său astfel :

$$\left|\frac{\partial p_1}{\partial Q}\right|_{a=a_0} = \frac{\left|\frac{\partial p_1}{\partial a}\right|_{a=a_0}}{\left|\frac{\partial Q}{\partial a}\right|_{a=a_0}} = \frac{(K_{ap})_{a=a_0}}{(K_Q)_{a=a_0}}. \tag{24}$$

Raportul dintre coeficientul de amplificare în presiune și coeficientul de amplificare în debit va fi:

$$\frac{(K_{ap})_{a=a_0}}{(K_Q)_{a=a_0}} = -\frac{2K_2 a_0 p_{10}\sqrt{p_{10}}}{K_1^2 p_e}. \tag{25}$$

Comparînd expresiile (23) cu (25), se constată că

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial Q}\right)_{a=a_0} = -\frac{(K_{ap})_{a=a_0}}{(K_Q)_{a=a_0}}, \tag{26}$$

iar în final

$$p_1 = p_{10} + (K_{ap})_{a=a_0}\Delta a - \frac{(K_p)_{a=a_0}}{(K_Q)_{a=a_0}}\Delta Q. \tag{27}$$

Expresia (27) corelează mărimile de ieșire p_1 și Q ale mecanismului de avans cu mărimea de intrare a în regim tranzitoriu.

În ecuația (27), distanța între sculă și piesă, a se scade din valoarea sa corespunzătoare poziției zero, a_0, iar debitul Q se calculează de la valoarea sa în regim staționar ($Q = 0$). Debitul din (27) se consideră pozitiv dacă fluxul electrolitului este în sensul scurgerii prin spațiul dintre sculă și piesă și negativ dacă trece spre membrana elastică din camera A.

Eliminînd creșterea Δ, expresia (27) devine:

$$p_1 = p_{10} + (K_{ap})_{a=a_0}\, a - \frac{(K_{ap})_{a=a_0}}{(K_Q)_{a=a_0}} Q, \tag{28}$$

unde

p_{10} este presiunea lichidului în camera de amplificare A a mecanismului de avans, corespunzătoare poziției inițiale a sistemului;

a — spațiul dintre sculă și piesă, reprezentînd coordonata de intrare a sistemului studiat;

$(K_{ap})_{a=a_0}$ — coeficientul de amplificare a presiunii;

$(K_Q)_{a=a_0}$ — coeficientul de amplificare al debitului.

În continuare, pentru a stabili legătura între variația spațiului dintre sculă și piesă, a, cu deplasarea x a pistonașului distribuitor B, vom considera, conform figurii 1 și 2, debitul electrolitului pozitiv dacă acesta trece din camera A în spațiul dintre sculă și piesă, iar valoarea coeficientului de amplificare a presiunii se introduce cu semn negativ. Vom considera că membrana C, care desparte lichidul electrolit de uleiul din camera de amplificare, este perfect elastică și nu opune rezistență la micile deplasări $\pm z$.

La echilibru, cînd membrana C este nemișcată, ecuația statică are expresia:

$$p_{10}\frac{S_1}{s} = F_0. \tag{29}$$

Considerînd că

$$Q = \frac{S_1}{s}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{30}$$

şi înlocuind expresia (28) în (1), ţinînd seama şi de (30), se obţine

$$m\frac{d^2x}{\mathrm{d}t^2} + \left[h - \left(\frac{S_1}{s}\right)^2 \frac{K_{ap}}{K_Q}\right]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + cx = -K_{ap}\frac{S_1}{s}a; \tag{31}$$

înlocuind în relaţia (31) $p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, şi notînd prin

$$C_1^2 = -\frac{m}{K_p\frac{S_1}{s}},$$

$$C_2 = \frac{\frac{S_1}{s}}{K_Q} - \frac{h}{K_{ap}\frac{S_1}{s}}, \tag{32}$$

$$C_3 = -\frac{c}{K_{ap}S},$$

se obţine

$$(C_1^2p^2 + C_2p + C_3)x = a. \tag{33}$$

În baza ecuaţiei (33) vom obţine funcţia de transfer a sistemului

$$\frac{x}{s} = \frac{1}{C_1^2p^2 + C_2p + C_3}. \tag{34}$$

Deoarece în cazul mecanismului de avans factorul h de frecare vîscoasă este foarte mic, se poate neglija, şi atunci ecuaţia (31) devine:

$$m\cdot\frac{d^2x}{\mathrm{d}t^2} - \left(\frac{S_1}{s}\right)^2\frac{K_{ap}}{K_Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + cx = -K_{ap}\frac{S_1}{s}a, \tag{35}$$

iar funcţia de transfer va fi:

$$\frac{x}{a} = \frac{\frac{S_1}{s}}{mp^2 - \left(\frac{S_1}{s}\right)^2\frac{K_{np}}{K_Q}p + c}. \tag{36}$$

Schema bloc a sistemului de reglare a spaţiului dintre sculă şi piesă va fi prezentată în figura 3.

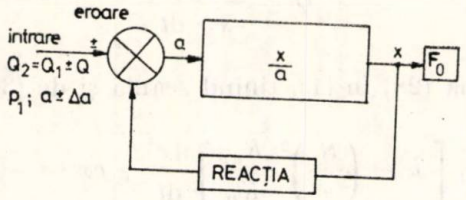


Fig. 3.

Reprezentînd grafic funcţia (28) vom găsi, conform figurii 4, curbele de variaţie a presiunii în camera de amplificare A a mecanismului de avans funcţie de spaţiul dintre sculă şi piesă, a, şi debitul Q.

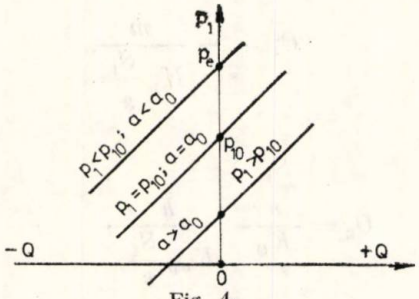


Fig. 4.

Ştiind că $Q_2 = f(p_1)$- pentru diferite spaţii dintre sculă şi piesă, a, se poate determina $Q_1 = f(p_e - p_1)$.

Astfel, conform figurii 5 determinată experimental, se constată că variaţia spaţiului a dintre piesă şi sculă provoacă modificarea presiunii p_1 în camera A şi deci se deplasează pistonaşul distribuitor B cu cantitatea $\pm \Delta x$. În acest caz $Q_1 \neq Q_2$, $Q_2 = Q_1 \mp Q$.

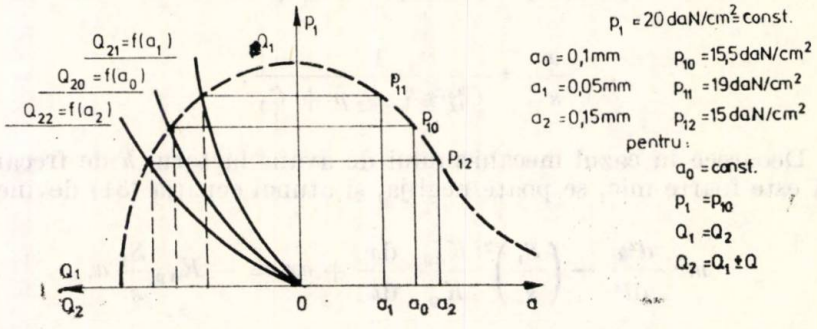


Fig. 5.

Pentru a stabili funcţia de transfer (legătura dintre deplasarea pistonaşului distribuitor $\pm x$ şi deplasarea sculei către piesă $\pm y$), vom considera că mecanismul de avans este alimentat cu ulei cu o presiune P_0 constantă. Uleiul, conform figurii 1, intră în partea superioară a mecanismului printr-o secţiune constantă şi cu debitul Q_r, iar în partea de jos a pistonului uleiul are presiunea egală cu presiunea de alimentare P_0.

Secțiunile de trecere ale orificiilor sertarului se pot considera proporționale cu deplasarea x a pistonașului distribuitor. Pentru liniarizarea anumitor mărimi, care prezintă variații mici, introducem valorile relative de intervale în jurul echilibrului.

Astfel notăm:

p_s — valoarea instantanee a presiunii în camera activă;

$p_{s0} = \frac{p_0}{2}$ — valoarea de echilibru;

$\Delta p_s = \frac{p_s - p_{s0}}{p_{s0}}$ — valoarea relativă de interval;

iar

$$p_s = p_{s0}(1 + \Delta p_s) = \frac{p_0}{2}(1 + \Delta p_s). \tag{37}$$

Debitul de ulei ce intră în camera activă a mecanismului de avans prin diafragmă S_i va fi:

$$Q_i = S_i \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 - p_s)}, \text{ unde } \rho = \frac{\gamma}{g}.$$

iar

$$Q_i = Q_{i0}\sqrt{1 - \Delta p_s}\ ;\ Q_{i0} = S_i \sqrt{\frac{p_0}{\rho}},$$

deci

$$Q_i \cong Q_{i0}\left(1 - \frac{\Delta p_s}{2}\right). \tag{38}$$

Pentru stabilirea funcției de transfer, considerînd mărimea de intrare p_s comandată prin deplasarea x a pistonașului distribuitor, și mărimea de ieșire, poziția pistonului (sculei) y, și mici variații de mărimi în jurul unui echilibru, putem introduce mărimile relative:

$$Q_i \cong Q_{i\,max}\left(1 - \frac{\Delta p_s}{2}\right),$$

unde

$$Q_{i\,max} = S_i \sqrt{\frac{P_0}{\rho}}.$$

În vederea liniarizării debitului pentru stabilirea variației relative a raportului $Q_i/Q_{i\,max}$ printr-un orificiu, vom presupune o variație de presiune sinusoidală de o anumită amplitudine în jurul echilibrului $\Delta P = 0$, înlocuind curba obținută în figura 6 printr-o coardă ce unește punctele extreme, vom obține

$$\frac{Q_i}{Q_{imax}} = K\left(1 - \frac{\Delta p_s}{2}\right), \tag{39}$$

unde

K reprezintă coeficientul care depinde de amplitudinea variației de presiune.

Considerînd v_{max} viteza maximă ce se imprimă sculei către piesă, deci a pistonului cu suprafața S rezultă

$$Q_{i\,max} = v_{max} S$$

deci

$$Q_i = K\, v_{max} S \left(1 - \frac{\Delta p_s}{2} \right). \tag{40}$$

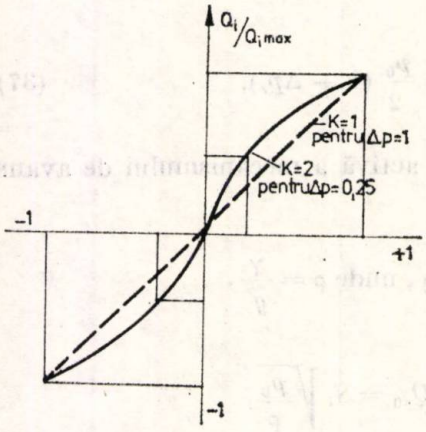


Fig. 6

Introducînd și variația volumului de ulei al camerei active datorită compresiunii uleiului care se exprimă prin relația

$$\frac{V}{B} \frac{\mathrm{d}p_s}{\mathrm{d}t},$$

unde V este volumul camerei active a mecanismului de avans. B — modulul de elasticitate al uleiului precum și variația volumului de ulei din camera activă a mecanismului de avans datorită deplasării sculei către piesă exprimat prin relația

$$S \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

se obține

$$Q_i = S \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{V}{B} \frac{\mathrm{d}p_s}{\mathrm{d}t}.$$

Utilizînd valorile relative ale presiunii conform relației (37) și operatorul complex $p = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, rezultă

$$Q_i = Spy + \frac{V}{B} p \frac{P_0}{2} (1 + \Delta p_s).$$

Ținînd cont de relația (40), rezultă expresia echilibrului debitelor:

$$K v_{max} S \Delta p_s = Spy + \frac{V}{B} p \frac{P_0}{2} 1 + \Delta p_s). \tag{41}$$

Considerînd forța hidraulică

$$F_h = - P_0 \frac{S}{2} + p_s S = - P_0 \frac{S}{2} + S \frac{P_0}{2} \underbrace{(1 + \Delta p_s)}_{p_s} = P_0 \frac{S}{2} \Delta p_s,$$

forţa de frecare

$$F_f = f_b p y,$$

unde

f_b este coeficient de frecare viscos,

şi forţa de inerţie

$$F_M = Mp^2 y,$$

unde M este masa totală a echipajului mobil (piston, electrod, distribuitor, tije, camera intermediară, electrolit),

rezultă echilibrul forţelor:

$$\Delta p_s \frac{P_0 S}{2} = f_b p y + Mp^2 y. \tag{42}$$

Efectuînd calculele în expresia (41), înmulţind şi împărţind membrii 2 şi 3 din partea a doua a expresiei cu S, rezultă

$$K \cdot v_{max} S \Delta p_s = Spy + \frac{V}{S}\frac{S}{B} p \frac{P_0}{2} + \frac{V}{BS} p \frac{P_0 S}{2} \Delta p_s. \tag{43}$$

Înlocuind relaţia (42) în relaţia (43) şi punînd $\frac{V}{S} = y$, rezultă

$$K v_{max} S \Delta p_s = y \left(Sp + p \frac{S}{B}\frac{P_0}{2} + p^2 \frac{V}{BS} f_b + p^3 \frac{V}{BS} M \right),$$

$$\frac{V}{\Delta p_s} = \frac{K v_{max} S}{p\left[S + \frac{P_0 S}{2B} + p \frac{V f_b}{BS} + p^2 \frac{VM}{BS} \right]}. \tag{44}$$

Notînd $\omega_b = \sqrt{\frac{BS}{VM}}$ — pulsaţia proprie a mecanismului de avans descris, se poate constata că pulsaţia depinde între altele de volumul camerei active, iar valoarea sa minimă fiind

$\omega = \sqrt{\frac{B}{J_{max} M}}$, unde y_{max} este cursa maximă a pistonului, cu

$T = \frac{V}{S}\frac{f_b}{B}$ — coeficientul de amortizare determinat prin coeficientul de frecare viscos şi cu $T_1 = S\left(1 + \frac{P_0}{2B}\right)$ — constantă,

rezultă funcţia de transfer a mecanismului studiat:

$$\frac{y}{\Delta p_s} = \frac{K v_{max} S}{p\left[T_1 + \frac{p}{T} + \frac{p^2}{\omega_b^2} \right]}. \tag{45}$$

Pentru a stabili legătura între debitul de ulei Q_i care intră în camera activă a mecanismului de avans și debitul de ulei Q_s care se eșapează din camera activă, deci implicit legătura între Δp_s și variația pistonașului distribuitor Δx, vom considera

$$Q_s = S_e \sqrt{\frac{2}{\rho} p_s} \text{ — debitul de eșapare.}$$

Secțiunea de trecere a uleiului la eșapare este proporțională cu deplasarea x de la poziția de echilibru. Considerînd elementele constructive ale sertarului distribuitor, din figura 7 rezultă secțiunea de pasaj a uleiului din camera activă a mecanismului de avans studiat,

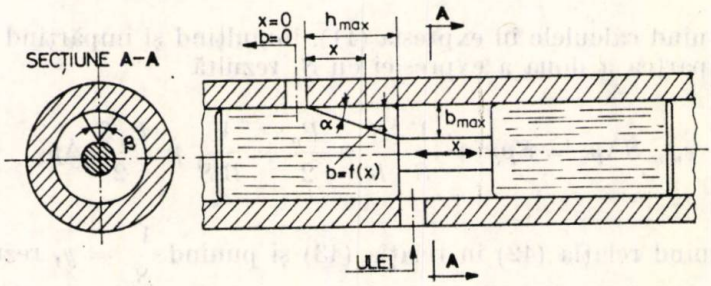


Fig. 7

$$S_e = n \frac{\beta^\circ}{360^\circ} \pi b^2 x,$$

unde

n este numărul de ferestre practicate pe pistonaș;

b — adîncimea crestăturii corespunzătoare poziției x;

β — unghiul sectorului de cerc,

$$S_e = \frac{1}{4} n \pi b^2 x \text{ pentru } \beta = 90^\circ.$$

Dar la variații foarte mici în jurul presiunii de echilibru $\Delta P = 0$, rezultă

$$S_e = S_{e_0} (1 + \Delta x), \tag{47}$$

$$\text{cum } x = x_0 (1 + \Delta x) \text{ și } S_{e_0} = \frac{1}{4} n \pi b^2 x_0.$$

Ținînd cont de relațiile (37) și (47), rezultă

$$Q_s = S_{e_0} (1 + \Delta_x) \sqrt{\frac{p_0}{\rho} (1 + \Delta p_s)},$$

unde

$$Q_s \cong Q_{s_0}(1 + \Delta x)\left(1 + \frac{\Delta p_s}{2}\right),$$

cu

$$Q_{s_0} = S_{e_0}\sqrt{\frac{p_0}{\rho}}.$$

Deci

$$Q_s \cong Q_{s_0}\left(1 + \Delta x + \frac{\Delta p_s}{2}\right). \tag{48}$$

Expresia de conservare a debitelor de intrare în camera activă Q_i cu cel de eşapare Q_s va da, ţinînd cont şi de relaţia (38), egalitatea

$$Q_{s_0}\left(1 + \Delta x + \frac{\Delta p_s}{2}\right) = Q_{i_0}\left(1 - \frac{\Delta p_s}{2}\right).$$

La echilibru :

$$Q_{s_0} = Q_{i_0}.$$

şi în final

$$\Delta x = -\Delta p_s. \tag{49}$$

Ţinînd cont de relaţia (49), putem considera că la variaţii mici ale lui x corespund variaţii mici ale presiunii p_s în camera activă a mecanismului. Pentru a examina comportarea ca frecvenţă a funcţiei de transfer, înlocuim operatorul complex p prin $j\omega$, şi relaţia (45), care stabileşte legătura între deplasarea y a pistonului ce face corp comun cu scula de prelucrat electrochimic şi presiunea p_s din camera activă (deci implicit cu deplasarea x a pistonaşului distribuitor), devine

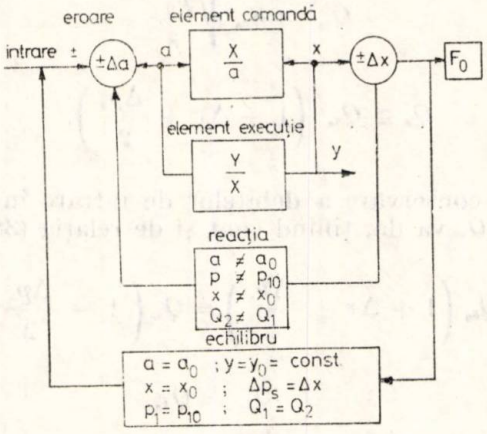
$$\frac{y}{\Delta x} = \frac{K v_{max} S}{j\omega\left[T_1 + \frac{j\omega}{T} + \frac{j\omega^2}{\omega_b^2}\right]}. \tag{50}$$

La prelucrarea electrochimică, pentru a se menţine aproximativ constant spaţiul a_0, iniţial reglat, dintre sculă şi piesă în vederea evitării scurtcircuitelor, este necesar ca atunci cînd dintr-un motiv oarecare se întrerupe procesul de dizolvare scula să rămînă în echilibru (viteza de avans fiind egală cu zero), adică uleiul introdus în camera activă a mecanismului să fie evacuat prin fantele practicate în pistonaşul distribuitor, deci $S_i = S_{e\,max}$.

Schema bloc a sistemului de reglare automată a mecanismului de avans este redată în figura 8.

Orientativ, pentru a vedea performanţele dinamice ale mecanismului de avans studiat, se consideră motorul hidraulic dimensionat pentru a se obţine o frecvenţă proprie de 100 H_z cu un ansamblu piston şi electrod cîntărind 60 kg. În acest caz, timpul de răspuns în viteză este de ordinul 4 μs ceea ce corespunde scopului propus ca, la variaţii mici ale spaţiu-

lui dintre sculă şi piesă, să avem variaţii mari ale deplasării pistonaşului distribuitor în scopul eşapării uleiului din camera activă a mecanismului pentru a se diminua sau stagna viteza de avans pentru înlăturarea totală a scurtcircuitării sculei de piesă.



Fip. 8

CONCLUZII

Considerăm spaţiul dintre sculă şi piesă iniţial reglat $a_0 = 0{,}1$ mm şi presiunea de alimentare cu electrolit, $p_e = 20 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$.

Pentru a vedea performanţele mecanismului de avans, studiat printr-un calcul sumar, se poate constata că la o variaţie a spaţiului dintre sculă şi piesă $\Delta a = \pm 0{,}05$ mm presiunea electrolitului în acelaşi spaţiu, va fi:

pentru $a_0 = 0{,}1$ mm, $p_{10} = 15{,}5$ daN/cm²,

„ $a_0 + \Delta a = 0{,}15$ mm, $p_{12} = 12$ daN/cm²,

„ $a_0 - \Delta a = 0{,}05$ mm, $p_{11} = 19$ daN cm².

Scăderea sau creşterea presiunii în camera intermediară a mecanismului de avans va conduce la deplasarea membranei C cu o valoare $\pm z$. Membrana poate fi dimensionată în aşa fel încît la o deplasare a ei cu 0,01 mm să corespundă o deplasare a pistonaşului distribuitor de 10 mm, ceea ce este suficient pentru deschiderea totală a fantelor triunghiulare practicate pe pistonaş în scopul eşapării volumului total de ulei introdus în camera activă a mecanismului pentru care viteza de avans $\frac{dy}{dt} = 0$ sau închiderii totale a orificiului de eşapare pentru care corespunde o deplasare Y cu o viteză $\frac{dy}{dt} = \text{maxim}$.

Primită la redacţie la 5 ianuarie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. E. LEVIS, *Sisteme automate hidraulice*, Edit. tehnică, 1978.
2. I. PAPADACHE, *Automatica Aplicată*, Edti. tehnică, 1971.
3. V. MORINOIU, *Robinete de reglare*, Edit. tehnică, 1980.
4. VIRGIL MARIN, *Sisteme hidraulice de acționare și reglare automată*, Edit. tehnică, 1981.
5. M. MINCĂ, *Teza de doctorat*, I. P. Timișoara, 1974.
6. M. MINCĂ, *Studiul interstițiului sculă-piesă în funcție de parametrii hidrodinamici ai electroliților sub presiune*, St. cerc. mec. apl., *3*, (1974).
7. M. MINCĂ, *Ein Studium über die Reglung der Schubgeschindogkeit bei der electrodinamishen Verarbeitung der Metale*, St. cerc. mec. appl. *3*, (1978).

SIMULAREA PE MODEL FOTOELASTIC A TENSIUNILOR REMANENTE DE NATURĂ TERMICĂ, DIN DINȚII ROȚILOR DINȚATE

de ELENA MIRIȚĂ, NICOLAE ILIESCU

Institutul politehnic, București

Lucrarea prezintă posibilitatea simulării pe un model fotoelastic a tensiunilor remanente de natură termică care apar în dinții roților dințate. Experimentul s-a efectuat pe un dinte de cremalieră executat din ARALDIT D. Starea de tensiune, indusă și totodată „înghețată" prin răcirea bruscă a modelului încălzit, a fost analizată în polariscop după secționarea modelului într-un mare număr de felii subțiri. Rezultatele obținute, deși calitative, pot contribui la explicarea multor aspecte importante pentru portanța roților dințate.

1. INTRODUCERE

Cunoașterea tipului, a mărimii și a distribuției tensiunilor interne într-o structură prezintă o mare importanță întrucît ele pot influența semnificativ nivelul solicitărilor și deci siguranța în funcționare.

Tensiuni interne, remanente, se induc în timpul prelucrărilor termice, termochimice și mecanice. În construcția roților dințate, un procent mare dintre acestea se durifică prin călire cu flacără, CIF, prin cementare sau nitrurare. În timpul efectuării acestor tratamente, în dinții roților dințate se produc tensiuni interne de natură termică ca urmare a contracției la răcire. Concomitent, transformarea austenitei în martensită, transformare însoțită de o însemnată creștere în volum, produce la rîndul ei tensionarea structurii. Complexitatea acestui proces cît și forma, uneori complicată, a structurii de analizat fac ca tensiunile interne de acest tip să fie studiate aproape exclusiv pe cale experimentală [1].

Pentru dinții roților dințate este frecvent folosită metoda röntgenografică [2, 3]. Această metodă, care a contribuit la elucidarea multor probleme, are totuși limite; poate investiga numai cîteva sutimi de milimetru în adîncime și nu poate pune în evidență decît deformațiile datorate tensiunilor normale.

Lucrarea prezintă posibilitatea studiului tensiunilor interne de natură termică, într-un dinte de cremalieră, prin simularea pe un model fotoelastic spațial.

2. DETERMINĂRILE EXPERIMENTALE

2. 1. MODELUL FOTOELASTIC

Determinările experimentale au fost efectuate pe modelul spațial al unui dinte de cremalieră (STAS 821—75), avînd modulul, $m = 10$ mm. Modelul a fost executat din ARALDIT D(CIBA), prin turnare la rece. Amestecul de turnare a fost alcătuit din rășină epoxidică și întăritor HT-901, combinate în proporție de nouă părți (în greutate) întăritor la o sută părți (în greutate) rășină. După turnare, modelul a fost prelucrat mecanic la cotele finale (fig. 1).

Pentru punerea în evidenţă a tensiunilor remanente de natură termică, modelul fotoelastic al dintelui a fost supus unui ciclu termic de încălzire-răcire. Încălzirea s-a făcut lent, într-o etuvă, pînă la temperatura de 110°C. În vederea eliminării tensiunilor rezultate din turnare şi prelucrarea mecanică, modelul a fost menţinut la această temperatură timp de 1,5 ore. În aceste condiţii, legăturile secundare care fixează lanţul principal în faza amorfă a materialului fotoelastic au fost distruse, realizîndu-se astfel o detensionare totală a materialului.

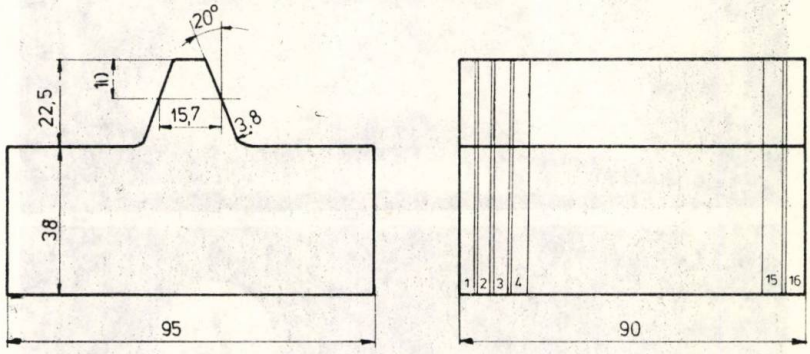


Fig. 1. — Modelul, din ARALDIT D, al dintelui de cremalieră (STAS 821-75), m = 10 mm.

După încălzire, la temperatura de 110°C, timp de 1,5 ore, modelul a fost răcit brusc, în aer, la temperatura de −5°C. Prin răcire, lanţul legăturilor principale suferă o serie de deformaţii care determină în aceste legături o stare de tensiune. Totodată, în urma răcirii, se reface reţeaua legăturilor secundare distruse prin încălzire, fixînd astfel în masa amorfă reţeaua tensionată a legăturilor primare. Prin aceasta, tensiunile produse de variaţia bruscă a temperaturii în timpul răcirii modelului au fost fixate la scara moleculară în întreaga masă a materialului.

După răcire, modelul fotoelastic a fost secţionat transversal (fig. 1) într-un număr de 16 felii cu grosimea medie de 3...3,5 mm. Feliile rezultate prin secţionare au fost examinate într-un polariscop cu lumină monocromatică ($\lambda = 6000$ Å), polarizată circular. Izocromatele observate în polariscop în planul fiecărei felii au fost fotografiate. Ordinul fracţionar de bandă în diferite puncte cercetate a fost determinat prin compensare cu metoda Tardy [4].

Distribuţia tensiunilor în lungul flancului dintelui este simetrică faţă de secţiunea transversală care trece prin mijlocul acestuia. În figura 2 sînt prezentate izocromatele înregistrate pentru feliile 1, 4 şi 8 (felia 1 a fost tăiată din capătul dintelui, felia 8 din mijlocul lungimii flancului, iar felia 4 dintr-o zonă intermediară).

2.2. ANALIZA REZULTATELOR EXPERIMENTALE

Din analiza izocromatelor înregistrate fotografic s-a constatat existenţa unui concentrator de tensiune la baza dintelui, în zona de racordare a piciorului dintelui. În figura 3 se prezintă curba de variaţie a tensiunilor

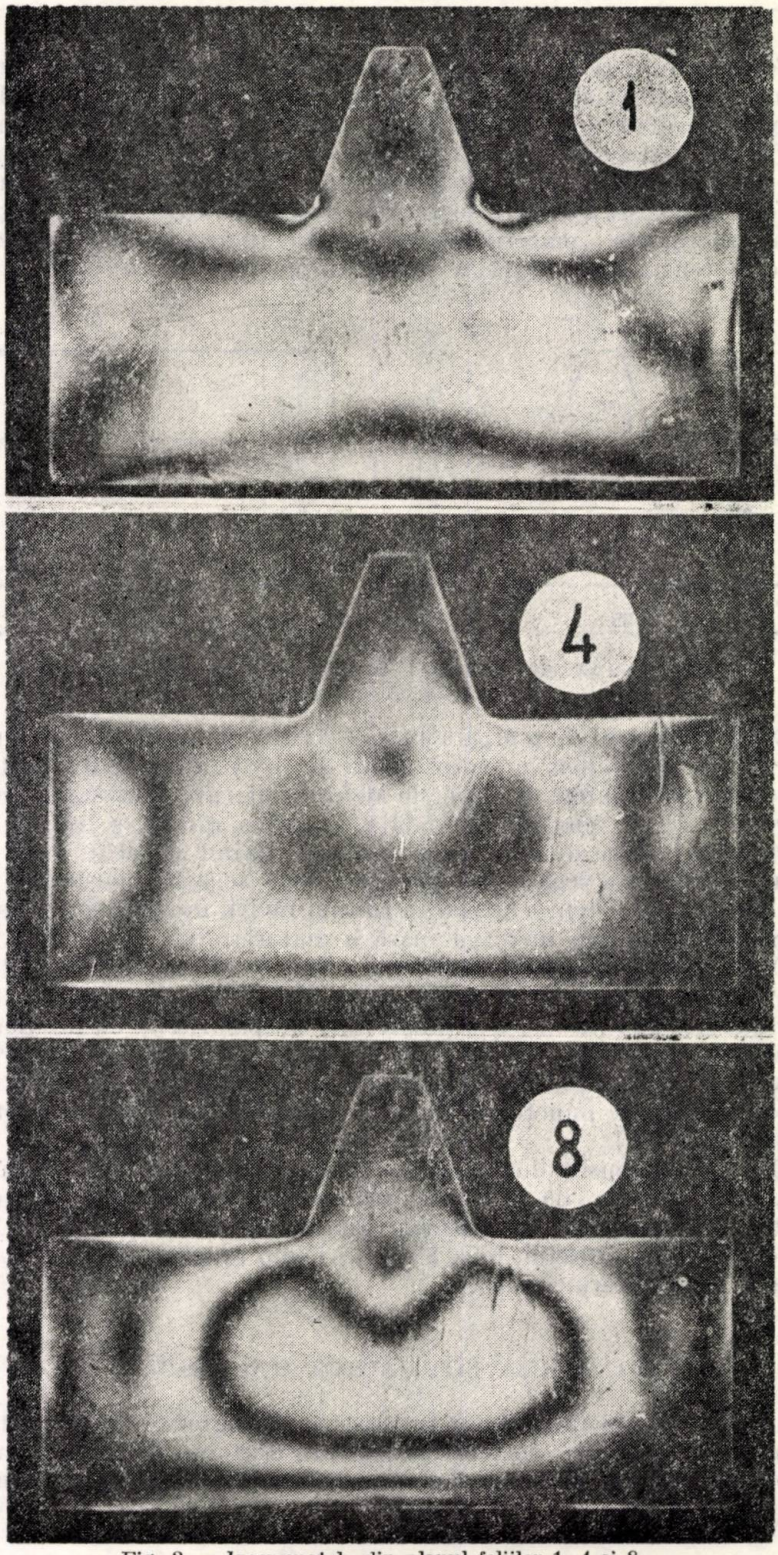


Fig. 2. — Izocromatele din planul feliilor 1, 4 şi 8.

principale exprimate în ordine de bandă ($k\sigma_0$) pe conturul feliei nr. 1. Tensiunile maxime din zona de racordare variază în lungul flancului dintelui (fig. 4). Astfel, la capetele flancului aceste tensiuni sînt maxime ($\sigma_1 \cong 2{,}1\,\sigma_0$), iar în zona centrală ($\sigma_1 \cong 0{,}3\ \sigma_0$), pentru felia 8.

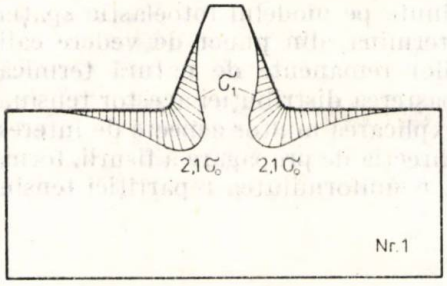


Fig. 3. — Curba de variație pe conturul feliei 1 a tensiunilor principale (exprimate în ordine de bandă).

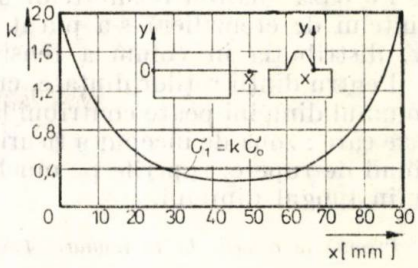


Fig. 4. — Variația în lungul dintelui a tensiunilor maxime din zona de racordare.

Pe porțiunea plană de la baza dintelui s-au determinat tensiuni maxime la captele modelului ($\sigma_1 = 0{,}6\ \sigma_0$, pentru feliile 1 și 16) și ceva mai reduse în zona centrală ($\sigma_1 = 0{,}3\ \sigma_0$, pentru felia 8).

Pentru punctele din planul fiecărei felii, izocromatele înregistrate au permis determinarea diferenței tensiunilor principale $\sigma_1 - \sigma_2$. În figura 5 se prezintă variația diferenței tensiunilor principale $\sigma_1 - \sigma_2$ (exprimată în ordine de bandă) în lungul axei verticale de simetrie corespunzătoare feliei 8. După cum rezultă din figura 5, tensiunile maxime determinate se găsesc pe această axă într-un punct situat sub baza dintelui.

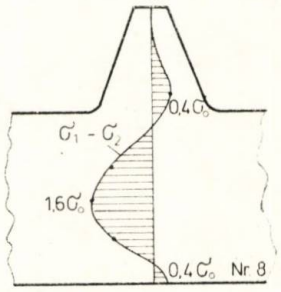


Fig. 5. — Diferența tensiunilor principale $\sigma_1 - \sigma_2$ în lungul axei verticale de simetrie a feliei 8.

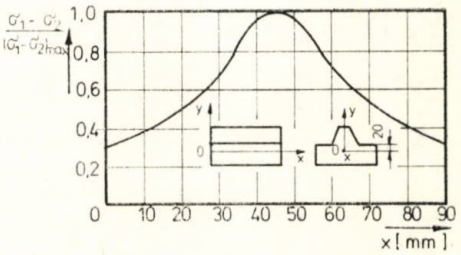


Fig. 6. — Variația diferenței tensiunilor principale în lungul flancului dintelui — pe o direcție situată la 20 mm sub baza dintelui.

Situații asemănătoare au fost obținute și la celelalte felii unde valoarea maximă este mai mică. Din determinările făcute a rezultat că valoarea maximă a diferenței tensiunilor principale $\sigma_1 - \sigma_2$ scade către capetele flancului. În figura 6 se prezintă curba de variație $(\sigma_1 - \sigma_2)/(\sigma_1 - \sigma_2)_{max}$, în lungul flancului dintelui pe o direcție la 20 mm sub baza dintelui.

Datele fotoelastice obținute pentru punctele din planul feliilor dau valoarea diferenței tensiunilor principale $\sigma_1 - \sigma_2$. Deoarece

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\tau_{max},$$

rezultă că pe baza acestor date se pot determina, în aceste puncte, tensiunile tangențiale maxime, care se suprapun peste cele rezultate din încărcare.

3. *Concluzii*

Pe baza analizei rezultatelor obținute pe modelul fotoelastic spațial al dintelui de cremalieră s-a putut determina, din punct de vedere calitativ, distribuția în volum a tensiunilor remanente de natură termică.

Pentru dinții roților dințate, cunoașterea distribuției acestor tensiuni în volumul dintelui poate contribui la explicarea multor aspecte de interes, printre care : zona de început a fisurii, direcția de propagare a fisurii, forma secțiunii de rupere, ruperile pe muchie, neuniformitatea repartiției tensiunilor în lungul dintelui.

Primită la redacție la 12 ianuarie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. D. R. MOCANU și alții, *Analiza experimentală a tensiunilor*, vol. 1, Edit. tehnică, București, 1976.
2. V. HANK, *Grundlagen, Anwendungen und Ergebnisse der röntgenographischen Spanungsmessung*, Z. Metallkunde, **55**, (1964), p. 626—638.
3. W. SCHLOBACH, *Auswirkung unterschiedlicher Wärmebehandlungen auf die Zahnfussfestigkeit von Zahnrädern*, Disertație, T. H. Aachen, 1968.
4. G. S. HOLISTER, *Experimental Stress Anyalysis*, Cambridge University Press, 1967.

RECENZII

K. ROTH, Konstruiren mit Konstruktionskatalogen (Proiectarea cu ajutorul cataloagelor de proiectare).
Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg—New York, 1982, 276 figuri, 38 cataloage de poiectare și 476 definiții a unor noțiuni de specialitate.

Manualul constituie o culegere de cunoștințe privind bazele proiectării, a modului de abordare a problemelor, precum și a diferitelor legături și interdependențe ale unor multitudini de aspecte de care trebuie să țină seama proiectantul în munca sa. Cartea se adresează proiectanților și studenților din domeniul construcției de mașini, de aparate și de instalații, precum și specialiștilor interesați din domeniile electrotehnicii, construcțiilor civile și industriale, fizicii și tehnologiei construcțiilor de mașini.

Autorul a urmărit să pună la dispoziția cititorului un procedeu pentru alegerea soluției optime a problemei care trebuie s-o rezolve pornind de la multitudinea soluțiilor posibile, restrîngîndu-le la cîteva forme inițiale, dezvoltînd totalitatea funcțiunilor necesare din unele elementare și deducînd procedeele de lucru din cîteva regului de bază.

Cunoștințele necesare unui asemenea mod de lucru pot fi expuse în modul cel mai avantajos sub forma unor cataloage constructive.

În capitolul 1 se urmărește inițierea cititorului în desfășurarea metodică a activității de proiectare.

Capitolul 2 se ocupă de modul de desfășurare a activității de proiectare.

În capitolul 3 se arată posibilitățile elaborării de cataloage constructive pe baza asocierii unor caracteristici tehnice.

Ponderea principală o constituie capitolul 4 în care sînt cuprinse diferite cataloage constructive, cu explicitarea principiilor de funcțiune, cu multe detalii și indicații suplimentare.

Aplicarea cataloagelor constructive cu desfășurarea metodică, pas cu pas, a activității de proiectare este descrisă în capitolul 5.

Capitolul 6 se ocupă de structuri funcționale noi ; se indică o metodologie îmbunătățită pentru elaborarea algoritmilor etapelor constructive ; introduce noțiunea de element structural-funcțional — o unitate nouă pentru sinteza organelor de mașini și grupelor funcționale ; dezvoltă o lege legată de teoria „inelelor de tensiune" ca bază pentru înțelegerea constructivă a transmiterii forțelor în cuple și angrenaje și dă un număr sporit de referiri la teoria mecanismelor.

Capitolul 7 împreună cu registrul de noțiuni de specialitate permit o ușoară orientare și utilizare a materialului expus. Întregul mod de abordare a problematicii și de prezentare a materialului informațional constituie o încercare de sistematizare și îmbunătățire a activității de proiectare.

G. Winter

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).
- Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţilor române şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul al maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, 70701, str. Const. Mille nr. 15, sectorul 1.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 42, nr. 5 septembrie — octombrie 1983

SUMAR

STUDII

E. SOÓS, Termoelastoviscoplasticitatea metalelor 445

PAVEL ALEXA, GEORGE BÂRSAN, Teoreme variaţionale în analiza elasto-plastică geometric neliniară a structurilor din bare 464

ADALBERT NAHLIK, Analiza statică şi dinamică a unei palete de ventilator axial cu ajutorul metodei elementului finit 472

VIRGIL GRIGORE, O nouă corelaţie a factorului de frecare la curgerea amestecurilor bifazice în coloana ţevilor de extracţie din sondele eruptive . . . 485

ALECSANDRU PAVEL, Calculul de rezistenţă al structurilor tubulare presurizate la exterior. II 503

D. BRATOSIN, O metodă de evaluare a oboselii rocilor 522

RECENZII 529

TERMOELASTOVÎSCOPLASTICITATEA METALELOR
(Reconstrucție axiomatică)

de E. SOÓS
INCREST — Secția de matematică

În lucrare se prezintă o caracterizare axiomatică a comportării termoelastovîscoplastice a metalelor. Modelul elaborat are la bază utilizarea configurațiilor locale curente, relaxate, izocline și material uniforme. Ecruisarea izotropă a materialului este inclusă în teorie prin folosirea unui parametru intern de stare : densitatea liniilor de dislocație.

1. INTRODUCERE

În lucrare este prezentată o caracterizare axiomatică a comportării termoelastovîscoplastice a metalelor. Axiomatizarea are la bază, pe de o parte unele rezultate de natură mecanică și fizică datorate lui Eckart, Kröner, Eglit, Sedov, Lee, Liu, Germain, Teodosiu, Sidoroff, Mandel, Rice și Halphen (vezi [1]—[29]), pe de altă parte unele rezultate de natură mecanică și matematică datorate lui Noll, Mihăilescu-Suliciu și Suliciu (vezi [30]—[35]).

În lucrările din primul grup, descompunerea deformației totale într-o parte elastică și într-o parte plastică se realizează *înaintea* precizării ecuațiilor constitutive și de evoluție ale materialului. În vederea realizării descompunerii se utilizează configurații locale *relaxate* mobile, a căror semnificație *nu* poate fi însă precizată fără introducerea *simultană* a unor legi de material.

În lucrările elaborate de Kröner, Lee, Liu, Germain, Teodosiu, Sidoroff, Mandel, Halphen (vezi [7]—[27], [29]) descompunerea deformației totale într-o componentă elastică, respectiv plastică este *multiplicativă*, necomutativă.

În lucrările datorate lui Kröner, Teodosiu, Sidoroff, Mandel, Rice, Halphen (vezi [2]—[4], [12]—[29]), pe baza unor rezultate din fizica-solidului și din teoria dislocațiilor, se admite că deformația plastică, permanentă, este produsă de mișcarea, interacțiunea, generarea și anihilarea dislocațiilor în cursul încărcării și/sau descărcării materialului. Pe baza acestui fapt *istoria* deformației este caracterizată prin valorile *actuale* ale unor variabile interne de stare sau de ecruisare care descriu la nivelul unui model continuu trăsăturile esențiale ale configurației dislocațiilor existente în corp. În aceste lucrări (vezi[3]) prin *variabilă* externă sau internă (ascunsă) *de stare* se înțelege o mărime macroscopică a cărei valoare actuală (curentă) poate fi determinată (măsurată) fără a dispune de informații privind istoria fizico-mecanică a corpului. În acest sens deformația elastică, tensiunea

de curgere, temperatura, densitatea liniilor de dislocaţie sînt variabile de stare, deformaţia plastică acumulată de corp nu are această calitate.

În lucrările lui Teodosiu, Kröner, Sidoroff, Mandel (vezi [12]—[15], [20]—[27]), pe baza unor rezultate fundamentale ale teoriei dislocaţiilor şi monocristalelor, se admite că reţeaua cristalină nedeformată, perfectă, reprezintă o configuraţie locală relaxată privilegiată, a cărei utilizare conduce la o formulare raţională, relativ simplă, a legilor de comportare ale metalelor. În acest mod de abordare a problemei se admite că deformaţia elastică (reversibilă) a corpului constă în esenţă în deformarea reţelei sale cristaline, iar deformaţia sa plastică (ireversibilă, permanentă) constă, în esenţă, în lunecarea unei părţi a structurii cristaline în raport cu cealaltă parte, fără modificarea structurii cristaline a materialului policristalin. În cursul deformaţiei elastice materialul trece într-o configuraţie energetic mai puţin favorabilă şi în consecinţă, după îndepărtarea forţelor exterioare, corpul revine în configuraţia sa iniţială. În cursul deformaţiei plastice, prin mişcarea dislocaţiilor corpul trece dintr-o configuraţie energetic favorabilă tot într-o configuraţie de acelaşi tip. În consecinţă, după îndepărtarea forţelor exterioare corpul rămîne în noua sa configraţie.

Sistemul axiomatic elaborat are la bază utilizarea configuraţiilor locale relaxate, privilegiate, mobile, în vederea descompunerii multiplicative a deformaţiei totale într-o componentă elastică şi una plastică şi folosirea variabilelor interne de stare în vederea caracterizării istoriei deformaţiei.

În lucrările din cel de-al doilea grup se accentuează ideea că atît introducerea configuraţiilor locale relaxate, material uniforme, cît şi descompunerea deformaţiei totale într-o componentă elastică, respectiv plastică, este posibilă numai prin precizarea simultană a naturii răspunsului material.

În lucrările lui Noll (vezi [30—[31], [34] secţiunile 27, 34) se are în vedere numai solidul elastic, dar se elaborează aparatul matematic necesar construirii, într-o formă consistentă, a unei teorii a termoelastovîscoplasticităţii a metalelor, pe baza ideilor mai sus precizate.

În lucrarea lui Mihăilescu-Suliciu şi Suliciu (vezi [35]) deformaţia elastică şi deformaţia plastică sînt introduse pe baza legilor de comportare, dar ele sînt definite pe baza unei configuraţii de referinţă fixată, descompunerea deformaţiei totale *pure* într-o componentă corespunzînd deformaţiei elastice pure, respectiv deformaţiei plastice pure, fiind aditivă, comutativă.

Sistemul axiomatic elaborat are la bază modelul matematic al elementului material şi al configuraţiei locale a unei particule împreună cu ideea necesităţii introducerii *simultane* a conceptului de configuraţie locală relaxată şi a legilor de material, modalitate ce permite definirea într-o formă logic consistentă a deformaţiei elastice şi a deformaţiei plastice, componente multiplcative, necomutative, ale deformaţiei totale.

Pe scurt, ideea centrală ce a stat la baza axiomatizării, *împreună*, cu ideile menţionate mai sus, poate fi formulată astfel (vezi [36], Cap. 4, § 4.2):

Deşi deformaţia elastică şi deformaţia plastică sînt deformaţii locale ele *nu* sînt concepte pur geometrice sau pur cinematice. Pentru caracte-

rizarea lor completă este necesară utilizarea configurațiilor locale relaxate iar acestea pot fi corect introduse numai dacă se face apel la ecuațiile constitutive și de evoluție, ceea ce implică luarea în considerație a conceptului *dinamic* al tensiunii și a conceptului *fizic* al variabilelor interne de stare, printre care densitatea liniilor de dislocație este de primă importanță. De exemplu un fluid elastic, eulerian, *în principiu* nu are configurații locale relaxate; este deci clar că admiterea existenței acestora este o *ipoteză constitutivă* care trebuie explicit formulată. În consecință, caracterizarea completă, logic, matematic, termomecanic și fizic consistentă a deformației termoelastice și a deformației vîscoplastice, deci a comportării termoelatovîscoplastice a unui material (metal) necesită referirea *simultană* la concepte geometrice, cinematice, dinamice, termice și fizice *reunite* în ecuațiile constitutive și de evoluție, deci cere precizarea *simultană* a materialelor și a proceselor luate în considerație.

2. ELEMENTE MATERIALE. CONFIGURAȚII LOCALE

În acest paragraf prezint pe scurt rezultatele lui Noll privind elaborarea modelului matematic al elementului material (vezi [30] § § 1—6, [31], [32], §§ 1—7, [33] § § 6—7, [34] Secț. 27, 34). Configurația locală și deformația locală sînt concepte esențiale în formularea clară a naturii răspunsului termoelastovîscoplastic al unui corp.

Fie $\mathcal{E}$ un spațiu euclidian punctual tridimensional și fie $\mathcal{V}$ spațiul vectorial de translație al lui $\mathcal{E}$; elementele $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \ldots$ ale lui $\mathcal{E}$ vor fi numite puncte, iar elementele $\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}, \ldots$ ale lui $\mathcal{V}$ vor fi numite vectori. Mulțimea transformărilor liniare sau a tensorilor $\mathbf{L} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ va fi notată cu $\mathcal{L}$; cu $\mathbf{1}$ va fi desemnat tensorul unitate. Compunerea lui $\mathbf{L}, \mathbf{M} \in \mathcal{L}$ va fi notată cu $\mathbf{ML}$. Transpusa lui $\mathbf{L}$ va fi desemnată cu $\mathbf{L}^T$, iar cu $\mathcal{S}$, respectiv $\mathcal{A}$, va fi desemnată mulțimea tensorilor simetrici, respectiv antisimetrici; cu $\mathcal{S}^+$ va fi notată mulțimea tensorilor simetrici pozitiv definiți. Totalitea tensorilor nesingulari va fi notată cu $\mathcal{L}_{ns}$, iar inversa lui $\mathbf{L} \in \mathcal{L}_{ns}$ va fi desemnată prin $\mathbf{L}^{-1}$. Tensorul $(\mathbf{L}^{-1})^T = (L^T)^{-1} \in \mathcal{L}_{ns}$ va fi notat cu $\mathbf{L}^{-T}$. Totalitatea tensorilor ortogonali va fi desemnată prin $\mathcal{O}$, iar mulțimea tensorilor unimodulari va fi notată cu $\mathcal{U}$.

Un corp $\mathcal{B}$ este o mulțime a cărei elemente $X, \bar{X}, \ldots$ se numesc *particule* și a cărei structură matematică este precizată de o clasă $\mathcal{C}$ de aplicații $\varkappa : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$. Aplicațiile $\varkappa, \bar{\varkappa}, \ldots \in \mathcal{C}$ se numesc *configurațiile globale* ale lui $\mathcal{B}$ în $\mathcal{E}$, iar punctul $\mathbf{x} = \varkappa(X) \in \mathcal{E}$ reprezintă *locul* particulei X în configurația $\varkappa$.

Spunem că $\mathcal{B}$ este un *corp continuu* de clasă C^2 dacă mulțimea $\mathcal{C}$ satisface axiomele (vezi [30] § 3):

(**C1**) Orice $\varkappa \in \mathcal{C}$ este o aplicație injectivă și mulțimea $\varkappa(\mathcal{B})$ a valorilor sale este o submulțime deschisă a lui $\mathcal{E}$; $\varkappa(\mathcal{B})$ este regiunea ocupată de $\mathcal{B}$ în configurația $\varkappa$.

(**C2**) Dacă $\varkappa, \bar{\varkappa} \in \mathcal{C}$, aplicația compusă $\lambda \equiv \bar{\varkappa} \circ \varkappa^{-1} : \varkappa(\mathcal{B}) \to \bar{\varkappa}(\mathcal{B})$ este de clasă C^2 și gradientul său $\nabla\lambda|_{\varkappa(X)} \in \mathcal{L}_{ns}$ pentru orice $X \in \mathcal{B}$; λ se numește *deformația globală* de clasă C^2 de la configurația globală $\varkappa$ la configurația globală $\bar{\varkappa}$.

(C3) Dacă $\varkappa \in \mathcal{C}$ și $\lambda : \varkappa(\mathcal{B}) \to \mathcal{E}$ este o deformație de clasă C^2, atunci $\lambda \circ \varkappa \in \mathcal{C}$; aplicația $\bar{\varkappa} \equiv \lambda \circ \varkappa : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ se numește configurația globală obținută din configurația globală $\varkappa$ prin deformația globală λ.

Spunem că două configurații globale $\varkappa$ și $\bar{\varkappa}$ sînt *echivalente* în X și scriem:

$$\varkappa \sim_X \bar{\varkappa} \text{ dacă } \nabla(\bar{\varkappa} \circ \varkappa^{-1})|_{\varkappa(X)} = \mathbf{1}. \tag{2.1}$$

Rezultă imediat că $\sim_X$ este o *relație de echivalență* pe $\mathcal{C}$. Partiția lui $\mathcal{C}$, indusă de $\sim_X$, va fi desemnată prin $\mathcal{C}_X$, iar elementele sale, deci clasele de echivalență determinate de relația de echivalență (2.1), vor fi notate cu $\mathbf{K}_X$, $\bar{\mathbf{K}}_X$, ... și vor fi numite *configurații locale* în X. În loc de a scrie $\varkappa \in \mathbf{K}_X$ cînd $\varkappa$ este un element al clasei de echivalență $\mathbf{K}_X$ vom scrie:

$$\nabla\varkappa(X) = \mathbf{K}_X \tag{2.2}$$

și vom spune că configurația locală $\mathbf{K}_X$ este *gradientul* configurației globale $\varkappa$ în X.

Fie $\mathbf{K}_X$, $\bar{\mathbf{K}}_X \in \mathcal{C}_X$ și fie $\varkappa \in \mathbf{K}_X$, $\bar{\varkappa} \in \bar{\mathbf{K}}_X$. Tensorul $\nabla(\bar{\varkappa} \circ \varkappa^{-1})|_{\varkappa(X)} \in \mathfrak{L}_{ns}$ depinde *numai* de $\mathbf{K}_X$ și de $\bar{\mathbf{K}}_X$, nu de alegerea particulară a reprezentanților $\varkappa \in \mathbf{K}_X$, $\bar{\varkappa} \in \bar{\mathbf{K}}_X$. Vom nota tensorul nesingular $\nabla(\bar{\varkappa} \circ \varkappa^{-1})|_{\varkappa(X)}$ prin $\bar{\mathbf{K}}_X \mathbf{K}_X^{-1}$ și îl vom numi *deformația locală* de la configurația locală $\mathbf{K}_X$ la configurația locală $\bar{\mathbf{K}}_X$. Cu (2.1) avem:

$$\bar{\mathbf{K}}_X \mathbf{K}_X^{-1} \equiv \nabla(\bar{\varkappa} \circ \varkappa^1)|_{\varkappa(X)} = \nabla\bar{\varkappa}(X)[\nabla\varkappa(X)]^{-1}. \tag{2.3}$$

Rezultă că orice deformație locală este un element din $\mathfrak{L}_{ns}$ și orice element din $\mathfrak{L}_{ns}$ este o deformație locală.

Dacă $\mathbf{K}_X \in \mathcal{C}_X$ este o configurație locală și $\mathbf{F} \in \mathfrak{L}_{ns}$ este o deformație locală, putem defini o nouă configurație locală $\mathbf{F}\mathbf{K}_X \in \mathcal{C}_X$ prin relația

$$\mathbf{F}\mathbf{K}_X = \{\lambda \circ \varkappa \mid \nabla\lambda|_{\varkappa(X)} = \mathbf{F},\ \nabla\varkappa(\mathrm{x}) = \mathbf{K}_X\}; \tag{2.4}$$

$\mathbf{F}\mathbf{K}_X$ se va numi configurația locală obținută din configurația locală $\mathbf{K}_X$ prin deformația locală $\mathbf{F}$.

Se constată imediat că au loc următoarele reguli de calcul

$$(\bar{\mathbf{K}}_X \mathbf{K}_X^{-1})\,\bar{\mathbf{K}}_X = \mathbf{K}_X, \qquad (\mathbf{F}\mathbf{K}_X)\mathbf{K}_X^{-1} = \mathbf{F}. \tag{2.5}$$

Pe baza rezultatelor obținute poate fi introdus conceptul de spațiu tangent (vezi [30], § 4).

Considerăm perechile de forma $(\mathbf{K}_X, \mathbf{u})$, unde $\mathbf{K}_X \in \mathcal{C}_X$, iar $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$. Spunem că două astfel de perechi $(\mathbf{K}_X, \mathbf{u})$ și $(\bar{\mathbf{K}}_X, \bar{\mathbf{u}})$ sînt *echivalente* dacă

$$(\bar{\mathbf{K}}_X \mathbf{K}_X^{-1})\,\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}. \tag{2.6}$$

Din (2.5) rezultă că (2.6) definește într-adevăr o relație de echivalență în mulțimea perechilor de forma $(\mathbf{K}_X, \mathbf{u})$ cu $\mathbf{K}_X \in \mathcal{C}_X$ și $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$. Clasele de echivalență induse de această relație de echivalență vor fi notate cu $\mathbf{u}_X, \bar{\mathbf{u}}_X, \ldots$ ... și vor fi numite *vectori tangenți* la $\mathcal{B}$ în X. Totalitatea vectorilor tangenți la $\mathcal{B}$ în $\mathbf{X}$ va fi notată cu $\mathcal{T}_X$ și va fi numită *spațiul tangent* la $\mathcal{B}$ în X.

Spațiul tangent $\mathcal{T}_X$ este modelul matematic *intrinsec* al vecinătății materiale „infinitezimale" a particulei X, iar vectorul tangent $\mathbf{u}_X$ este modelul matematic *intrinsec* al elementului material „infinitezimal" corespunzător particulei X și a unei alte particule $\bar{X}$ situată într-o vecinătate materială „infinitezimală" a lui X.

Fie date $\mathbf{u}_X \in \mathcal{T}_X$, $\mathbf{K}_X \in \mathcal{C}_X$ și fie $(\bar{\mathbf{K}}_X, \bar{\mathbf{u}})$ o pereche arbitrară din clasa de echivalență $\mathbf{u}_X$. Dacă perechea $(\mathbf{K}_X, \mathbf{u})$ trebuie să aparțină lui $\mathbf{u}_X$, trebuie să aibă loc relația (2.6). În consecință $\mathbf{u}_X \in \mathcal{T}_X$ și $\mathbf{K}_X \in \mathcal{C}_X$ determină un vector *unic* $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ așa încît $(\mathbf{K}_X, \mathbf{u}) \in \mathbf{u}_X$. În consecință putem folosi notațiile

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_X \mathbf{u}_X, \quad \mathbf{u}_X = \mathbf{K}_X^{-1} \mathbf{u} \text{ dacă } (\mathbf{K}_X, \mathbf{u}) \in \mathbf{u}_X \tag{2.7}$$

și putem conchide că o configurație locală $\mathbf{K}_X$ determină o aplicație *inversabilă* a spațiului tangent $\mathcal{T}_X$ în spațiul vectorial de translație $\mathcal{V}$.

Spațiul tangent $\mathcal{T}_X$ are structura *naturală* a unui spațiu vectorial tridimensional adunarea fiind definită prin

$$\mathbf{u}_X + \bar{\mathbf{u}}_X \equiv \mathbf{K}_X(\mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}}) \text{ dacă } \mathbf{u}_X = \mathbf{K}_X^{-1} \mathbf{u}, \ \bar{\mathbf{u}}_X = \mathbf{K}_X^{-1} \bar{\mathbf{u}}, \tag{2.8}$$

iar multiplicarea cu numere reale prin

$$a\mathbf{u}_X \equiv \mathbf{K}_X^{-1}(a\mathbf{u}) \text{ dacă } \mathbf{u}_X = \mathbf{K}_X^{-1}\mathbf{u}, \ a \in \mathcal{R}. \tag{2.9}$$

Se constată imediat că aceste definiții ale lui $\mathbf{u}_X + \bar{\mathbf{u}}_X$ și $a\mathbf{u}_X$ sînt *legitime*, deoarece rezultatele *nu* depind de alegerea configurației locale $\mathbf{K}_X$, folosită pentru a reprezenta vectorii tangenți $\mathbf{u}_X$ și $\bar{\mathbf{u}}_X$ în spațiul vectorial de translație $\mathcal{V}$.

Pe baza rezultatelor precedente putem și vom identifica configurațiile locale $\mathbf{K}_X \in \mathcal{C}_X$ cu *transformările liniare inversabile* ale spațiului *vectorial* $\mathcal{T}_X$ în spațiul vectorial $\mathcal{V}$. Astfel, notînd totalitatea acestor transformări cu $\mathcal{Inv}(\mathcal{T}_X, \mathcal{V})$ și rezumînd cele prezentate putem spune că oricare ar fi $\mathbf{K}_X \in \mathcal{C}_X$ are loc incluziunea $\mathbf{K}_X \in \mathcal{Inv}(\mathcal{T}_X, \mathcal{V})$ și invers, oricare ar fi $\mathbf{K}_X \in \mathcal{Inv}(\mathcal{T}_X, \mathcal{V})$ are loc incluziunea $\mathbf{K}_X \in \mathcal{C}_X$.

3. LEGI DE COMPORTARE TERMOELASTOVÎSCOPLASTICĂ

În cele ce urmează nu se vor formula legile de comportare pentru cutare sau cutare corp termoelastovîscoplastic, ci se va prezenta un cadru general în care pot fi înserate aceste legi, într-un mod coerent din punct de vedere logic, matematic, mecanic, termodinamic și fizic. Pe scurt se

va prezenta și se va cerceta o structură generală, posibilă a legilor de comportare și/sau de material.

Fie $\mathcal{B}$ un corp continuu de clasă C^2. Vom spune că o aplicație $\chi : \mathcal{B} \times \mathcal{R}^+ \to \mathcal{E}$ este o *mișcare* a corpului $\mathcal{B}$, relativă la *reperul* $(\mathbf{x}, t)$ dacă restricția ei $\chi_t : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ la $t \in \mathcal{R}^+ \equiv [0, \infty)$ este o configurație globală de clasă C^2 a lui $\mathcal{B}$ oricare ar fi momentul t, iar χ este de clasă C^2 în raport cu $t \in \mathcal{R}^+$. Aplicația χ_t se numește configurația globală *curentă* a lui $\mathcal{B}$, iar $\nabla\chi_t(X) \in \mathcal{C}_X$ se numește configurație locală *curentă* a particulei X. În cele ce urmează presupunem că o mișcare arbitrară χ a lui $\mathcal{B}$, relativă la un reper arbitrar $(\mathbf{x}, t)$, este dată.

Notații folosite :

$\mathbf{T}_{\nabla\chi_t(X)}$ — tensiunea lui Cauchy în particula X, la momentul t, în configurația locală curentă $\nabla\chi_t(X)$, a paticulei X, în mișcarea χ a lui $\mathcal{B}$, relativă la reperul $(\mathbf{x}, t)$;

θ_{Xt} — temperatura absolută în particula X, la momentul t;

$\rho_{K_{Xt}}$, $\alpha_{K_{Xt}}$ — densitatea de masă, respectiv densitatea liniilor de dislocație în particula X la momentul t, pe unitatea de volum din configurația locală, curentă, relaxată, izoclină $\mathbf{K}_{Xt}$ a particulei X.

*

Vom spune că corpul continuu $\mathcal{B}$ are o *comportare termoelastovîscoplastică* în mișcarea χ, sau pe scurt, este format dintr-un material termoelastovîscoplastic, dacă sînt îndeplinite axiomele (**A.1.1**) — (**A.5.1**) :

(**A.1.1**) Oricare ar fi particula $X \in \mathcal{B}$ și oricare ar fi momentul $t \in \mathcal{R}^+$ există o configurație locală $\mathbf{K}_{Xt} : \mathcal{T}_X \to \mathcal{V}$ a particulei X și o funcție $\mathbf{f}_{K_{Xt}} : \mathcal{L}_{in} \times \mathcal{R}^+_+ \times \mathcal{R}^+ \times \mathcal{B} \to \mathcal{S}$, $\mathcal{R}^+_+ \equiv \mathcal{R}^+ - \{0\}$, așa încît :

(**A.1.2**). Tensiunea lui Cauchy este dată de relația :

$$\mathbf{T}_{\nabla\chi_t(X)} = \mathbf{f}_{K_{Xt}}(\mathbf{F}^e_{K_{Xt}}, \theta_{Xt}, \alpha_{K_{Xt}}, X), \tag{3.1}$$

unde

$$\mathbf{F}^e_{K_{Xt}} \equiv \nabla\chi_t(X)\mathbf{K}^{-1}_{Xt}. \tag{3.2}$$

(**A.1.3**) Configurația $\mathbf{K}_{Xt}$ și funcția $\mathbf{f}_{K_{Xt}}$ satisfac relația (restricția) de *relaxare*

$$\mathbf{f}_{K_{Xt}}(\mathbf{1}, \theta_{X0}, \alpha_{K_{Xt}}, X) = \mathbf{0} \qquad \forall \alpha_{K_{Xt}} \in \mathcal{R}^+. \tag{3.3}$$

(**A.1.4**) Dacă $\mathbf{x}^* - \mathbf{q} = \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{q})$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{q} \in \mathcal{E}$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}$ este o schimbare a reperului $(\mathbf{x}, t)$ cu reperul $(\mathbf{x}^*, t)$, efectuată la momentul t, atunci

$$\overset{*}{\mathbf{T}}_{\nabla\overset{*}{\chi}(X)} = \mathbf{f}_{K_{Xt}}(\overset{*}{\mathbf{F}}{}^e_{K_{Xt}}, \overset{*}{\theta}_{Xt}, \overset{*}{\alpha}_{K_{Xt}}, X) \qquad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{O}, \tag{3.4}$$

unde

$$\overset{*}{\mathbf{T}}_{\nabla\overset{*}{\chi}_t(X)} = \mathbf{Q}\,\mathbf{T}_{\nabla\chi_t(X)}\,\mathbf{Q}^T, \tag{3.5}$$

$$\nabla\overset{*}{\chi}_t(X) = \mathbf{Q}\nabla\chi_t(X), \quad \overset{*}{\mathbf{F}}^e_{\mathbf{K}_{Xt}} \equiv \nabla\overset{*}{\chi}_t(X)\,\mathbf{K}_{Xt}^{-1} = \mathbf{Q}\,\mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{Xt}}, \tag{3.6}$$

$$\overset{*}{\theta}_{Xt} = \theta_{Xt}, \quad \overset{*}{\alpha}_{\mathbf{K}_{Xt}} = \alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}. \tag{3.7}$$

(**A.1.5**) Configurațiile $\mathbf{K}_{Xt}$ și funcțiile $\mathfrak{f}_{\mathbf{K}_{Xt}}$ satisfac la orice moment $t \in \mathcal{R}^+$ proprietatea de *invarianță temporală*:

$$\mathfrak{f}_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{F}, \theta, \alpha, X) = \mathfrak{f}_{\mathbf{K}_{X\bar{t}}}(\mathbf{F}, \theta, \alpha, X) \quad \forall\, t, \bar{t} \in \mathcal{R}^+,\ \mathbf{F} \in \mathcal{L}_{ns},\ \theta \in \mathcal{R}^+_+,\ \alpha \in R^+. \tag{3.8}$$

Def. 1.1. O configurație locală $\mathbf{K}_{Xt}$ care satisface (3.1)—(3.3) se numește o configurație locală curentă *relaxată* a particulei X.

Obs. 1.1. Din (3.3) rezultă că configurația locală curentă relaxată $\mathbf{K}_{Xt}$ în general *depinde* de valoarea curentă $\alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}$ a densității liniilor de dislocație.

Obs. 1.2. Axioma (**A.1.3**) exprimă *principiul obiectivității* și este o consecință a admisei izotropii a spațiului fizic, modelat matematic prin $\mathcal{E}$.

Def. 1.2. Elementele $\mathbf{K}_{Xt}$ ale unui *set* $\mathfrak{I}_{\mathbf{K}_{X0}} \equiv \{\mathbf{K}_{Xt} | t \in \mathcal{R}^+\}$ de configurații locale curente relaxate, care satisfac și restricția *suplimentară* (3.8) vor fi numite configurații locale relaxate *izocline* (între ele), corespunzătoare configurației locale, relaxate *inițiale* $\mathbf{K}_{X0}$.

Def. 1.3. Tensorul nesingular $\mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{Xt}}$, *definit* prin relația (3.3) și caracterizat prin setul *complet* de axiome, se numește deformația locală curentă *termoelastică* a particulei X, corespunzătoare mișcării χ și configurației locale curente relaxate izocline $\mathbf{K}_{Xt} \in \mathfrak{I}_{\mathbf{K}_{X0}}$.

Funcția $\mathfrak{f}_{\mathbf{K}_{Xt}}$ se numește *funcția constitutivă termoelastică* a particulei $X \in \mathcal{B}$, corespunzătoare configurației locale curente relaxate izocline $\mathbf{K}_{Xt} \in \mathfrak{I}_{\mathbf{K}_{X0}}$, iar relația (3.1) se numește *ecuația constitutivă termoelastică* a particulei $X \in \mathcal{B}$, în procesul termoelastovîscoplastic considerat.

Obs. 1.3. O configurație locală curentă relaxată izoclină $\mathbf{K}_{Xt}$ este modelul matematic al *rețelei cristaline perfecte, netensionate* a vecinătății unei particule a unui metal cristalin sau policristalin.

Obs. 1.4. $\mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{Xt}}$, definit cu ajutorul configurației locale, curente relaxate *și* izocline $\mathbf{K}_{Xt}$ din setul $\mathfrak{I}_{\mathbf{K}_{X0}}$ este o măsură a deformării rețelei cristaline perfecte, netensionate, a cărei poziție a fost fixată pentru *toate* momentele $t \in \mathcal{R}$ prin fixarea (în mare măsură arbitrară) a lui $\mathbf{K}_{X0}$.

Obs. 1.5. Din precedentele două observații urmează că $\mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{Xt}}$ caracterizează deformația *reversibilă, recuperabilă* a materialelor cristaline sau policristaline din care sînt formate *metalele*.

Obs. 1.6. $\mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{Xt}}$ de obicei *nu* este gradientul în X al unei deformații globale a corpului $\mathcal{B}$, adică în general nu există o configurație globală curentă relaxată $\varkappa_t \in \mathcal{C}$ a corpului $\mathcal{B}$ așa încît să aibă loc relația $\mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{Xt}} = \nabla\chi_t(X)[\nabla\varkappa_t(X)]^{-1}$ oricare ar fi particula $X \in \mathcal{B}$.

Def. 1.4. Tensorul simetric $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{K}_{Xt}}$, definit prin relația

$$\mathbf{\Pi}_{\mathbf{K}_{Xt}} \equiv (\det \mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{Xt}})\,(\mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{Xt}})^{-1}\,\mathbf{T}_{\nabla\chi_t(X)}\,(\mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{Xt}})^{-T} \tag{3.9}$$

se numește *tensorul Piola-Kirchhoff* de speța a doua, corespunzătoare configurației locale curente relaxate izocline $\mathbf{K}_{Xt} \in \mathcal{I}_{\mathbf{K}_{X0}}$ a particulei X.

Obs. 1.7. Din (**A.1.1**)—(**A.1.5**) *rezultă* că rexistă o funcție $\mathbf{h}_{\mathbf{K}_{Xt}} : \mathcal{S}^+ \times \times \mathcal{R}^+_+ \times \mathcal{R}^+ \times \mathcal{B} \to \mathcal{S}$ avînd următoarele proprietăți :

$$\mathbf{\Pi}_{\mathbf{K}_{Xt}} = \mathbf{h}_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{C}^e_{\mathbf{K}_{Xt}}, \theta_{Xt}, \alpha_{\mathbf{K}Xt}, X), \tag{3.10}$$

$$\mathbf{h}_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{1}, \theta_{X0}, \alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}, X) = \mathbf{0} \qquad \forall\, \alpha_{\mathbf{K}_{Xt}} \in \mathcal{R}^+, \tag{3.11}$$

$$\mathbf{h}_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{C}, \theta, \alpha, X) = \mathbf{h}_{\mathbf{K}_{X\bar{t}}}(\mathbf{C}, \theta, \alpha, X) \;\forall\, t, \bar{t} \in \mathcal{R}^+,\; \mathbf{C} \in \mathcal{S}^+,\; \theta \in \mathcal{R}^+_+, \alpha \in \mathcal{R}^+, \tag{3.12}$$

unde tensorul simetric pozitiv definit $\mathbf{C}^e_{\mathbf{K}_{Xt}}$, *definit* prin relația :

$$\mathbf{C}^e_{\mathbf{K}_{Xt}} \equiv (\mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{Xt}})\;\mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{Xt}} \tag{3.13}$$

este *tensorul Green* corespunzător deformației locale curente termoelastic $\mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{Xt}}$ a particulei X.

Obs. 1.8. Izotropia spațiului fizic *nu* impune restricții suplimentare asupra ecuației constitutive termoelastice (3.10).

Obs. 1.9. Funcțiile $\mathbf{f}_{\mathbf{K}_{Xt}}$ și $\mathbf{h}_{\mathbf{K}_{Xt}}$ sînt caracteristice ale *materialului* din care este formată particula X.

★

(**A.2.1.**) Oricare ar fi particula $X \in \mathcal{B}$ și oricare ar fi momentul $t \in \mathcal{R}^+$ există două funcții $G_{\mathbf{K}_{Xt}} : \mathcal{S} \times \mathcal{R}^+_+ \times \mathcal{R}^+ \times \mathcal{B} \to \mathcal{R}$ și $\mathbf{A}_{\mathbf{K}_{Xt}} : \mathcal{S} \times \mathcal{R}^+_+ \times \mathcal{R}^+ \times \times \mathcal{B} \to \mathcal{L}$, $\mathbf{K}_{Xt} \in \mathcal{I}_{\mathbf{K}_{X0}}$, fiind configurația locală curentă relaxată izoclină a particulei X, așa încît :

(**A.2.2**) Configurația $\mathbf{K}_{Xt}$ și funcția $G_{\mathbf{K}_{Xt}}$ satisfac relația :

$$G_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{0}, \theta_{X0}, \alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}, X) < 0 \quad \forall\, \alpha_{\mathbf{K}_{Xt}} \in \mathcal{R}^+. \tag{3.14}$$

(**A.2.3**) Viteza de deformație curentă $\dot{\mathbf{F}}^p_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{F}^p_{\mathbf{K}_{Xt}})^{-1}$ a configurației curente locale relaxate izocline a particulei X este dată de relația :

$$\dot{\mathbf{F}}^p_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{F}^p_{\mathbf{K}_{Xt}})^{-1} = \mathbf{A}_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{K}_{Xt}}, \theta_{Xt}, \alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}, X)\, H[G_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{K}_{Xt}}, \theta_{Xt}, \alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}, X)], \tag{3.15}$$

unde

$$\mathbf{F}^{p}_{\mathbf{K}_{Xt}} \equiv \mathbf{K}_{Xt}\,\mathbf{K}^{-1}_{X0}, \tag{3.16}$$

iar $H : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ este funcția lui Heaviside ($H(x) = 0$ dacă $x < 0$, $H(x) = 1$ dacă $x \geqslant 0$).

(**A.2.4.**). Configurațiile $\mathbf{K}_{Xt}$ și funcțiile $G_{\mathbf{K}_{Xt}}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{K}_{Xt}}$ la orice moment $t \in \mathcal{R}^+$ satisfac proprietatea de *invarianță temporală*:

$$G_{\mathbf{K}_{Xt}}(\Pi,\ \theta,\ \alpha,\ X) = G_{\mathbf{K}_{X\tilde{t}}}(\Pi,\ \theta,\ \alpha,\ X),\ \mathbf{A}_{\mathbf{K}_{Xt}}(\Pi,\ \theta,\ \alpha,\ X) = \mathbf{A}_{\mathbf{K}_{X\tilde{t}}}(\Pi,\ \theta,\ \alpha,)\ X)$$

$$\forall t, \tilde{t} \in \mathcal{R}^+,\ \Pi \in \mathcal{S},\ \theta \in \mathcal{R}^+_+,\ \alpha \in \mathcal{R}^+. \tag{3.18}$$

Def. 2.1. Mulțimea $\mathcal{E}_{\mathbf{K}_{Xt}}(\alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}) \subset \mathcal{S} \times \mathcal{R}^+_+$, definită prin relația

$$\mathcal{E}_{\mathbf{K}_{Xt}}(\alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}) \equiv \{(\Pi,\ \theta) \in \mathcal{S} \times \mathcal{R}^+_+ \mid G_{\mathbf{K}_{Xt}}(\Pi,\ \theta,\ \alpha_{\mathbf{K}_{Xt}},\ X) < 0\} \tag{3.19}$$

se numește *domeniul curent de deformație termoelastică* a particulei X, corespunzător configurației locale curente relaxate izocline $\mathbf{K}_{Xt}$ *și* densității curente a liniilor de dislocație $\alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}$.

Def. 2.2. Tensorul nesingular $\mathbf{F}^{p}_{\mathbf{K}_{Xt}}$, definit prin relația (3.16) *și* prin sistemul *complet* de axiome se numește deformația locală curentă *termovîscoplastică* a particulei X, *relativă* la configurația locală relaxată *inițială* $\mathbf{K}_{X0} \in \mathcal{I}_{\mathbf{K}_{X0}}$ a lui X.

Funcția $\mathbf{A}_{\mathbf{K}_{Xt}}$ se numește *funcția constitutivă termovîscoplastică* a particulei $X \in \mathcal{B}$, corespunzătoare configurației locale curente relaxate izocline $\mathbf{K}_{Xt} \in \mathcal{I}_{\mathbf{K}X0}$, iar relația (3.15) se numește *ecuația de evoluție termovîscoplasică* a particulei $X \in \mathcal{B}$.

Obs. 2.1. $\mathbf{F}^{p}_{\mathbf{K}_{Xt}}$ este o măsură a deformației *ireversibile*, *irecuperabile*, *permanente* a vecinătății particulei X, produsă de *mișcarea*, interacțiunea, generarea și anihilarea dislocațiilor din corp. Această deformație lasă *nealterată* rețeaua cristalină a metalelor policristaline, iar proprietățile de invarianță temporală stipulate prin axiomele (**A.1.4**), (**A.2.4**) și (**A.3.3**) exprimă tocmai acest fapt.

Obs. 2.2. Funcțiile $G_{\mathbf{K}_{Xt}}$ și $\mathbf{A}_{\mathbf{K}_{Xt}}$ sînt caracteristice ale *materialului* din care este formată particula X.

Obs. 2.3. Ca și $\mathbf{F}^{e}_{\mathbf{K}_{Xt}}$, nici $\mathbf{F}^{p}_{\mathbf{K}_{Xt}}$ *nu* este în general gradientul în X al unei deformații globale a corpului $\mathcal{B}$.

Obs. 2.4. Observațiile 1.6 și 2.3 reflectă faptul că în general corpul, conținînd defecte liniare de tipul dislocațiilor, nu are o configurație globală relaxată, deoarece defectele existente în corp produc autotensiuni ce persistă în material și după ce solicitarea exterioară a fost îndepărtată. În consecință, pentru a determina — în principiu — deformația termoelastică și termovîscoplastică curentă, trebuie „să se extragă" din corp „o mică vecinătate" a unei particule, acesta trebuie lăsată „să se relexeze" și să fie redusă la temperatura sa inițială, păstrînd în cursul acestor ope-

rației *nealterată* configurația geometrică *relativă* a defectelor liniare existente în vecinătatea analizată. Reconstrucția axiomatică exprimă coerent — printre altele — și semnificația exactă a propoziției precedente, prezentînd „traducerea" ei în limbajul matematic al mecanicii teoretice.

Obs. 2.5. Relația (3.15) și prezența tensorului Piola-Kirchhoff de speța a doua printre argumentele funcțiilor constitutive $G_{\mathbf{K}_{Xt}}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{K}_{Xt}}$ reflectă faptul că *mișcarea* dislocațiilor, deci apariția deformațiilor permanente, începe numai după ce *tensiunea tangențială redusă*, relativă la planul și la direcția de lunecare, atinge o anumită valoare *critică* ce depinde de *temperatura* corpului. Acest din urmă fapt explică prezența temperaturii în relația (3.15) printre argumentele funcțiilor constitutive $G_{\mathbf{K}_{Xt}}$ și $\mathbf{A}_{\mathbf{K}_{Xt}}$.

Obs. 2.6. Prezența densității liniilor de dislocație $\alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}$ în relația de definiție (3.18) reflectă faptul că tensiunea și temperatura de curgere *depind* în general de conținutul de dislocații al corpului. Prin această dependență modelul ține seama de *ecruisarea* sau *consolidarea izotropă* a materialului în cursul procesului de încărcare, *istoria* deformației fiind „înmagazinată" în valoarea *curentă* a *variabilei interne de stare* $\alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}$.

Obs. 2.7. Izotropia spațiului fizic *nu* impune restricții suplimentare asupra ecuației de evoluție termovîscoplastică (3.15).

★

(**A.3.1**). Oricare ar fi particula $X \in \mathcal{B}$ și oricare ar fi momentul $t \in \mathcal{R}^+$ există două funcții $k_{\mathbf{K}_{Xt}}, l_{\mathbf{K}_{Xt}} : \mathcal{S} \times \mathcal{R}_+^+ \times \mathcal{R}^+ \times \mathcal{B} \to \mathcal{R}$, $\mathbf{K}_{Xt} \in \mathcal{G}_{\mathbf{K}_{X0}}$ fiind configurația locală curentă relaxată izoclină a particulei X, așa încît :

(**A.3.2**). Viteza de variație $\dot{\alpha}_{\mathbf{K}_{Xt}}$ a densității curente a liniilor de dislocație $\alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}$ este dată de relația :

$$\dot{\alpha}_{\mathbf{K}_{Xt}} = k_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{K}_{Xt}}, \theta_{Xt}, \alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}, X) +$$

$$+ l_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{K}_{Xt}}, \theta_{Xt}, \alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}, X)\, H[G_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{K}_{Xt}}, \theta_{Xt}\, \alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}, X)]. \qquad (3.19)$$

(**A.3.3**) Configurațiile $\mathbf{K}_{Xt}$ și funcțiile $k_{\mathbf{K}_{Xt}}, l_{\mathbf{K}_{Xt}}$ la orice moment $t \in \mathcal{R}^+$ satisfac proprietatea de *invarianță temporală*

$$k_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, X) = k_{\mathbf{K}_{X\tilde{t}}}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, X),\ l_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, X) = l_{\mathbf{K}_{X\tilde{t}}}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, X),$$

$$\forall t, \tilde{t} \in \mathcal{R}^+, \mathbf{\Pi} \in \mathcal{S},\ \theta \in \mathcal{R}_+^+,\ \alpha \in \mathcal{R}^+. \qquad (3.20)$$

Obs. 3.1. Densitatea curentă a liniilor de dislocație $\alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}$ este *unica variabilă internă* sau *ascunsă de stare* inclusă în modul și reprezintă variabila de ecruisare sau de consolidare izotopă a modelului ; $\alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}$ este o mărime ce *nu* depinde *explicit* de deformația termoelastică curentă, fiind în acest sens *analogul* entității tensoriale introdusă de Noll în teoria continuă a dislocațiilor.

Def. 3.1. Funcţiile $k_{\mathbf{K}_{Xt}}$ şi $l_{\mathbf{K}_{Xt}}$ se numesc *funcţiile constitutive* ale particulei $X \in \mathcal{B}$ corespunzătoare variabilei interne de stare $\alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}$ şi configuraţiei locale curente relaxate izocline $\mathbf{K}_{Xt} \in \mathcal{I}_{\mathbf{K}_{X0}}$, iar relaţia (3.19) se numeşte *ecuaţia de evoluţie* a densităţii liniilor de dislocaţie $\alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}$.

Obs. 3.2. Funcţiile $k_{\mathbf{K}_{Xt}}$ şi $l_{\mathbf{K}_{Xt}}$ sînt caracteristice ale *materialului* din care este formulată particula X.

Obs. 3.3. Relaţia (3.19) ţine seama de faptul că densitatea liniilor de dislocaţie *poate* varia în timp şi în cazul în care deformaţia termovîscoplastică, permanentă, rămîne neschimbată. Această proprietate se constată experimental în cazul prelucrării la cald a metalelor.

Obs. 3.4. Izotropia spaţiului fizic *nu* impune restricţii suplimentare asupra ecuaţiei de evoluţie (3.19).

★

Obs. Consideraţiile precedente şi cele ce urmează se referă *aproape exclusiv* la aspectul *mecanic* al răspunsului material; ele trebuie să fie întregite cu cele privind aspectul *termic* şi *energetic* al răspunsului, includzînd în reconstrucţia axiomatică energia internă, entropia, energia liberă, entalpia, gradientul temperaturii, fluxul de căldură şi legea a doua a termodinamicii, împreună cu izpotezele constitutive corespunzătoare. Această extindere nu va fi efectuată, dar absenţa ei nu trebuie să fie uitată, de exemplu cu ocazia introducerii conceptului de grup de simetrie caracteristic răspunsului material al unei particule.

★

(**A.4.1.**) Oricare ar fi deformaţia locală ortogonală $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}$ şi oricare ar fi setul de configuraţii locale curente relaxate izocline $\mathcal{I}_{\mathbf{K}_{X0}} = \{\mathbf{K}_{Xt} | t \in \mathcal{R}^+\}$, mulţimea

$$\mathcal{I}_{\bar{\mathbf{K}}_{X0}} = \{\bar{\mathbf{K}}_{Xt} = \mathbf{Q}\mathbf{K}_{Xt} \,|\, \mathbf{K}_{Xt} \in \mathcal{I}_{\mathbf{K}_{X0}},\ t \in \mathcal{R}^+\} \tag{3.21}$$

este un set de configuraţii locale curente relaxate izocline, corespunzător configuraţiei locale relaxate izocline *iniţiale* $\bar{\mathbf{K}}_{X0} = \mathbf{Q}\mathbf{K}_{X0}$.

(**A.4.2**) Dacă $\mathcal{E}_{\mathbf{K}_{X0}} = \{\mathbf{K}_{Xt} | t \in \mathcal{R}^+\}$ şi $\mathcal{I}_{\bar{\mathbf{K}}_{X0}} = \{\bar{\mathbf{K}}_{Xt} | t \in \mathcal{R}^+\}$

sînt două seturi de configuraţii locale curente relaxate izocline, atunci *există* o deformaţie locală ortogonală $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}$ aşa încît

$$\bar{\mathbf{K}}_{Xt} = \mathbf{Q}\mathbf{K}_{Xt} \quad \forall t \in \mathcal{R}^+. \tag{3.22}$$

Obs. 4.1. Axiomele (**A.4.1**) şi (**A.4.2**) accentuează faptul că orice deformaţie termoelastică este deformaţia reţelei cristaline perfecte, netensionate şi arată totodată că orice deformaţie termovîscoplastică lasă nealterată structura cristalină, fapt ce asigură caracterul său ireversibil, permanent, apariţia ei datorîndu-se mişcării dislocaţiilor.

Obs. 4.2. Cele două tipuri de deformații — într-o mișcare dată — pot fi raportate la configurații de referință locale, curente, relaxate *arbitrare*, dar aceste configurații trebuie să fie elementele unui set de configurații locale curente relaxate *izocline*. Astfel de seturi sînt obținute prin rotirea rigidă — *identică la orice moment* — a rețelei cristaline perfecte, netensionate, după cum precizează axiomele (**A.4.1**) și (**A.4.2**), în conexiune cu axiomele și definițiile anterior introduse. Gradul de arbitrar este redus la alegerea configurației locale relaxate izocline *inițiale*.

Obs. 4.3. Din relațiile de definiție (3.2), (3.9) și (3.13), (3.16), din semnificația densității de masă și a liniilor de dislocație pe unitatea de volum a configurației locale curente relaxate izocline și din relația de legătură (3.22) *rezultă* următoarele formule de legătură între entitățile corespunzătoare, raportate la seturile de configurații locale curente relaxate izocline $\mathfrak{I}_{\mathbf{K}_{X0}}$ și $\mathfrak{I}_{\bar{\mathbf{K}}_{X0}}$:

$$\mathbf{F}^{e}_{\bar{\mathbf{K}}_{Xt}} = \mathbf{F}^{e}_{\mathbf{K}_{Xt}}\mathbf{Q}^{T},\quad \mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{K}}_{Xt}} = \mathbf{Q}\mathbf{\Pi}_{\mathbf{K}_{Xt}}\mathbf{Q}^{T},\quad \mathbf{C}^{e}_{\bar{\mathbf{K}}_{Xt}} = \mathbf{Q}\mathbf{C}^{e}_{\mathbf{K}_{Xt}}\mathbf{Q}^{T}, \tag{3.23}$$

$$\mathbf{F}^{p}_{\bar{\mathbf{K}}_{Xt}} = \mathbf{Q}\mathbf{F}^{p}_{\mathbf{K}_{Xt}}\mathbf{Q}^{T},\quad \rho_{\bar{\mathbf{K}}_{Xt}} = \rho_{\mathbf{K}_{Xt}},\ \alpha_{\bar{\mathbf{K}}_{Xt}} = \alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}. \tag{3.24}$$

Obs. 4.4. Din ecuația constitutivă termoelastică (3.10), pe baza relațiilor de legătură $(2.23)_{2,3}$ și $(3.24)_2$ *rezultă* că între funcțiile constitutive termoelastice $\mathbf{h}_{\mathbf{K}_{Xt}}$ și $\mathbf{h}_{\bar{\mathbf{K}}_{Xt}}$ corespunzătoare configurațiilor locale curente relaxate izocline $\mathbf{K}_{Xt} \in \mathfrak{I}_{\mathbf{K}_{X0}}$, respectiv $\bar{\mathbf{K}}_{Xt} \in \mathfrak{I}_{\bar{\mathbf{K}}_{X0}}$, legate între ele prin (3.22), există următoarea *relație de legătură*

$$\mathbf{h}_{\bar{\mathbf{K}}_{Xt}}(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^{T}, \theta, \alpha, X) = \mathbf{Q}\mathbf{h}_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{C}, \theta, \alpha, X)\mathbf{Q}\quad \forall t \in \mathbb{R}^{+},\ \mathbf{C} \in \mathcal{S}^{+},\ \theta \in \mathbb{R}^{+},\alpha \in \mathbb{R}^{+}. \tag{3.25}$$

Obs. 4.5. Din relația de legătură (3.25), *consecință* a axiomei (**A.1.3**) (principiul obiectivității) *și* a axiomei (**A.4.1**), *rezultă* că dacă $\mathbf{K}_{Xt}$ este o configurație locală relaxată, atunci și $\bar{\mathbf{K}}_{Xt} = \mathbf{Q}\mathbf{K}_{Xt}$ este o configurație locală relaxată *oricare* ar fi transformarea ortogonală $\mathbf{Q}$. Acest fapt nu implică însă că la un moment curent t *orice* configurație locală relaxată poate fi utilizată pentru evaluarea deformației termoelâstice, respectiv a deformației termovîscoplastice ce există în corp la acel moment dat și într-o mișcare dată. Poate fi aleasă arbitrar numai configurația locală relaxată *inițială*, modelul matematic al rețelei cristaline perfecte, netensionate. De îndată ce aceasta a fost fixată, celelalte configurații locale curente relaxate trebuie să fie configurații *izocline*, corespunzătoare celei inițial fixate. Axioma (**A.4.2**), în conexiune cu întregul set de axiome, exprimă tocmai acestă restricție.

Obs. 4.6. Din $(3.23)_2$, $(3.24)_{2,3}$ și din ecuațiile de evoluție (3.15), (3.19) *rezultă* că funcțiile constitutive $G_{\mathbf{K}_{Xt}}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{K}_{Xt}}$, $k_{\mathbf{K}_{Xt}}$, $l_{\mathbf{K}_{Xt}}$ și $G_{\bar{\mathbf{K}}_{Xt}}$, $\mathbf{A}_{\bar{\mathbf{K}}_{Xt}}$, $k_{\bar{\mathbf{K}}_{Xt}}$, $l_{\bar{\mathbf{K}}_{Xt}}$, corespunzătoare configurațiilor locale curente relaxate izo-

cline $\mathbf{K}_{Xt} \in \mathfrak{I}_{\mathbf{K}_{Xt}}$, respectiv $\mathbf{K}_{Xt} \in \mathfrak{I}_{\bar{\mathbf{K}}_{Xt}}$, legate între ele prin (3.22), există următoarele *relații de legătură*

$$G_{\bar{\mathbf{K}}_{Xt}}(\mathbf{QCQ}^T, \theta, \alpha, X) = G_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, X),$$

$$\mathbf{A}_{\bar{\mathbf{K}}_{Xt}}(\mathbf{Q\Pi Q}^T, \theta, \alpha, X) = \mathbf{QA}_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, X)\mathbf{Q}^T,$$

$$k_{\bar{\mathbf{K}}_{Xt}}(\mathbf{Q\Pi Q}^T, \theta, \alpha, X) = k_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, X),$$

$$l_{\bar{\mathbf{K}}_{Xt}}(\mathbf{Q\Pi Q}^T, \theta, \alpha, X) = l_{\mathbf{K}Xt}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, X), \tag{3.26}$$

$$\forall\, \mathbf{\Pi} \in \mathcal{S},\ \theta \in \mathcal{R}_+^+,\ \alpha \in \mathcal{R}_+^+.$$

Obs. 4.7. Relațiile de legătură (3.25) și (3.26) stau la baza definiției ce urmează.

Def. 4.1. Fie $\mathbf{K}_{Xt} \in \mathfrak{I}_{\mathbf{K}_{X0}}$ configurația locală curentă relaxată izoclină a particulei X și fie $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}$ o deformație locală ortogonală. Fie $\bar{\mathbf{K}}_{Xt} = \mathbf{QK}_{Xt} \in \mathfrak{I}_{\bar{\mathbf{K}}_{X0}}$ configurația locală curentă relaxată izoclină a lui X obținută din $\mathbf{K}_{Xt}$ prin deformația locală ortogonală $\mathbf{Q}$. Configurațiile locale $\mathbf{K}_{Xt}$ și $\bar{\mathbf{K}}_{Xt}$ se numesc *echivalente* între ele, din punctul de vedere al răspunsului termoelastovîscoplastic al particulei X, iar $\mathbf{Q}$ se numește o *transformare de simetrie* corespunzătoare acestui răspuns și configurației locale $\mathbf{K}_{Xt}$, dacă funcțiile constitutive corespuzătoate lui $\mathbf{K}_{Xt}$ satisfac următoarele *restricții*:

$$\mathbf{h}_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{QCQ}^T, \theta, \alpha, X) = \mathbf{Q}\mathbf{h}_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{C}, \theta, \alpha, X)\mathbf{Q}^T,$$

$$G_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{Q\Pi Q}^T, \theta, \alpha, X) = G_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, X),$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{Q\Pi Q}^T, \theta, \alpha, X) = \mathbf{AQ}_{\mathbf{K}_{Xt}}, (\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, X)\ \mathbf{Q}^T, \tag{3.27}$$

$$k_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{Q\Pi Q}^T, \theta, \alpha, X) = k_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, X),\ l_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{Q\Pi Q}, \theta, \alpha, X) = l_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, X),$$

$$\forall\ \mathbf{C} \in \mathcal{S}^+,\ \mathbf{\Pi} \in \mathcal{S},\ \theta \in \mathcal{R}_+^+,\ \alpha \in \mathcal{R}^+.$$

Obs. 4.8. În cadrul axiomatic elaborat conceptul de echivalență a două configurații locale poate fi definit *numai* pentru configurațiile locale curente relaxate izocline $\mathbf{K}_{Xt} \in I_{\mathbf{K}_{X0}}$ și $\mathbf{K}_{Xt} \in I_{\bar{\mathbf{K}}_{X0}}$, deoarece noțiunea de *echivalență* poate fi caracterizată *numai* prin utilizarea ecuațiilor constitutive și de evoluție. La rîndul lor aceste legi de material, pe calea aici adoptată, pot fi formulate coerent *numai* dacă se face apel la configurațiile locale curente relaxate izocline *și numai* la acestea. Din aceste observații rezultă că teoria aici reconstruită axiomatic *diferă* de teoria nolliană a

materialelor simple, iar materialele termoelastovîscoplastice, caracterizate prin sistemul de axiome aici prezentat, *nu* sînt materiale simple în sensul lui Noll. Natura legăturii ce există sau ar trebui să existe între cele două structuri teoretice este o problemă deschisă a mecanicii raționale.

Obs. 4.9. Restricțiile (3.27), în conjuncție cu principiile de bilanț ale masei, impulsului și energiei, exprimă faptul că într-un proces termoelastovîscoplastic arbitrar, la care poate fi supusă particula X, configurațiile locale curente relaxate izocline $\mathbf{K}_{Xt} \in \mathcal{J}_{\mathbf{K}_{X0}}$ și $\bar{\mathbf{K}}_{Xt} \in \mathcal{J}_{\bar{\mathbf{K}}_{X0}}$, legate prin relația $\bar{\mathbf{K}}_{Xt} = \mathbf{Q}\mathbf{K}_{Xt}$, *nu* pot fi distinse între ele.

Obs. 4.10. Din (3.27) rezultă că totalitatea transformărilor de simetrie $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}$, ce satisfac restricțiile (3.27) formează un *grup*, subgrup al grupului ortogonal .

Def. 4.2. Mulțimea tuturor transformărilor de simetrie $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}$ pentru care funcțiile constitutive satisfac restricțiile (3.27) se numește *grupul de simetrie* al configurației locale curente relaxate izocline $\mathbf{K}_{Xt} \in \mathcal{J}_{\mathbf{K}_{X0}}$ relativ la răspunsul termoelastovîscoplastic al particulei X ; acest grup, subgrup al grupului ortogonal, va fi notat cu $g_{\mathbf{K}_{Xt}}$.

Obs. 4.11. Deoarece particula X *admite* o configurație locală curentă relaxată izoclină $\mathbf{K}_{Xt}$ căreia cu *certitudine* îi corespunde un grup de simetrie $g_{\mathbf{K}_{Xt}}$, care *obligatoriu* este un subgrup al grupului ortogonal, conform clasificării lui Noll *rezultă* că particula X este formată dintr-un material *solid*. În consecință, în principiu „relaxarea" locală poate fi realizată (efectiv sau cel puțin mental).

Obs. 4.12. Din definiția 4.2 *rezultă* că restricțiile (3.27) trebuie să fie satisfăcute oricare ar fi deformația locală ortogonală $\mathbf{Q}$ din grupul de simetrie $g_{\mathbf{K}_{Xt}}$ corespunzător configurației locale curente relaxate izocline $\mathbf{K}_{Xt} \in \mathcal{J}_{\mathbf{K}_{X0}}$.

Def. 4.3. Spunem că particula $X \in \mathcal{B}$ este formată dintr-un material *izotrop* la momentul t, relativ la răspunsul termoelastoviscoplastic, dacă există o configurație locală curentă relaxată izoclină $\mathbf{K}_{Xt} \in \mathcal{J}_{\mathbf{K}_{X0}}$ așa încît $g_{\mathbf{K}_{Xt}} = \mathcal{O}$.

Obs. 4.13. Dacă particula X este formată dintr-un material izotrop la momentul t, iar $\mathbf{K}_{Xt} \in \mathcal{J}_{\mathbf{K}_{X0}}$ este configurația locală curentă relaxată izoclină din definiția precedentă, restricțiile (3.27) trebuie să fie satisfăcute pentru *orice* deformație locală ortogonală $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}$. În consecință, în acest caz, funcțiile constitutive $\mathbf{h}_{\mathbf{K}_{Xt}}$, $G_{\mathbf{K}_{Xt}}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{K}_{Xt}}$, $k_{\mathbf{K}_{Xt}}$ și $l_{\mathbf{K}_{Xt}}$ trebuie să fie funcții *izotrope*.

Obs. 4.14. Din axiomele (**A.1.1.**) — (**A.3.3.**) și din consecințele lor (3.10) — (3.12) *rezultă* că *există* cinci funcții constitutive sau de material

$$\mathbf{h}_{\mathbf{K}_X} : \mathcal{S}^+ \times \mathcal{R}_+^+ \times \mathcal{R}^+ \times \mathcal{B} \to \mathcal{S},$$

$$G_{\mathbf{K}_X} : \mathcal{S} \times \mathcal{R}_+^+ \times \mathcal{R}^+ \times \mathcal{B} \to \mathcal{R}, \quad \mathbf{A}_{\mathbf{K}_X} : \mathcal{S} \times \mathcal{R}_+^+ \times \mathcal{R}^+ \times \mathcal{B} \to \mathcal{L}, \tag{3.28}$$

$$h_{\mathbf{K}_X} : \mathcal{S} \times \mathcal{R}_+^+ \times \mathcal{R}^+ \times \mathcal{B} \to \mathcal{R}, \; l_{\mathbf{K}_X} : \mathcal{S} \times \mathcal{R}_+^+ \times \mathcal{R}^+ \times \mathcal{B} \to \mathcal{R},$$

așa încît, într-un proces termoelastovîscoplastic, răspunsul particulei X la *momentul curent* $t \in \mathcal{R}^+$, este descris de următoarele relații:

$$\mathbf{\Pi}_{\mathcal{K}_{Xt}} = \mathbf{h}_{\mathcal{K}_X}(\mathbf{C}^e_{\mathcal{K}_{Xt}}, \theta_{Xt}, \alpha_{\mathcal{K}_{Xt}}, X),$$

$$\dot{\mathbf{F}}^p_{\mathcal{K}_{Xt}}(\mathbf{F}^p_{\mathcal{K}_{Xt}})^{-1} = \mathbf{A}_{\mathcal{K}_X}(\mathbf{\Pi}_{\mathcal{K}_{Xt}}, \theta_{Xt}, \alpha_{\mathcal{K}_{Xt}}, X)\, H[G_{\mathcal{K}_X}(\mathbf{\Pi}_{\mathcal{K}_{Xt}}, \theta_{Xt}, \alpha_{\mathcal{K}_{Xt}}, X)], \quad (3.29)$$

$$\dot{\alpha}_{\mathcal{K}_{Xt}} =$$

$$= k_{\mathcal{K}_X}(\mathbf{\Pi}_{\mathcal{K}_{Xt}}, \theta_{Xt}, \alpha_{\mathcal{K}_{Xt}} X) + l_{\mathcal{K}_X}(\mathbf{\Pi}_{\mathcal{K}_{Xt}}, \theta_{Xt}, \alpha_{\mathcal{K}_{Xt}}, X) H[G_{\mathcal{K}_X}(\mathbf{\Pi}_{\mathcal{K}_{Xt}}, \theta_{Xt}, \alpha_{\mathcal{K}Xt}, X)],$$

unde

$$\mathbf{h}_{\mathcal{K}_X}(\mathbf{1}, \theta_{X0}, \alpha_{\mathcal{K}_{Xt}}, X) = \mathbf{0} \quad \forall\, \alpha_{\mathcal{K}_{Xt}} \in \mathcal{R}^+, \quad (3.30)$$

$\mathbf{F}^e_{\mathcal{K}_{Xt}}$, $\mathbf{\Pi}_{\mathcal{K}_{Xt}}$, $\mathbf{C}^e_{\mathcal{K}_{Xt}}$ și $\mathbf{F}^p_{\mathcal{K}_{Xt}}$ fiind definite prin relațiile (3.2), (3.9), (3.13), respectiv (3.16), iar $\mathbf{K}_{Xt} \in \mathcal{I}_{\mathcal{K}_{X0}}$ este o configurație locală curentă relaxată izoclină a particulei X, corespunzătoare configurației locale relaxate izocline inițiale $\mathbf{K}_{X0} \in \mathcal{I}_{\mathcal{K}_{X0}}$.

Obs. 4.15. Din observația (4.11) *rezultă* că grupul de simetrie $g_{\mathcal{K}_X}$, corespunzător funcțiilor constitutive prezente în relațiile (3.29) — (3.30), este un subgrup al grupului ortogonal, iar în raport cu elementele acestui grup vor fi satisfăcute restricțiile

$$\mathbf{h}_{\mathcal{K}_X}(\mathbf{QCQ}^T, \theta, \alpha, X) = \mathbf{Q}\mathbf{h}_{\mathcal{K}_X}(\mathbf{C}, \theta, \alpha, X)\, \mathbf{Q}^T,$$

$$G_{\mathcal{K}_X}(\mathbf{Q\Pi Q}^T, \theta, \alpha, X) = G_{\mathcal{K}_X}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, X),$$

$$\mathbf{A}_{\mathcal{K}_X}(\mathbf{Q\Pi Q}^T, \theta, \alpha, X) = \mathbf{Q}\mathbf{A}_{\mathcal{K}_X}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, X)\, \mathbf{Q}^T, \quad (3.31)$$

$$k_{\mathcal{K}_X}(\mathbf{Q\Pi Q}^T, \theta, \alpha, X) = k_{\mathcal{K}}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, X), l_{\mathcal{K}_X}(\mathbf{Q\Pi Q}^T, \theta, \alpha, X) = l_{\mathcal{K}_X}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, X),$$

$$\forall\ X \in \mathcal{B},\ \mathbf{C} \in \mathcal{S}^+,\ \mathbf{\Pi} \in \mathcal{S},\ \theta \in \mathcal{R}^+_+,\ \alpha \in \mathcal{R}^+,\ \mathbf{Q} \in g_{\mathcal{K}_X} \subset \mathcal{O}.$$

Obs. 4.16. Din proprietățile de invarianță temporală (3.12), (3.17) și (3.20) *rezultă* că cele cinci funcții constitutive și grupul lor de simetrie, ce *nu* depind *explicit* de momentul curent t, sînt specificate de următoarele relații:

$$\mathbf{h}_{\mathcal{K}_X} = \mathbf{h}_{\mathcal{K}_{X0}},\ G_{\mathcal{K}_X} = G_{\mathcal{K}_{X0}},\ \mathbf{A}_{\mathcal{K}_X} = \mathbf{A}_{\mathcal{K}_{X0}},\ l_{\mathcal{K}_X} = l_{\mathcal{K}_{X0}},\ g_{\mathcal{K}_X} = g_{\mathcal{K}_{X0}}, \quad (3.32)$$

$\mathbf{K}_{X0}$ fiind acea configurație locală relaxată izoclină *inițială* a particulei X a cărei existență și proprietăți sînt afirmate de sistemul *complet* de axiome.

Obs. 4.17. Rezultă de asemenea că două seturi de configurații locale curente relaxate izocline $\mathcal{I}_{\mathcal{K}X0}$ și $\mathcal{I}_{\overline{\mathcal{K}}X0}$ sînt formate din configurații locale curente relaxate izocline echivalente două cîte două, dacă și numai dacă $\overline{\mathbf{K}}_{X0}\, \mathbf{K}^{-1}_{X0} = \mathbf{Q} \in g_{\mathcal{K}_X} = g_{\mathcal{K}_{X0}}$.

Obs. 4.18. Din (3.2) și (3.16) *rezută* că deformația locală curentă *totală* $\mathbf{F}_{\nabla\chi_t(X)}$ relativă la configurația locală inițială $\nabla\chi_0(X)$, luată drept configurația locală de *referință* a particulei X, se exprimă prin deformația locală curentă termoelastică $\mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{Xt}}$ și prin deformația locală curentă termovîscoplastică $\mathbf{F}^p_{\mathbf{K}_{Xt}}$, prin următoarea relație *multiplicativă*

$$\mathbf{F}_{\nabla\chi_t(X)} \equiv [\nabla\chi_t(X)][\nabla\chi_0(X)] = \mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{Xt}}\,\mathbf{F}^p_{\mathbf{K}_{Xt}}(\mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{X0}})^{-1}. \tag{3.33}$$

Obs. 4.19. Spre deosebire de $\mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{Xt}}$ și $\mathbf{F}^p_{\mathbf{K}_{Xt}}$, deformația locală curentă $\mathbf{F}_{\nabla\chi_t(X)}$ este *gradientul* în X al unei deformații *globale* a corpului $\mathcal{B}$, după cum atestă relația de definiție $(3.33)_1$.

★

Def. 5.1. Două particule X și $\bar{X}$ ale corpului $\mathcal{B}$ vor fi numite *material izomorfe* dacă *există* două configurații locale relaxate izocline inițiale $\mathbf{K}_{X0} \in \mathcal{I}_{\mathbf{K}_{X0}}$ și $\mathbf{K}_{\bar{X}0} \in \mathcal{I}_{\mathbf{K}_{\bar{X}_0}}$ având următoarele proprietăți

$$\rho_{\mathbf{K}_{X0}} = \rho_{\mathbf{K}_{\bar{X}_0}},\quad \alpha_{\mathbf{K}_{X0}} = \alpha_{\mathbf{K}_{\bar{X}_0}},\quad \mathbf{h}_{\mathbf{K}_X}(\mathbf{C}, \theta, \alpha, X) = \mathbf{h}_{\mathbf{K}_{\bar{X}}}(\mathbf{C}, \theta, \alpha, \bar{X}),$$

$$G_{\mathbf{K}_X}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, X) = G_{\mathbf{K}_{\bar{X}}}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, \bar{X}),\quad \mathbf{A}_{\mathbf{K}_X}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, X) = \mathbf{A}_{\mathbf{K}_{\bar{X}}}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, \bar{X}), \tag{3.34}$$

$$k_{\mathbf{K}_X}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, X) = k_{\mathbf{K}_{\bar{X}}}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, \bar{X}),\quad l_{\mathbf{K}_X}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, X) = l_{\mathbf{K}_{\bar{X}}}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha, \bar{X}),$$

$$\forall\ \mathbf{C} \in \mathcal{S}^+,\ \mathbf{\Pi} \in \mathcal{S},\quad \theta \in \mathcal{R}^+_+,\ \alpha \in \mathcal{R}^+.$$

Configurațiile locale $\mathbf{K}_{X0}$ și $\mathbf{K}_{\bar{X}0}$, ce satisfac restricțiile (3.34) vor fi fi numite configurații locale relaxate izocline inițiale *material uniforme*.

Obs. 5.1. Restricțiile (3.34) exprimă faptul că cele două particule sînt formate din *același material*: dacă ele se află în cele două configurații locale material uniforme și dacă sînt supuse la *același* proces termoelastovîscoplastic, răspunsurile lor vor fi de asemenea *aceleași*.

Def. 5.2. Corpul $\mathcal{B}$ este format din *același* material sau dintr-un singur material termoelastovîscoplastic dacă toate particulele sale sînt material uniforme între ele.

Def. 5.3. O aplicație $\mathbf{K}$ definită pe $\mathcal{B}$ care atașează fiecărei particule $X \in \mathcal{B}$ o configurație locală $\mathbf{K}(X) \in \mathcal{C}_X$ se numește un *referențial* al corpului $\mathcal{B}$.

În cazul în care configurațiile $\mathbf{K}(X)$, $X \in \mathcal{B}$, sînt configurațiile locale relaxate izocline inițiale și material uniforme între ele, aplicația $\mathbf{K}$ va fi numită *referențial material uniform* al corpului $\mathcal{B}$.

(**A.5.1**) Corpul $\mathcal{B}$ este format dintr-un *singur* material cu răspuns termoelastovîscoplastic.

Obs. 5.2. Axioma precedentă afirmă existența unui referențial material uniform $\mathbf{K}$ al corpului $\mathcal{B}$ așa încît $\mathbf{K}(X) = \mathbf{K}_{X0} \in \mathcal{I}_{\mathbf{K}_{X0}}$ este o configurație locală relaxată izoclină inițială a particulei X, iar aceste configurații sînt material uniforme între ele.

Obs. 5.3. Din axioma (**A.5.1**) și din observația (4.14) *rezultă* că există un referențial material uniform **K** și cinci funcții constitutive caracteristice *materialului* termoelastovîscoplastic din care este format corpul $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{h}_{\mathbf{K}} : \mathcal{S}^+ \times \mathcal{R}_+^+ \times \mathcal{R}^+ \to \mathcal{S},$$

$$G_{\mathbf{K}} : \mathcal{S} \times \mathcal{R}_+^+ \times \mathcal{R}^+ \to \mathcal{R}, \qquad \mathbf{A}_{\mathbf{K}} : \mathcal{S} \times \mathcal{R}_+^+ \times \mathcal{R}^+ \to \mathcal{L}, \tag{3.35}$$

$$k_{\mathbf{K}} : \mathcal{S} \times \mathcal{R}_+^+ \times \mathcal{R}^+ \to \mathcal{R}, \; l_{\mathbf{K}} : \mathcal{S} \times \mathcal{R}_+^+ \times \mathcal{R}^+ \to \mathcal{R}$$

așa încît, într-un proces termoelastovîscoplastic răspunsul *oricărei* particule X a corpului $\mathcal{B}$, la momentul curent $t \in \mathcal{R}^+$ este caracterizat de următoarele relații:

$$\mathbf{\Pi}_{\mathbf{K}_{Xt}} = \mathbf{h}_{\mathbf{K}}(\mathbf{C}^e_{\mathbf{K}_{Xt}}, \theta_{Xt}, \alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}), \; \mathbf{h}_{\mathbf{K}}(\mathbf{1}, \theta_{\mathbf{K}0}, \alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}) = \mathbf{0} \quad \forall \alpha_{\mathbf{K}_{Xt}} \in \mathcal{R}^+,$$

$$\dot{\mathbf{F}}^p_{\mathbf{K}_{Xt}} (\mathbf{F}^p_{\mathbf{K}_{Xt}})^{-1} = \mathbf{A}_{\mathbf{K}}(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{K}_{Xt}}, \theta_{Xt}, \alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}) \, H[G_{\mathbf{K}}(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{K}_{Xt}}, \theta_{Xt}, \alpha_{\mathbf{K}_{Xt}})], \tag{3.36}$$

$$\dot{\alpha}_{\mathbf{K}_{Xt}} = k_{\mathbf{K}}(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{K}_{Xt}}, \theta_{Xt}, \alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}) + l_{\mathbf{K}}(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{K}_{Xt}}, \theta_{Xt}, \alpha_{\mathbf{K}_{Xt}}) H[G_{\mathbf{K}}(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{K}_{Xt}}, \theta_{Xt}, \alpha_{\mathbf{K}_{Xt}})],$$

unde conform relațiilor de definiție (3.2), (3.9), (3.13) și (3.16)

$$\mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{Xt}} \equiv \nabla \chi_t(X) \mathbf{K}^{-1}_{Xt}, \; \mathbf{C}^e_{\mathbf{K}_{Xt}} \equiv (\mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{Xt}})^T \, \mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{Xt}},$$

$$\mathbf{\Pi}_{\mathbf{K}_{Xt}} \equiv (\det \mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{Xt}}) (\mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{Xt}})^{-1} \mathbf{T}_{\nabla \chi_t(X)} (\mathbf{F}^e_{\mathbf{K}_{Xt}})^{-T}, \; \mathbf{F}^p_{\mathbf{K}_{Xt}} \equiv \mathbf{K}_{Xt} \mathbf{K}^{-1}_{X0}, \tag{3.37}$$

iar $\mathbf{K}_{Xt} \in \mathcal{I}_{\mathbf{K}_{X0}}$, cu $\mathbf{K}_{X0} = \mathbf{K}(X)$.

Obs. 5.4. Din axioma (**A.5.1**) și din observația (4.15) *rezultă* că grupul de simetrie $g_{\mathbf{K}}$ corespuzător referențialului material uniform **K** este un subgrup al grupului ortogonal, iar în raport cu elementele acestui grup cele cinci funcții constitutive ce corespund lui **K**, trebuie să satisfacă următoarele restricții:

$$\mathbf{h}_{\mathbf{K}}(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T, \theta, \alpha) = \mathbf{Q}\mathbf{h}_{\mathbf{K}}(\mathbf{C}, \theta, \alpha)\mathbf{Q}^T,$$

$$G_{\mathbf{K}}(\mathbf{Q}\mathbf{\Pi}\mathbf{Q}^T, \theta, \alpha) = G_{\mathbf{K}}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha), \; \mathbf{A}_{\mathbf{K}}(\mathbf{Q}\mathbf{\Pi}\mathbf{Q}^T, \theta, \alpha) = \mathbf{Q}\mathbf{A}_{\mathbf{K}}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha)\mathbf{Q}^T, \tag{3.38}$$

$$k_{\mathbf{K}}(\mathbf{Q}\mathbf{\Pi}\mathbf{Q}^T, \theta, \alpha) = k_{\mathbf{K}}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha), \; l_{\mathbf{K}}(\mathbf{Q}\mathbf{\Pi}\mathbf{Q}^T, \theta, \alpha) = l_{\mathbf{K}}(\mathbf{\Pi}, \theta, \alpha),$$

$$\forall \; \mathbf{C} \in \mathcal{S}^+, \; \mathbf{\Pi} \in \mathcal{S}, \; \theta \in \mathcal{R}_+^+, \; \alpha \in \mathcal{R}^+, \; \mathbf{Q} \in g_K \subset \mathcal{O}.$$

Obs. 5.5. Din relațiile (3.34) *rezultă* că cele cinci funcții constitutive și grupul lor de simetrie sînt specificate de următoarele relații:

$$\mathbf{h}_{\mathbf{K}} = \mathbf{h}_{\mathbf{K}_{X0}}, \; G_{\mathbf{K}} = G_{\mathbf{K}_{X0}}, \; \mathbf{A}_{\mathbf{K}} = A_{\mathbf{K}_{X0}}, \; k_{\mathbf{K}} = k_{\mathbf{K}_{X0}}, \; l_{\mathbf{K}} = l_{\mathbf{K}_{X0}}, \; g_{\mathbf{K}} = g_{\mathbf{K}_{X0}}, \tag{3.39}$$

cu $\mathbf{K}_{X_0} = \mathbf{K}(X)(\forall X \in \mathcal{B}!)$, $\mathbf{K}$ fiind acel referențial material uniform al corpului $\mathcal{B}$ a cărei existență și ale cărei proprietăți sînt afirmate de sistemul *complet* de axiome (**A.1.1**) — (**A.5.1**).

★

Obs. Fără ipoteze suplimentare structura generală a legilor de comportare nu poate fi simplificată. Dintre ipotezele simplificatoare trei sînt acceptabile în multe situații importante : independența răspunsului termoelastic de conținutul de dislocație existent în corp ; natura izotropă a răspunsului material ; deformații termoelastice pure mici în comparație cu deformațiile termovîscoplastice pure. Implicațiile acestor ipoteze nu sînt analizate în această lucrare.

★

Mulțumesc colegilor mei Dr. Cristian Teodosiu, Dr. Ion Suliciu și Dr. Sanda Țigoiu pentru discuțiile care stau la baza acestei lucrări.

Primită la redacție la 12 aprilie 1983

BIBLIOGRAFIE

1. C. ECKART, *The thermodynamics of irreversible processes, IV. The theory of elasticity and anelasticity*, Phys. Rev. **73**, 373 - 382, 1948.
2. E. KRÖNER, *Allgemeine Kontinuums theorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Arch. Rat. Mech. Anal., **4**, 273—334, 1960.
3. — *Dislocation : a new concept in the continuum theory of plasticity*, J. Math. Phys., **42**, 27—37, 1963.
4. — *Initial studies of plasticity theory based upon statistical mechanics*, pp. 443—446 in *Inelastic behaviour of solids*, Colloquia 1969, Ohio, Ed. M.F. Kaminen, W.F. Adler, A. R. Rosenfeld, Mc. Graw Hill, 1970.
5. М. Э. ЭГЛИТ, *О тензорных характеристиках конечных деформации*, Прикл. Мат. Мех., **24**, 947—950, 1960.
6. Л. И. СЕДОВ, *Введение в механику сплошной сред*, Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит., Москва, 1962.
7. E.H. LEE, D.T. LIU, *Finite strain elastic-plastic theory*, pp. 117—131 in Proc. IUTAM Symp. Vienna 1966, *Irreversible aspects of continuum mechanics and transfer of physical characteristics in moving fluids*, Ed. H. Parkus, L.I. Sedov. Springer-Verlag, Wienn, New York, 1968.
8. — — *Finite-strain elastic-plastic theory with application to plane wave analysis*, J. Appl. Phys., **38**, 19—27, 1967.
9. — *Elastic-plastic deformation at finite strains*, J. Appl., Mech., Trans. ASME (Ser. E), **36**, 1—6, 1969.
10. E.H. LEE, *Constitutive relations for dynamic loading and plastic waves*, pp. 423—446, in Ref. [4].
11. — , P. GERMAIN, *Elastic-plastic thoery at finite strain*, pp. 413—426 in *Problems of plasticity*, Int. symp. on foundations of plasticity, Warsaw, 1972, Ed. A. Sawczuk, Nordhoff Int. Publ., Leyden, 1974.
12. C. TEODOSIU, *A dynamic theory of dislocations and its applications to the theory of the elastic-plastic continuum*, pp. 837—876 in *Fundamental aspects of dislocation theory*, Ed. J.A. Simmons, R. de Wit, R. Bullough, Nat. Bur. Stand. (U.S.), Spec. Publ. 317, II, 1970.
13. — , E. KRÖNER, *Lattice defect approach to plasticity and viscoplasticity*, pp. 45—88 in Ref. [11].
14. — *A physical theory of the finite elastic-viscoplastic behaviour of single crystals*, Rozprawy Inzynerkie-Engineering Transactions, **23**, 151—184, 1975.

15. — , F. Sidoroff, *A finite theory of the elastoviscoplasticity of single crystals*, Int. J. Engng. Sci., **14**, 713—723, 1976.
16. F. SIDOROFF, *Quelques réflexions sur le principe d'indifférence matérielle pour un milieu ayant un état relâché*, C.R. Acad. Sci. Paris, **A 271**, 1026—1029, 1970.
17. — *Le principe de causalité et les équations de comportement en viscoplasticité*, pp. 135—137 in *Plasticité et viscoplasticité*, Séminaire 1972, Ed. D. Radenkovic, J. Salençon, Ediscience, McGraw-Hill, Paris, 1974.
18. — *The geometrical concept of intermediate configuration and elastic-plastic finite strain*, Arch. Mech.—Archiwum Mechaniki Stosowanej, **25**, 299—308, 1973.
19. — *Incremental constitutive equation for large strain elastoplasticity*, Int. J. Engng. Sci., **20**, 19—26, 1982.
20. J. MANDEL, *Sur la décomposition d'une transformation élastoplastique*, C.R. Acad. Sci. Paris, **A 272**, 276—278, 1971.
21. — *Sur les relations de comportement d'un milieu élastique viscoplastique*, C.R. Acad. Sci. Paris, **A 272**, 1596—1998, 1971.
22. — *Sur les relations de comportement d'un milieu élastique viscoplastique*, C.R. Acad. Sci. Paris, **A 273**, 44—46, 1971.
23. — *Plasticité classique et viscoplasticité*, Udine 1971, Sringer-Verlag, Wienn, New York, 1972.
24. — *Relations de comportement des milieux élasticiques-plastiques et élastiques-viscoplastiques. Notion de repere director*, pp. 499—513 in *Foundations of plasticity*, Warsaw, 1972, Ed. A. Sawczuk, Nordhoff Int. Publ., Groningen, 1972.
25. — *Director vectors and constitutive equations for plastic and elasto-plastic media*, pp. 135—143 in Ref. [11].
26. — *Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques*, Int. J. Solids Structures, **9**, 725—740, 1973.
27. — *Plasticité classiques et viscoplasticité*, pp 117—127, in Ref. [17].
28. J.R. RICE *Inelastic constitutive relations for solids : an internal variable theory and its applications to metal plasticity*, J. Mech. Phys. Solids, **19**, 433—455, 1971.
29. B. HALPHEN, *Sur le champ des vitesses en thermoplasticité finie*, Int. J. Solids Structures **11**, 947—960, 1975.
30. W. NOLL, *Materially uniform simple bodies with inhomogeneities*, Arch. Rat. Mech. Anal., **27**, 1—32, 1967 sau pp. 211—242 in W. Noll : *The foundations of mechanics and thermodinamics, Selected papers*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.
31. — *Inhomogeneities in materially uniform simple bodies*, pp. 239—246 in IUTAM Symp. on *Mechanics of generalised continua*, 1967, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. New York, 1968.
32. — *A new mathematical theory of simple materials*, Arch. Rat. Mech. Anal., **48**, 1—50, 1972.
33 — *Lectures on the foundations of continuum mechanics and thermodynamics*, Arch. Rat. Mech. Anal., **52**, 62—92, 1973.
34. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The non-linear field theories of mechanics*, Handbuch der Physik III/3, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1965.
35. M. MIHĂILESCU SULICIU, I. SULICIU, *Hypoelasticity and rate-independent plasticity theory*, Preprint series in mathematics no. 88/1981, INCREST, București.
36. I. BEJU, E. SOÓS, P.P. TEODORESCU, *Calcul spinorial și tensorial neeuclidian cu aplicații*, Ed. Tehnică, București, 1979.

TEOREME VARIAȚIONALE ÎN ANALIZA ELASTOPLASTICĂ GEOMETRIC NELINIARĂ A STRUCTURILOR DIN BARE

P. ALEXA și G.M. BÂRSAN
Institutul politehnic Cluj-Napoca

Se consideră comportarea elastoplastică a structurilor din bare drepte în următoarele ipoteze : comportarea materialului este liniar elastică-rigid plastică, plastificarea are loc în secțiuni discrete, ecuațiile de echilibru și compatibilitate se scriu pe forma deformată a barei (neliniaritate geometrică), deformația totală se poate descompune într-o componentă elastică și una plastică, comportarea secțiunilor plastificate este olonomă, forțele aplicate sînt conservative.
Pentru obținerea relațiilor de echilibru, de compatibilitate și constitutive se folosește tehnica elementelor finite. Se arată că relațiile astfel obținute constituie condițiile de optimalitate ale unor programe matematice neliniare.
Interpretarea variațională a acestor programe generează teoreme care guvernează comportarea structurilor în ipotezele menționate.

1. INTRODUCERE

Lucrarea prezintă o formulare incrementală în programare matematică a comportării geometric neliniare a structurilor plane din bare drepte în domeniul elastoplastic.

Programele matematice obținute pe baza echivalenței Kuhn-Tucker a relațiilor vectoriale fundamentale sînt interpretate variațional obținînd astfel teoreme care guvernează comportarea structurilor cu valabilitate în domeniul definit de ipotezele adoptate.

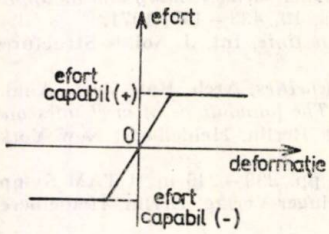


Fig. 1

Astfel, se consideră o comportare liniar elastică-rigid plastică a materialului (fig. 1), plastificarea producîndu-se în secțiuni discrete. Eforturile rezultante care produc deformații plastice (moment încovoietor și efort axial) nu interacționează. Considerînd că deformațiile sînt mici, deformația totală într-o secțiune se poate descompune într-o componentă elastică și una plastică. De asemenea, se presupune o comporttare olonomă a secțiunilor cu deformații plastice, presupunere ce poate fi acoperită prin discretizarea corespunzătoare a structurii și prin formularea incrementală a relațiilor vectoriale.

Forțele aplicate structurii sînt forțe concentrate conservative. Forțele distribuite pot fi cuprinse în prezenta formulare prin echivalarea lor cu forțe concentrate.

2. MĂRIMI STATICE ȘI MĂRIMI CINEMATICE

Fie structura plană din bare drepte din figura 2 avînd modelul ca în figura 3 în care m este un element curent, iar i și j sînt nodurile sale adiacente. Pentru structura discretizată ca în figura 3 se pot defini vectorii forțelor aplicate $\mathbf{Q}$ (fig. 4) și a gradelor de libertate $\mathbf{q}$ (fig. 5), ale căror componente sînt asociate vectorial în fiecare nod.

La nivelul unui element m se pot, de asemenea, defini două categorii de mărimi (statice și cinematice): vectorul eforturilor secționale $\mathbf{X}'$, și vectorul deformațiilor secționale $\mathbf{x}'$, asociate vectorial pentru fiecare element m. Fiecare vector $\mathbf{X}'$ și $\mathbf{x}'$ conține cîte șase componente pentru un element m. Dintre cele șase componente ale fiecărui vector $\mathbf{X}'$ și $\mathbf{x}'$ se pot extrage cîte trei componente independente care sînt colectate în vectorii $\mathbf{X}$ și $\mathbf{x}$, componente care de asemenea sînt asociate vectorial pentru fiecare element m (fig. 6 și fig. 7).

3. RELAȚII VECTORIALE FUNDAMENTALE

Poziția unui element m în starea deformată a structurii poate fi definită prin vectorul $\mathbf{r}$ al deplasărilor nodale ale elementului, căruia îi corespund forțele nodale $\mathbf{R}$, componentele celor doi vectori $\mathbf{R}$ și $\mathbf{r}$ fiind asociate vectorial (fig. 8).

Dacă $\mathbf{R}$ reprezintă creșterea în forțele nodale necesară pentru a aduce elementul m din starea S_0 în starea S definită prin creșterea $\mathbf{r}$ în deplasările nodale, se pot scrie în domeniul elastic următoarele relații între creșterile mărimilor statice și cinematice la nivelul elementului [1]:

— relații de compatibilitate cinematică:

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{r}, \tag{1}$$

— relații de compatibilitate statică:

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}^T\mathbf{X}, \tag{2}$$

— relații elastic-constitutive:

$$\mathbf{X} = \mathbf{K}_m\mathbf{x}, \tag{3}$$

unde

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{4L}{30}r_1 - \frac{r_5 - r_2}{10} - \frac{L}{30}r_4 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & -\frac{6(r_5 - r_2)}{5L} + \frac{r_1 + r_4}{10} \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{L}{30}r_1 - \frac{r_5 - r_2}{10} + \frac{4L}{30}r_4 \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & \frac{6(r_5 - r_2)}{5L} - \frac{r_1 + r_4}{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

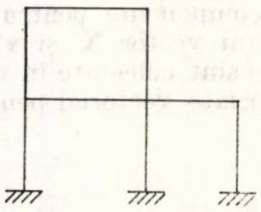


Fig. 2.

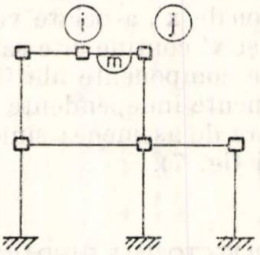


Fig. 3.

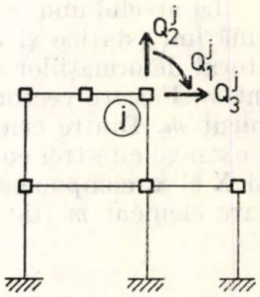


Fig. 4.

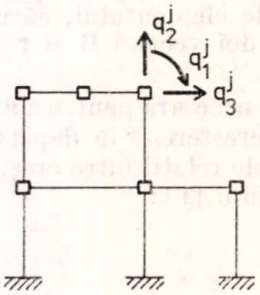


Fig. 5.

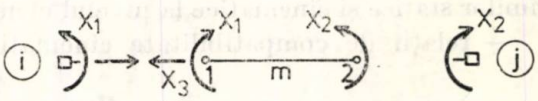


Fig. 6.

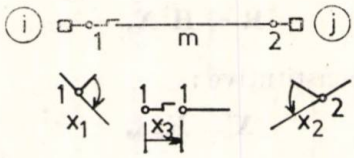


Fig. 7.

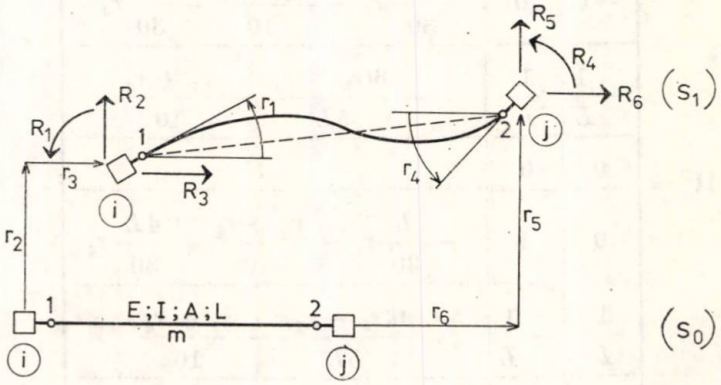


Fig. 8

și

$$\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{2EI}{L} & 0 \\ -\frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Trecînd de la element la structură, aceleași categorii de relații devin :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{q}, \tag{6}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T\mathbf{X}, \tag{7}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{K}\mathbf{x}, \tag{8}$$

unde $\mathbf{x}$ și $\mathbf{X}$ colectează deformațiile și eforturile secționale pentru întreaga structură, $\mathbf{K}$ este matricea de rigiditate neasamblată, iar $\mathbf{A}$ colectează la nivelul structurii matriceale $\mathbf{H}$.

Relațiile (6) și (7) evidențiază legătura între mărimile statice $\mathbf{Q}$ și $\mathbf{X}$ și cele cinematice $\mathbf{q}$ și $\mathbf{x}$, legătură cunoscută sub numele de dualitate statică-cinematică [2] și care este o condiție necesară și suficientă pentru validitatea teoremei lucrului mecanic virtual [3] în forma

$$\underset{\text{echilibrate}}{\overset{\text{static}}{\mathbf{Q}^T}}\mathbf{q} = \mathbf{X}^T\underset{\text{compatibilitate}}{\overset{\text{cinematic}}{\mathbf{x}}} \tag{9}$$

Dacă relația elastic constitutivă (8) este liniară și $\mathbf{x}$ sînt creșteri finite ale deformațiilor, deformația x se poate descompune în fiecare secțiune 1 și 2 a fiecărui element m (fig. 7) într-o componentă elastică $\mathbf{x}_e$ și una plastică $\mathbf{x}_P$ [4] :

$$x = x_e + x_P.$$

Fiecare componentă plastică x_P poate fi reprezentată print-o pereche de variabile cinematice nenegative x_P^+ și x_P^-, astfel încît

$$x_P = x_P^+ + x_P^- \; ; \; x_P^+ \cdot x_P^- = 0 \; ; \; x_P^+, x_P^- \geqslant 0. \tag{10}$$

Pentru întreaga structură, relațiile (10) se scriu [1] :

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{N}\mathbf{x}_* \; ; \quad \mathbf{x}_P^{+T}\mathbf{x}_P^- = \mathbf{0} \; ; \; \mathbf{x}_* \geqslant \mathbf{0}, \tag{11}$$

unde

$$\mathbf{N} = [\mathbf{I} \vdots -\mathbf{I}]; \quad \mathbf{x}_* = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_P^+ \\ \cdots \\ \mathbf{x}_P^- \end{bmatrix},$$

I fiind matricea de identitate.
Este evident că

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_e + \mathbf{N}\mathbf{x}_*.$$

Corespunzător eforturilor secţionale **X**, se definesc pentru fiecare element m trei eforturi capabile X_P, fiecare fiind reprezentat de perechea pozitivă X_P^+, X_P^-.

Dacă $\mathbf{X}_0$ este starea de eforturi în poziţia S_0, atunci o condiţie de admisibilitate statică este ca în fiecare secţiune

$$(X_0 + X) \leqslant X_P^+, \; (X_0 + X) \leqslant X_P^-. \tag{12 a,b}$$

Notînd

$$X_*^+ = X_P^+ - X_0, \quad X_*^- = X_P^- - X_0, \tag{13}$$

condiţia (12) devine

$$-X_*^- \geqslant X \leqslant X_*^+. \tag{14}$$

Introducînd potenţialul plastic Φ [4] al unei secţiuni,

$$\Phi^+ = X - X_*^+; \; \Phi^- = X - X_*^- \tag{15}$$

şi scriind condiţia de admisibilitate statică (14) pentru toate secţiunile, se obţine

$$\mathbf{\Phi}_* \leqslant \mathbf{0}, \tag{16}$$

unde

$$\mathbf{\Phi}_* = \mathbf{N}^T\mathbf{X} - \mathbf{X}_*. \tag{17}$$

Este evident că în fiecare secţiune mărimile cinematice x_P se pot asocia cu cele statice Φ, astfel

$$\Phi \cdot x_P = 0,$$

ceea ce permite, la nivelul întregii structuri, obţinerea unei relaţii plastic-constitutive în forma

$$\mathbf{\Phi}_*^T\mathbf{x}_* = \mathbf{0}. \tag{18}$$

Se pot acum sintetiza trei grupuri de relaţii vectoriale fundamentale în analiza elastoplastică geometric neliniară a structurilor :

— relații de admisibilitate statică :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T\mathbf{X};\ \boldsymbol{\Phi}_* \leqslant 0;\ \boldsymbol{\Phi}_* = \mathbf{N}^T\mathbf{X} - \mathbf{X}_*, \tag{19 a}$$

— relații de admisibilitate cinematică :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{q};\ \mathbf{x}_* \geqslant \mathbf{0};\ \mathbf{x} = \mathbf{x}_e + \mathbf{N}\mathbf{x}_*, \tag{19 b}$$

— relații constitutive :

$$\mathbf{X} = \mathbf{K}\mathbf{x}_e,\ \Phi_T^*\mathbf{x}_* = 0. \tag{19 c}$$

4. FORMULAREA ÎN PROGRAMARE MATEMATICĂ

Relațiile vectoriale fundamentale (19) pot fi astfel grupate încît să reprezinte condițiile de optimalitate Kuhn-Tucker ale soluției unui program matematic neliniar de forma

$$\operatorname{Min} f(u) \tag{20}$$

$$\text{astfel ca } g(u) \leqslant 0.$$

Condițiile Kuhn-Tucker ale programului (20) se scriu

$$\left.\frac{\partial f(u)}{\partial u}\right|_{u_0} + \lambda_0 \left.\frac{\partial g(u)}{\partial u}\right|_{u_0} = 0, \tag{21 a}$$

$$\lambda_0 g(u_0) = 0;\ g(u_0) \leqslant 0;\ \lambda_0 \geqslant 0. \tag{21 b,c,d}$$

Dacă $f(u)$ și $g(u)$ sînt funcții convexe, perechea (u_0, λ_0) care satisface condițiile (21) este soluția optimă a programului (20) [5].

4.1. FORMULAREA IN ENERGIE POTENȚIALĂ TOTALĂ

Relațiile (19) pot fi aranjate în forma :

$$\mathbf{K}\mathbf{x}_e - \mathbf{I}\mathbf{X} = \mathbf{0};\ \mathbf{X}_* - \mathbf{N}^T\mathbf{X} + \mathbf{I}\boldsymbol{\Phi}_* = \mathbf{0}, -\mathbf{Q} + \mathbf{A}^T\mathbf{X} = \mathbf{0};$$
$$-\mathbf{x}_e - \mathbf{N}\mathbf{x}_* + \mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \tag{22 a}$$

$$-\mathbf{x}_* \leqslant \mathbf{0};\ \boldsymbol{\Phi}_T^*\mathbf{x}_* = 0;\ -\boldsymbol{\Phi}_* \geqslant 0. \tag{22 b,c,d}$$

Considerînd că unui anumit nivel de încărcare îi corespunde o formă deformată a structurii definită de $\mathbf{q}_0$ și avînd starea de eforturi $\mathbf{X}_0$ se poate constitui matricea $\mathbf{A}$ corespunzătoare vectorului cumulant $\mathbf{q}_0$, ceea ce face ca relația de compatibilitate cinematică (6) să fie liniară în $\mathbf{q}$. Astfel

că relațiile (22 b) sînt liniare în variabilele $\mathbf{x}_e$, $\mathbf{x}_*$ și $\mathbf{q}$ deci convexe și privind pe $\mathbf{X}$ și $\mathbf{\Phi}^*$ ca multiplicatorii lui Lagrange și observînd că matricea hessian a funcției obiectiv este matricea de rigiditate neasamblată a structurii deci funcția obiectiv este convexă, soluția care verifică (22) este soluția optimă a programului

$$\text{Min } f(\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_*, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}_e^T\mathbf{K}\mathbf{x}_e + \mathbf{x}_*^T\mathbf{X}_* - \mathbf{q}^T\mathbf{Q},$$

astfel ca $-\mathbf{x}_e - \mathbf{N}\mathbf{x}_* + \mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad -\mathbf{x}_* \leqslant \mathbf{0}.$ (23)

4.2. FORMULAREA IN ENERGIE DE DEFORMAȚIE COMPLEMENTARĂ

Aranjînd relațiile (19) în forma

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{N}\mathbf{x}_* - \mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \tag{24 a}$$

$$\mathbf{N}^T\mathbf{X} - \mathbf{X}_* \leqslant \mathbf{0}; \quad -\mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \tag{24 b}$$

$$\mathbf{x}_*^T[\mathbf{N}^T\mathbf{X} - \mathbf{X}_*] = 0; \quad \mathbf{x}_* \geqslant 0, \tag{24 c}$$

în care $\mathbf{x}_*$ și $\mathbf{q}$ sînt multiplicatorii lui Lagrange și observînd liniaritatea lor în variabila $\mathbf{X}$, soluția relațiilor (24) este soluția optimă a programului

$$\text{Min } z(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{K}^{-1}\mathbf{X}, \tag{25}$$

astfel ca $\mathbf{N}^T\mathbf{X} - \mathbf{X}_* \leqslant \mathbf{0}, \quad -\mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}.$

5. INTERPRETĂRI VARIAȚIONALE

Observînd că funcția obiectiv $f(\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_*, \mathbf{q})$ a programului (23) este suma energiei de deformație

$$E = \frac{1}{2}\mathbf{x}_e^T\mathbf{K}\mathbf{x}_e,$$

a energiei disipate prin deformații plastice

$$D = \mathbf{x}_*^T\mathbf{X}_*$$

și a lucrului mecanic al forțelor aplicate

$$W = \mathbf{q}^T\mathbf{Q},$$

luat cu semn schimbat, că restricțiile sînt condițiile de admisibilitate cinematică și avînd în vedere aspectul de creșteri ale variabilelor, programului (23) i se poate da următoarea interpretare variațională:

Dintre toate configurațiile cinematice admisibile, inițiate de la o configurație deformată, ale unei structuri, configurația reală corespunde unui minim în variația energiei potențiale totale.

Funcția obiectiv a programului (25) este energia de deformație complementară

$$E^* = \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{X},$$

iar restricțiile sînt condițiile de admisibilitate statică, astfel că programului (25) i se poate da următoarea interpretare variațională:

Dintre toate stările de eforturi static admisibile datorate unei creșteri în încărcarea exterioară, starea reală corespunde unui minim în variația energiei de deformație complementare.

6. CONCLUZII

Interpretarea programului (23) este o generalizare pentru cazul analizei geometric neliniare a principiului lui Kachanov-Hodge și în același timp o particularizare a acestuia pentru cazul analizei incrementale.

Interpretarea variațională a programului (25) este o generalizare în domeniul elastoplastic geometric neliniar a principiului Menabrea-Crotti, de minimum al energiei de deformație complementare și în același timp o particularizare a acestuia pentru cazul aplicării incrementale a acestei analize.

Primită la redacție la 5 martie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. P. ALEXA, *The Analysis of Geometrically Non-linear Elasto-Plastic Frames by Mathematical Programming*, Ph. D. Thesis, University of London, 1976.
2. J. MUNRO, *The Stress Analysis and Topology of Skeletal Structures*, Rep. CSTR 14, Imperial College of Science and Technology, London, 1965.
3. B. A. AKESSON, *Non-linear Structures, the Maxwell-Mohr Work Theorem and the Dasplacement Method*, Transactions of Chalmers University of Technology, Gothenburg, 1967.
4. G. MAIER, *Quadratic Programming and Theory of Elastic Perfectly Plastic Structures*, Meccanica, *3*, 265, (1968).
5. O. L. MANGASARIAN, *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill Book Company, N.Y., 1969.

ANALIZA STATICĂ ŞI DINAMICĂ A UNEI PALETE DE VENTILATOR AXIAL CU AJUTORUL METODEI ELEMENTULUI FINIT

de ADALBERT NAHLIK
I.C.S.I.T.E.E.M.R. Bucureşti

Ruperea unor palete rotorice de ventilator axial a impus o analiză statică şi dinamică amănunţită a paletelor. Această analiză, efectuată cu ajutorul metodei elementului finit şi pe cale experimentală, a condus la o soluţie constructivă nouă, la care nivelul de tensiuni s-a redus simţitor şi care nu prezintă pericol de rezonanţă în privinţa excitaţiei statorice şi a celei rotorice.

1. INTRODUCERE

Ruperea paletelor rotorice ale unui ventilator axial de gaze de ardere a pus problema unei verificări amănunţite ale acestora din punctul de vedere al rezistenţei şi al vibraţiilor.

Ventilatorul în discuţie are un debit de $1{,}5 \cdot 10^6$ m^3/oră, funcţionează la turaţia nominală de $n = 1\,000$ min^{-1}, la temperatura maximă de 150°C şi are două trepte identice. Profilul paletei este generat de arce de cerc de rază constantă pe înălţime, mijloacele arcelor de cerc formează o dreaptă radială, iar centrele acestor arce de cerc se deplasează pe un alt arc de cerc. Cele 16 bucăţi de paletă sînt sudate pe un cilindru cu diametrul exterior de Ø 2150 mm şi o grosime de 40 mm. În interiorul cilindrului, la mijloc este sudat un disc gros, prins de flanşa arborelui ventilatorului. Pe o parte şi alta a discului sînt prevăzute cîte şase plăci triunghiulare de rigidizare acoperite cu cîte o tablă, realizîndu-se astfel o construcţie rigidizată tip cheson.

Varianta iniţială a paletei (denumită în continuare varianta A) avea grosimea constantă de 15 mm. Ruperile au pornit dinspre bordul de atac pe intrados şi au urmărit linia de încastrare a paletei. Deşi calculele de rezistenţă de rutină au indicat un nivel de solicitare relativ redus (circa 900 daN/cm^2), ruperile au avut loc în modul descris mai sus, impunînd căutarea şi eliminarea cauzelor acestora.

2. ANALIZA STATICĂ

2.1 IPOTEZE DE CALCUL

Calculul static şi dinamic a fost elaborat cu ajutorul metodei elementului finit, utilizarea căreia a luat în ultimul timp o amploare deosebită din cauza avantajelor certe pe care le prezintă. La calcul s-au utilizat elemente tridimensionale izoparametrice cu 16 noduri, elementele reprezentînd medii ortotrope, elastice. Nodurile dispun de cîte trei grade de libertate de translaţie, în total deci un element are $16 \times 3 = 48$ grade de libertate.

Paleta este încadrată într-un sistem global de axe rectangulare $OXYZ$. Axa OY coincide cu axa de rotaţie, iar axa OZ trece prin mijlocul paletei. Paleta este reprezentată în vedere izometrică în figura 1, unde (şi la toate reprezentările ulterioare) în mod convenţional originea sistemului de axe este translatată în punctul în care dreapta radială a

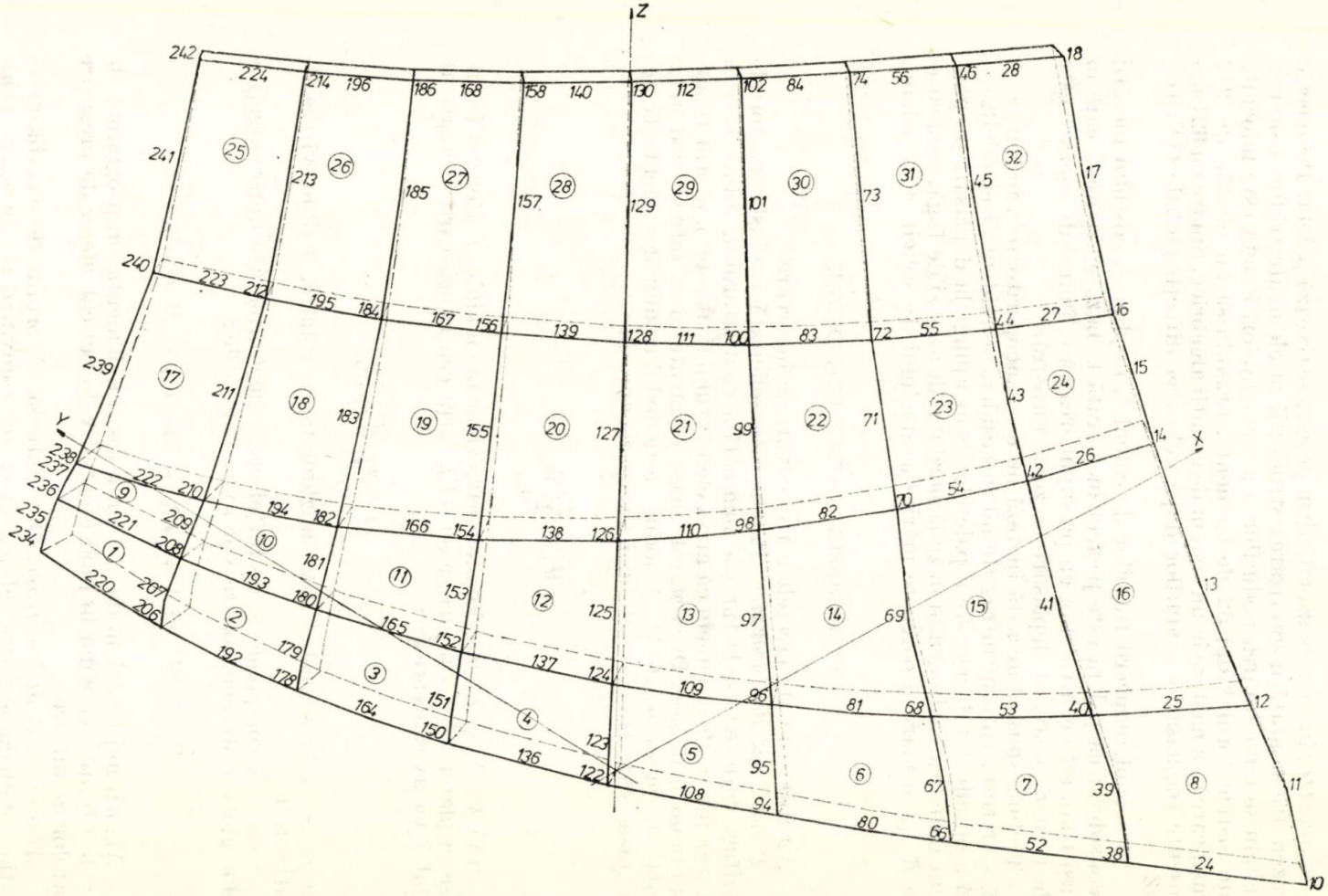


Fig. 1. — Repezentarea paletei discretizate (varianta B) în vedere izometrică.

paletei (axa OZ) intersectează cilindrul pe care se fixează paleta. Pe aceeași reprezentare se arată discretizarea structurii în elemente tridimensionale indicîndu-se numerotarea nodurilor și a elementelor. Paleta este înlocuită cu un sistem format din 32 de elemente, creîndu-se un număr de 242 noduri, care dau naștere la un sistem de ecuații algebrice, liniare cu 624 necunoscute (deplasările nodurilor după cele trei direcții globale OX, OY și OZ).

În scopul reducerii timpilor de calcul și implicit a costului lucrării s-a considerat că paleta este perfect încastrată la baza ei, ipoteză care în același timp este echivalentă cu presupunerea că cilindrul de așezare este perfect rigid, neavînd deplasări în zona încastrării.

Trebuie spus că această ipoteză nu este „acoperitoare", în sensul că dacă s-ar trata rotorul întreg (luînd în cosiderare evident și elasticitatea reală a cilindrului de așezare a paletelor) s-ar ajunge la deplasări preponderent radiale ale cilindrului în zona bordului de atac și de fugă, ceea ce ar avea drept urmare o oarecare mărire a nivelului de solicitare a paletei.

2.2. SOLICITĂRILE LUATE IN CONSIDERAȚIE

Au fost studiate eîectele a trei cazuri de încărcare.

Primul caz de încărcare. Paleta este solicitată exclusiv de forțele centrifuge care se nasc la turația nominală a ventilatorului, adică la $n = 1\,000\ \text{min}^{-1}$. Presupunem că masa elementului finit este uniform repartizată în nodurile sale. Dacă m_x este masa elementului x, într-un nod al lui va acționa masa $m_x/16$. Dacă nodul i este nodul comun al n elemente vecine, masa care revine nodului i va avea expresia :

$$M_i = \sum_{x=1}^{n} m_x/16.$$

Fie X_i, Y_i și Z_i coordonatele carteziene ale nodului i. Rotirea făcîndu-se în planul ZOX (în jurul axei OY), forța centrifugă care va apare în nodul i va avea expresia :

$$F_i = M_i\, \omega^2 \sqrt{Z_i^2 + X_i^2},$$

unde $\omega = \pi n/30\ \text{s}^{-1}$ este viteza unghiulară de rotație, n fiind viteza de rotație în min^{-1}.

Cele trei componente ale forței centrifuge orientate după direcțiile axelor globale de coordonate vor avea expresiile :

$$F_{ix} = M_i\, \omega^2 X_i; \quad F_{iy} = 0; \quad F_{iz} = M_i\, \omega^2 Z_i.$$

Algoritmul de calcul de mai sus a fost implementat în programul de elemente finite, reducînd în mod esențial volumul calculelor de pregătire a datelor de intrare.

Al doilea caz de încărcare. Din puterea absorbită de ventilator la turația nominală se poate calcula în prima aproximație o presiune echi-

valentă, constantă pe toată suprafaţa proiecţiei paletei pe planul *YOZ*. Această presiune acţionează pe intradosul paletei, solicitînd-o la încovoiere.

Al treilea caz de încărcare. În realitate, încovoierea paletei datorită apăsării gazelor antrenate este condiţionată de solicitarea ei datorită forţelor centrifuge. Al treilea caz de încărcare reprezintă deci solicitările simultane date de cazurile unu şi doi.

2.3. REZULTATELE ANALIZEI STATICE

Pentru început a fost studiată varianta A de paletă, cu grosime constantă de 15 mm. Volumul mare al informaţiilor obţinute (deplasările nodurilor structurii după cele trei axe de coordonate globale, cîte şase componente de tensiuni în centrul elementelor şi în mijlocul fiecărei feţe ale lor împreună cu tensiunile echivalente corespunzătoare, conform ipotezei Mises) nu permite redarea lor amănunţită. Din această cauză ne vom limita la cîteva observaţii şi rezultate mai importante.

În timpul rotaţiei paleta are o tendinţă de dezrăsucire (îndreptare) din cauză că forţele centrifuge creează un moment încovoietor faţă de conturul bazei. Acest moment de redresare ar fi egal şi de semn contrar pentru cele două jumătăţi ale paletei (provocînd o rotaţie identică a fiecărei secţiuni consecutive în jurul dreptei radiale de simetrie) dacă planul *YOZ* ar reprezenta un plan de simetrie pentru paletă. Deoarece o astfel de configuraţie simetrică nu poate fi realizată din motive aerodinamice, dezrăsucirea va fi întotdeauna asimetrică, din care cauză ne pute m aştepta la un nivel mai ridicat de tensiuni în zona momentelor de dezrăsucire mai mari.

Se poate demonstra că în cazul paletei studiate momentul de dezrăsucire care acţionează asupra jumătăţii ei cuprinse în cadranul IV al sistemului de axe *XOY* este cu circa 10% mai mare decît cel care acţionează asupra celeilalte jumătăţi.

Aceste considerente s-au verificat în întregime prin rezultatele calculelor cu metoda elementelor finite. În figura 2 se arată deplasarea paletei în planul *XOY* sub acţiunea forţei centrifuge în diferite secţiuni (scara deplasărilor este reprezentată în figură). Conturul *a* reprezintă secţiunea paletei la $z = 1150$ mm (la 75 mm de la bază) înainte, iar conturul *b* — după deformare. Conturul *d* reflectă imaginea deplasată a virfului paletei (a conturului *c*). Deplasarea, într-adevăr maximă, a vîrfului paletei atinge 10,64 mm în planul *XOY*, deplasarea radială în acelaşi punct fiind de 1,25 m.

Repartiţia tensiunilor în paletă este arătată în figurile 3*a* şi *b*. În figura 3*a* este reprezentată epura spaţială a tensiunilor echivalente în mijlocul feţelor elementelor finite care formează intradosul paletei desfăşurate, pentru al treilea caz de încărcare (forţe centrifuge şi încovoierea dată de presiunea gazelor).

În concordanţă cu cele afirmate anterior, porţiunea cea mai solicitată este zona de admisie, la baza paletei. Într-adevăr, pe „intradosul" elementului 1 (vezi şi fig. 1) tensiunea echivalentă maximă atinge valoarea $\sigma_{ech,max} = 3449$ daN/cm², valoare care depăşeşte limita de curgere a

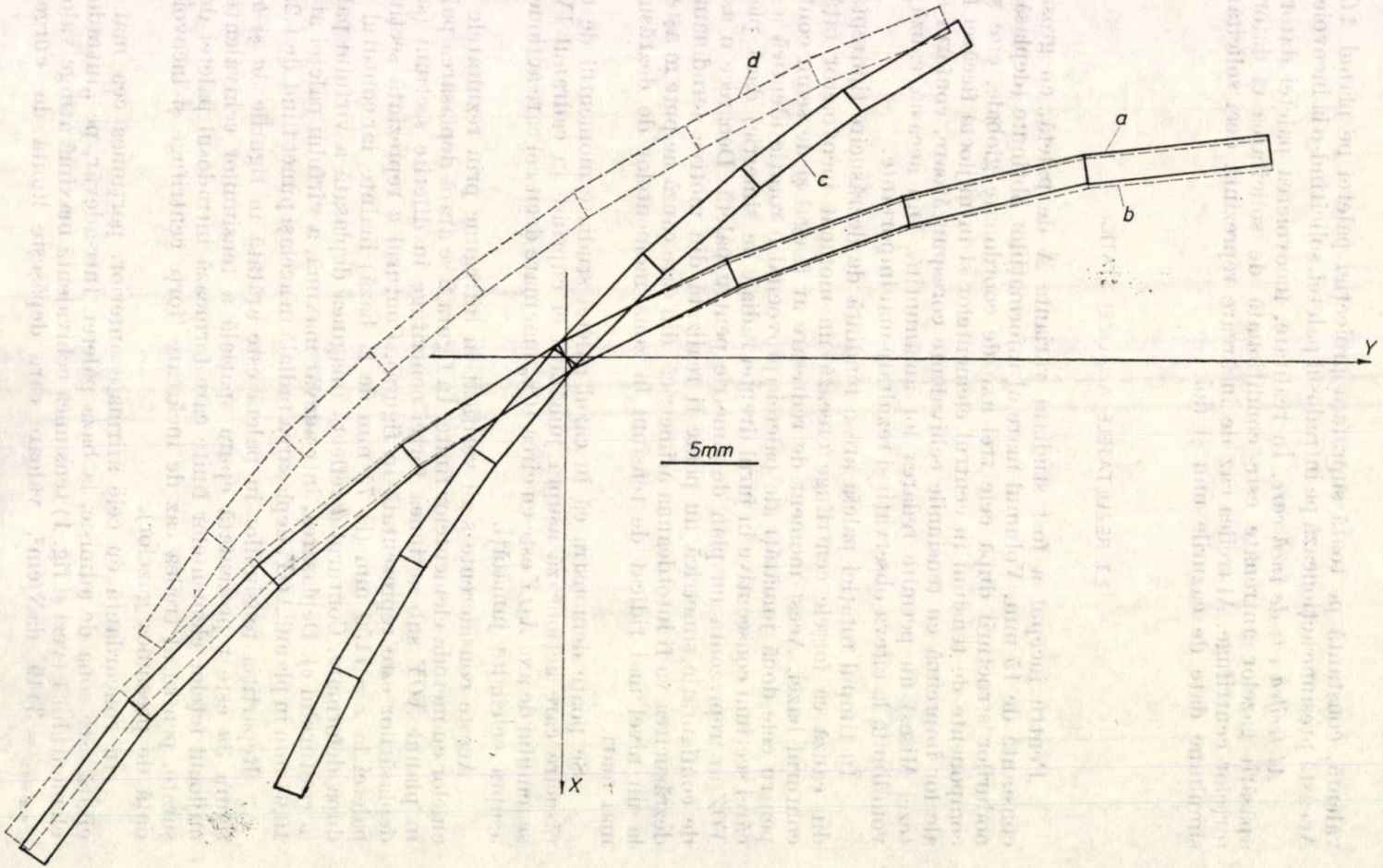


Fig. 2. — Deplasarea paletei (varianta A) sub influența forței centrifuge

oţelului utilizat (OL42.3K cu $R_c = 2550$ dan/cm²).Dacă luăm în consideraţie că la baza paletei în dreptul cordonului de sudură tensiunile sînt şi mai mari din cauza concentratorilor de tensiune şi că această tensiune include şi o componentă dinamică de $\sigma_{ech.din} = 312$ daN/cm² (al doilea caz de încărcare), cazurile de rupere pot fi explicate în mod convigător.

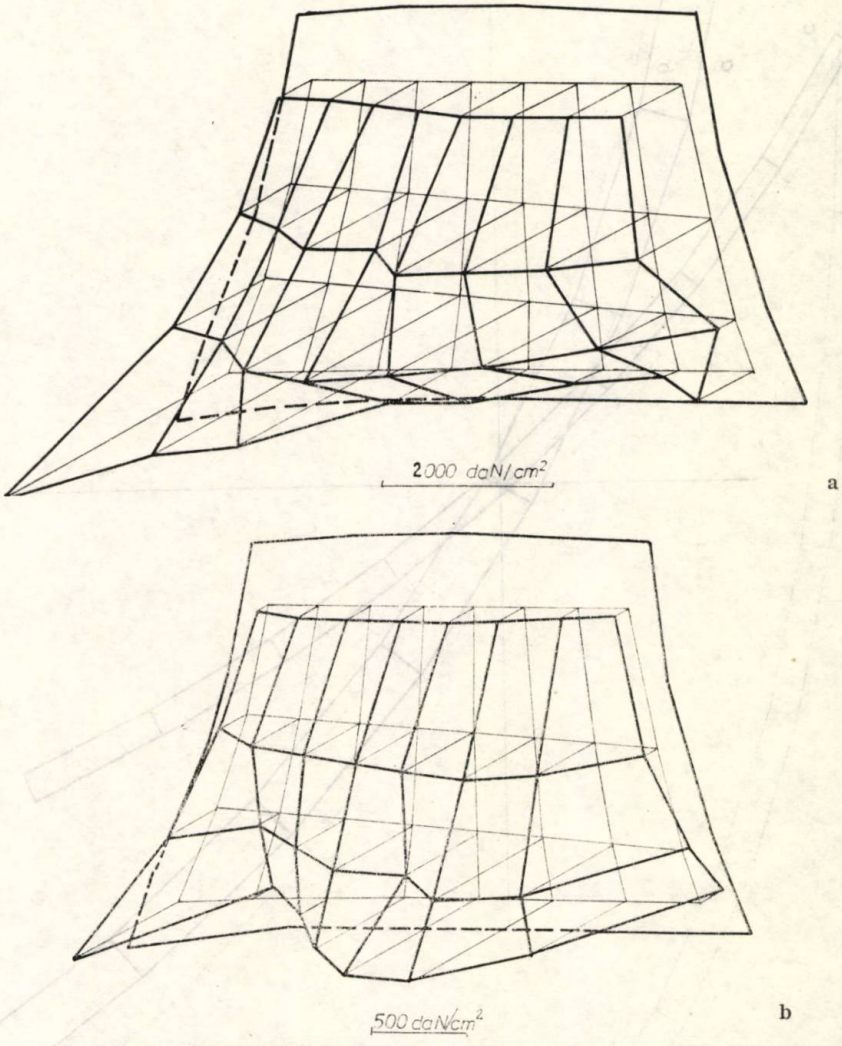


Fig. 3. – Distribuţia tensiunilor în paleta, varianta A: *a* – tensiuni echivalente pe intrados, solicitare prin forţe centrifuge şi încovoiere; *b* – tensiuni normale, radiale în centrul elementelor finite, solicitare prin forţe centrifuge.

În calculele obişnuite se presupune că la o paletă în rotaţie (răsucită sau dreaptă), într-o secţiune transversală oarecare, tensiunile normale, radiale au valori constante. În realitate însă, cu cît raportul dintre lungimea şi grosimea unei secţiuni este mai mare, cu atît această ipoteză

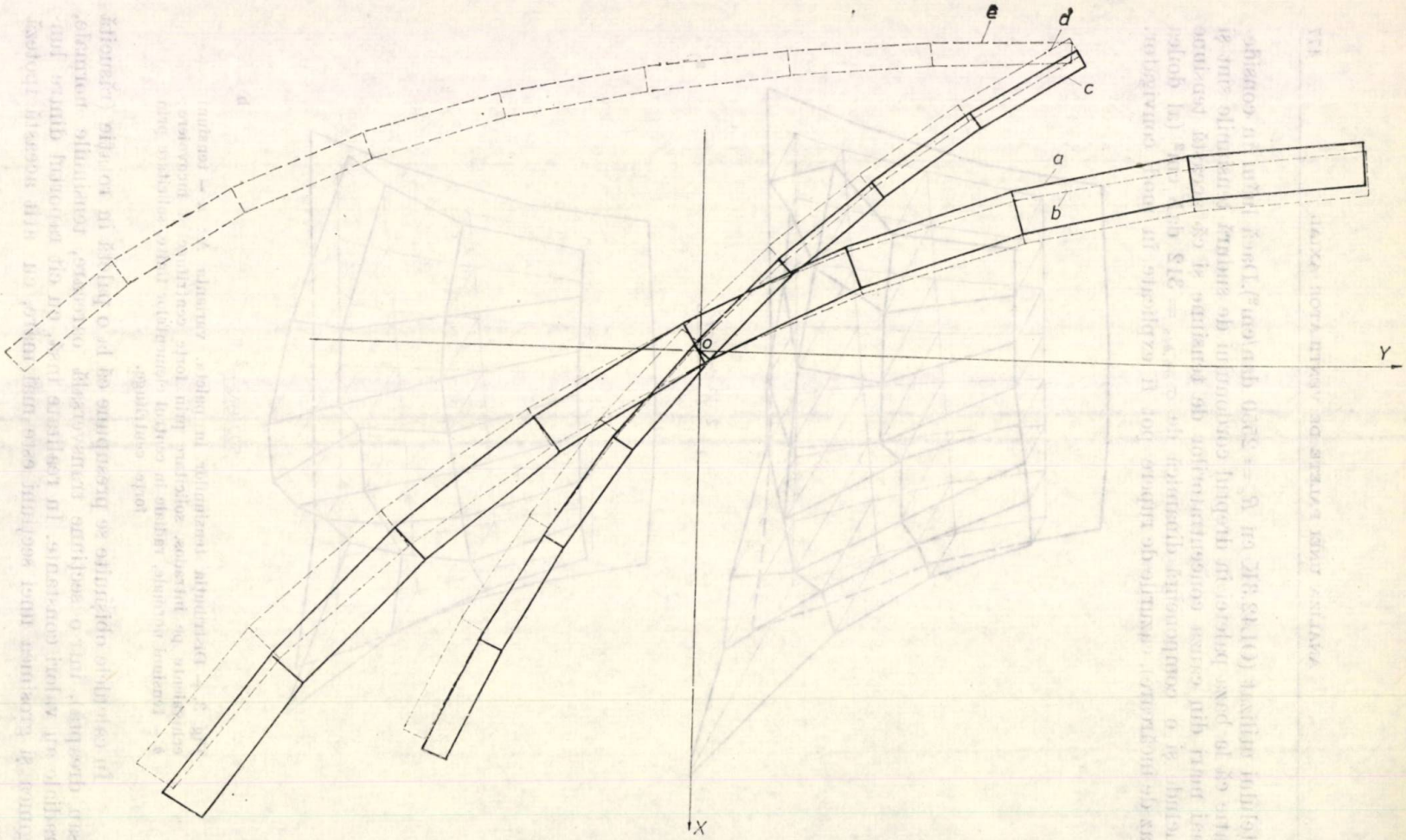


Fig. 4. — Deplasarea paletei (varianta B) sub influența solicitărilor.

conduce la erori mai mari. Drept ilustrare a acestei afirmații redăm în figura 3*b* epura tensiunilor normale, radiale calculate în centrele elementelor finite, pentru cazul de încărcare numărul unu.

În scopul reducerii nivelului de tensiuni și a evitării ruperilor de paletă s-a ales o variantă nouă a acesteia. Această variantă (denumită în continuare varianta B) diferă de cea inițială numai prin aceea că o zonă întinsă de la baza paletei este îngroșată de la 15 mm la 25 mm. Înălțimea îngroșării pe bordul de atac este de 230 mm, ea scade liniar spre bordul de fugă unde ajunge la înălțimea de 125 mm. Începînd cu această linie înclinată grosimea de 25 mm se micșorează treptat, astfel încît grosimea minimă în dreptul bordului de fugă (pe vîrful paletei) să fie de 10 mm. Varianta B a fost executată din OL52.3KF cu $\sigma_c = 3530$ da/Ncm^2.

Toate calculele descrise mai sus pentru varianta A au fost repetate și pentru varianta B, în condiții identice de solicitare și în aceleași ipoteze de calcul. Figura 4 reflectă deplasarea variantei B de paletă în următoarele situații:

Conturul *a*, la înălțimea $z = 1150$ mm, deplasat sub acțiunea forțelor centrifuge, ajunge în poziția *b*. Vîrful paletei (contur *c*) se deplasează sub acțiunea forțelor centrifuge în *e*, iar sub acțiunea presiunii gazelor — în *d*. Se remarcă că deplasarea vîrfului în planul *XOY* reprezintă 3,1 mm, valoare mult redusă față de 10,64 mm găsită la varianta A.

În continuare s-au reprezentat epurile de tensiune pentru aceleași cazuri de încărcare și componente ca și pentru varianta A (fig. 5*a* și *b*). Astfel, tensiunea echivalentă maximă pentru al treilea caz de încărcare apare în același loc ca la varianta A (elementul 1). Această valoare maximă însă $\sigma_{ech,max} = 1475$ daN/cm^2 este mult mai mică decît la varianta A, componenta dinamică corespunzătoare (al doilea caz de încărcare) fiind de numai $\sigma_{ech.din} = 82{,}2$ daN/cm^2.

Acest nivel de solicitare poate fi considerat acceptabil dacă componentă dinamică nu are o frecvență de apariție care să facă posibil fenomenul de rezonanță. În acest sens s-a considerat necesară efectuarea și a unei analize dinamice a comportării paletei.

3. ANALIZA DINAMICĂ

Înainte de determinarea spectrului de frecvențe proprii să stabilim valorile frecvențelor de excitație cu caracter mecanic. Excitația statorică apare din cauza aparatului de reglaj format din $z = 24$ palete directoare, cu frecvența $n \cdot z/60 = 400$ s^{-1}. Frecvența de excitație rotorică este un multiplu al frecvenței de rotație: $K \cdot n/60$.

Pentru a stabili frecvențele primelor moduri de vibrație pe cale experimentală, s-a realizat un montaj experimental reprezentat pe schema bloc din figura 6. Paleta ventilatorului a fost excitată cu ajutorul unui excitator electrodinamic (1), alimentat prin amplificatorul (2) de la un generator de semnale sinusoidale (3) care comanda în același timp și deflecția ver-

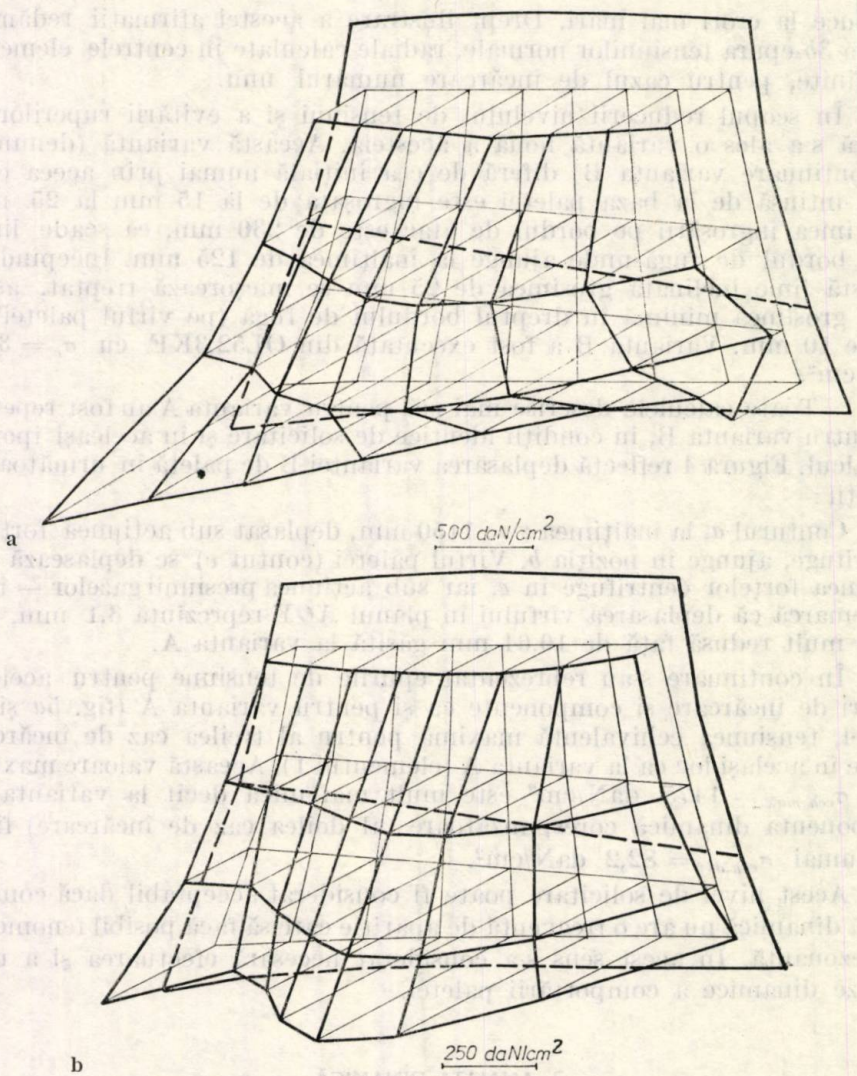


Fig. 5. — Distribuția tensiunilor în paleta, varianta B : *a* și *b* ca la figura 3.

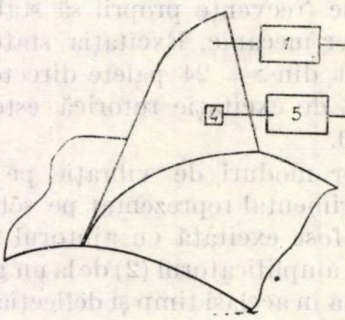
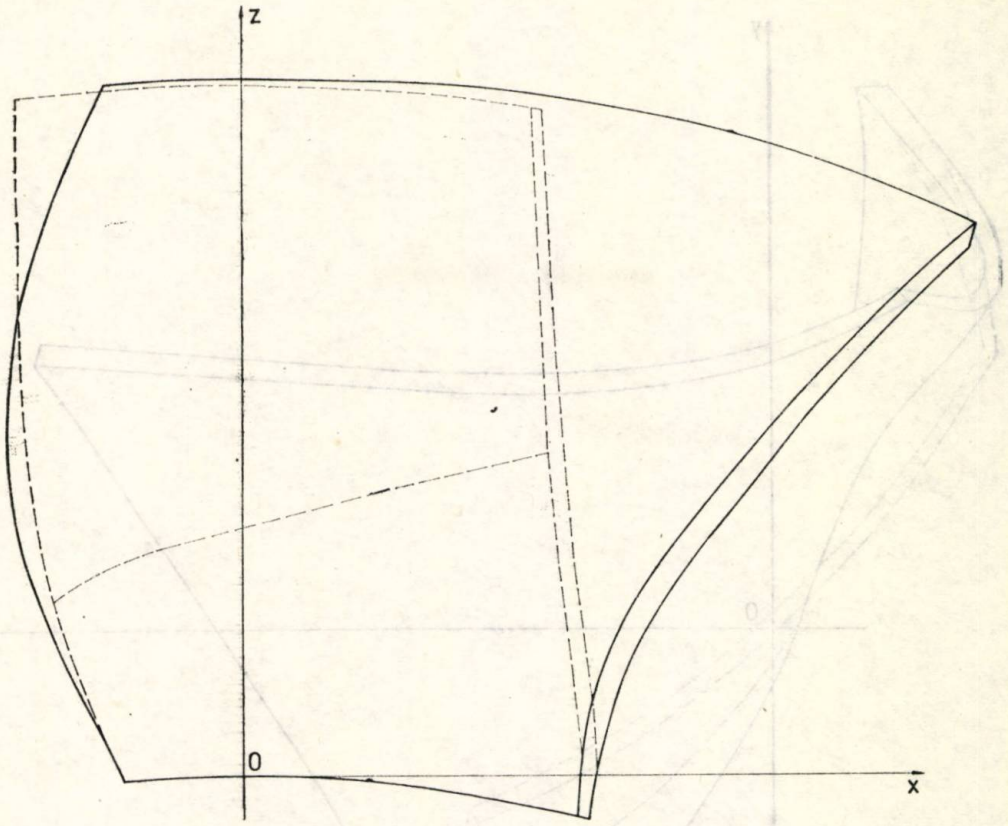


Fig. 6. — Schema bloc a montajului experimental pentru determinarea frecvențelor proprii de vibrație a paletei.



Varianta A

Fig. 7. — Forma deformată a paletei în cazul modului de vibrație de ordinul unu.

ticală a osciloscopului (7). Deflecția orizontală a fost asigurată de semnalele de tensiune obținute prin lanțul de răspuns : traductor piezo-electric (4) fixat pe paletă, amplificator de măsură (5) și filtru-analizor (6). Din analiza figurilor Lissajous de pe ecranul osciloscopului au putut fi identificate următoarele moduri de vibrație.

Primul mod propriu a fost găsit ca o vibrație de încovoiere, fără linii nodale (forma A_0 conform clasificării uzuale în construcția paletelor rotorice de turbină cu abur), la frecvența de $f_1 = 125{,}7\ s^{-1}$. Următoarea frecvență proprie a fost $f_2 = 286{,}5\ s^{-1}$, care după linia nodală identificată a fost asociată primului mod propriu de vibrație torsională. Modul propriu de vibrație de ordinul trei cu $f_3 = 534{,}7\ s^{-1}$ se caracterizează prin două linii nodale aproximativ radiale (a doua formă de vibrație torsională).

În legătură cu calculul dinamic al paletei cu ajutorul metodei elementului finit, reamintim că matricea globală de rigiditate $[K]$ a unei structuri fiind deja constituită cu ocazia analizei statice, problema valorilor proprii și a vectorilor proprii poate fi rezolvată prin constituirea și rezolvarea unui sistem de ecuații de forma :

$$[K] \cdot [\delta] + [M] \cdot [\ddot{\delta}] = 0,$$

unde $[M]$ este matricea globală a maselor, $[\delta]$ este matricea deplasărilor.

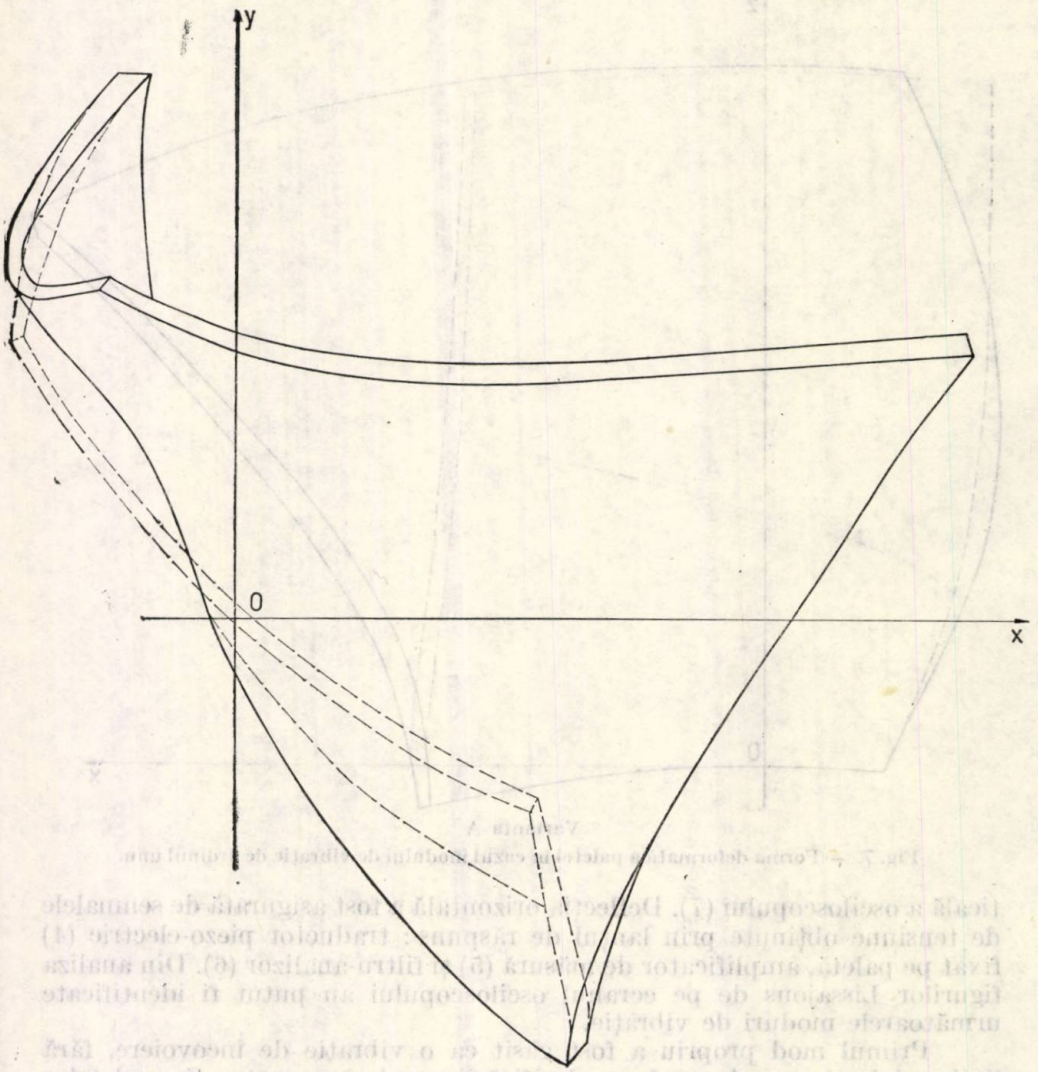


Fig. 7 (Varianta B)

Procedînd în acest mod am găsit următoarele frecvenţe proprii: $f_1 = 131{,}4\ s^{-1}$ şi $f_2 = 330{,}1\ s^{-1}$, valori care diferă cu 4,53%, respectiv 15,2% faţă de valorile experimentale corespunzătoare. Folosindu-ne de valorile vectorilor proprii în nodurile structurii au fost reprezentate pentru primele două moduri de vibraţie imaginile structurii. Figura 7 reflectă o vibraţie transversală de tipul A_0, iar figura 8 primul mod de vibraţie torsională, la care poziţia liniei nodale (vectori proprii nuli) este foarte apropiată de cea stabilită experimental.

Diferenţele de 4,53% respectiv 15,2% a valorilor calculate faţă de valorile experimentale certe nu indică existenţa unor deficienţe în metodologia de rezolvare. Într-adevăr, avînd în vedere masa relativ mare a

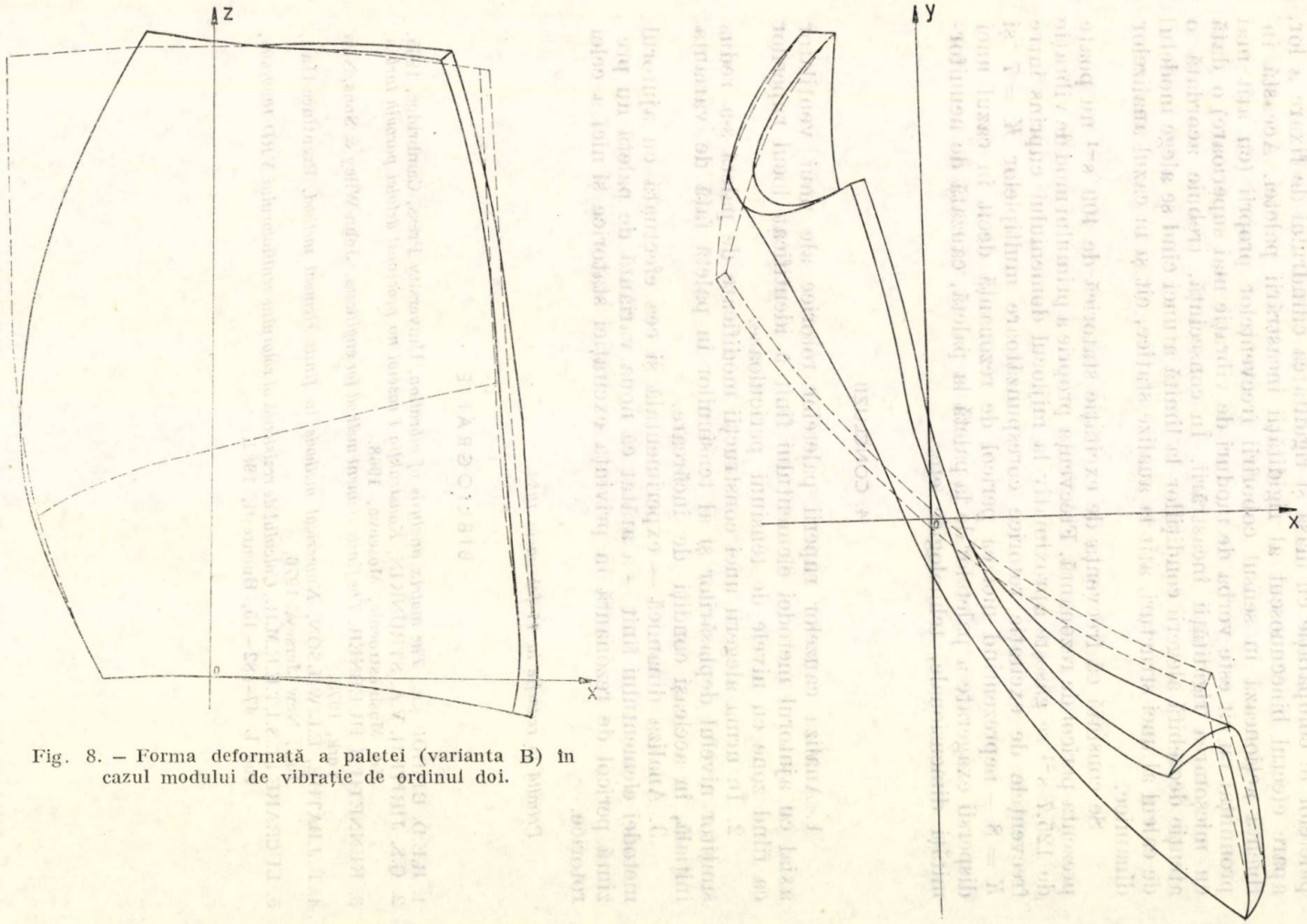


Fig. 8. – Forma deformată a paletei (varianta B) în cazul modului de vibrație de ordinul doi.

paletelor în comparație cu masa și rigiditatea cilindrului de fixare a lor, apare efectul binecunoscut al rigidității încastrării paletei. Această influență acționează în sensul coborîrii frecvențelor proprii (cu atît mai pronunțat cu cît este vorba de moduri de vibrație mai superioare) o dată cu micșorarea rigidității încastrării. În consecință, trebuie acordată o atenție deosebită alegerii condițiilor la limită atunci cînd se alege modelul de calcul al unei structuri, atît la analize statice, cît și în cazul analizelor dinamice.

Se constată că frecvența de excitație statorică de 400 s^{-1} nu poate prezenta pericol de rezonanță. Frecvența proprie a primului mod de vibrație de 125,7 s^{-1} se găsește aproximativ la mijlocul domeniului cuprins între frecvențele de excitație rotorice corespunzătoare multiplelor $K = 7$ și $K = 8$ — neprezentînd nici ea pericol de rezonanță decît în cazul unei dispersii exagerate a paletelor de la paletă la paletă, cauzată de neuniformități dimensionale, tehnologice etc.

4. CONCLUZII

1. Analiza cauzelor ruperii paletelor rotorice ale unui ventilator axial cu ajutorul metodei elementului finit a identificat locul ruperilor ca fiind zone cu nivele de tensiuni periculoase.

2. În urma alegerii unei construcții modificate de paletă s-a redus simțitor nivelul deplasărilor și al tensiunilor în paletă față de varianta inițială, în aceleași condiți de încărcare.

3. Analiza dinamică — experimentală și cea efectuată cu ajutorul metodei elementului finit — a arătat că noua variantă de paletă nu prezintă pericol de rezonanță în privința excitației statorice și nici a celei rotorice.

Primită la redacție la 17 februarie 1983

BIBLIOGRAFIE

1. R.E.D. BISHOP ș.a., *The matrix analysis of vibration*, University Press, Cambridge, 1965.
2. G.S. JIRITKII, V.A. STRUNKIN, *Konstrukția i rasciot na procinost detalei parovîh turbin*, Ed. Mașinostroenie, Moscova, 1968.
3. KENNETH H. HUEBNER, *The finite element method for engineers*, John Wiley & Sons, New York, 1975.
4. K.J.BATHE, E.L.WILSON, *Numerical methods in finite element method*, Prentince-Hall, Inc., New Jersey, 1976.
5. LUCRARE I.C.S.I.T.E.E.M.R., *Calculul de rezistență al rotorului ventilatorului VRD 1000/600*, cod L 47—82—15, București, 1982.

O NOUĂ CORELAȚIE A FACTORULUI DE FRECARE LA CURGEREA AMESTECURILOR BIFAZICE ÎN COLOANA ȚEVILOR DE EXTRACȚIE DIN SONDELE ERUPTIVE

de VIRGIL GRIGORE
Institutul de petrol și gaze, Ploiești

În lucrare se prezintă o nouă corelație a factorului de frecare la curgerea amestecurilor bifazice prin coloana țevilor de extracție a sondelor eruptive stabilită prin folosirea datelor de producție, a analizelor PVT și a măsurătorilor de presiune și temperatură obținute de la un număr mare de sonde care produceau în erupție naturală și artificială în care, spre deosebire de alte teorii, rația gaze-lichid a fost considerată ca un parametru adițional de corelare. Corelația propusă a fost stabilită între un factor de frecare de tip Fanning și numărătorul numărului Reynolds relativ la amestec, fiind dezvoltată separat pentru șase game de rații gaze-lichid luate în considerație, construindu-se corespunzător acestora tot atîtea curbe de corelare pentru factorul de frecare. Gradienții de pesiune calculați cu ajutorul acestei corelații permit să se construiască curbe de variație a presiunii în lungul coloanelor de extracție foarte apropiate de cele construite prin măsurători directe la sondă, pentru un domeniu larg de variație a debitelor de lichid și a rațiilor gaze-lichid, ceea ce o recomandă pentru a fi utilizată în calculele de proiectare.

1. INTRODUCERE

Studiul ascensiunii amestecurilor bifazice gaze-lichid în coloana țevilor de extracție a sondelor eruptive are drept scop, pe de o parte, abordarea pe baze științifice a fenomenelor caracteristice care guvernează acest proces de curgere iar, pe de altă parte, stabilirea unor corelații pentru calculul gradientului de presiune. În acest sens cercetările efectuate au condus la elaborarea a numeroase teorii și corespunzător a unor metode de calcul a gradientului de presiune, avînd în vedere importanța acestuia în construirea curbelor de variație a presiunii în lungul coloanei țevilor de extracție și implicit în proiectarea regimului tehnologic de funcționare a sondelor în erupție naturală sau artificială.

Determinarea gradientului de presiune constituie însă o problemă destul de dificilă ținînd seama atît de numărul mare de parametri care intervin în calculul acestuia (debitul de lichid, debitul de gaze, caracteristicile fizice ale fluidelor respective, diametrul țevilor de extracție, presiunea la care are loc curgerea etc.), cît și faptul că valorile unor parametri se modifică în timpul curgerii, în lungul coloanei țevilor de extracție, ca urmare a variației presiunii. Astfel, se constată că dacă debitul de lichid variază foarte puțin prin ieșirea gazelor din soluție, pe măsură ce presiunea scade, în schimb debitul de gaze este foarte sensibil la această variație. De asemenea, ca urmare a ieșirii gazelor din soluție țițeiul devine mai viscos modificîndu-se astfel factorul de frecare; în același timp variația presiunii influențează vîscozitatea gazelor și, implicit, frecarea acestora pe pereții coloanei țevilor de extracție.

Pentru soluționarea acestor probleme complexe, au fost efectuate multe studii și experimente utilizîndu-se o gamă foarte variată de metode de cercetare și procedee de calcul, ceea ce a făcut ca în prezent să se dispună de un număr relativ mare de teorii și corelații pentru determinarea gradientului de presiune, mai mult sau mai puțin exacte.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 5, 1983, P. 485–502

Astfel, unele teorii au fost deduse pe cale analitică, în urma unor studii pur teoretice asupra curgerii amestecurilor bifazice, altele deduse tot analitic, însă pe baza prelucrării datelor experimentale sau a celor obținute din practica de șantier, iar altele, deduse numai pe baza interpretării datelor reale de producție de la sondele în erupție naturală și artificială.

În studiile lor unii cercetători consideră pierderile de energie datorită ireversibilităților cuprinse într-un factor total de pierderi propus a fi constant în lungul coloanei de curgere. Alți cercetători dezvoltă teorii care țin seama în mod separat de efectele fenomenelor de alunecare și de frecare, iar alții convin în a împărți condițiile de curgere în modele sau regimuri și propun corelații distincte pentru fiecare regim de curgere în parte.

Toate teoriile stabilite pentru calculul gradientului de presiune au ca bază teoretică de cercetare a proceselor de curgere bilanțul energiilor totale transformate în procesul respectiv sau, mai rar, un bilanț de presiuni.

2. ECUAȚIA GENERALĂ A GRADIENTULUI DE PRESIUNE

Baza teoretică pentru multe ecuații de curgere a fluidelor este ecuația generală a bilanțului de energie, o expresie pentru bilanțul sau conservarea energiei între două puncte oarecare dintr-un anumit sistem de curgere. Această ecuație scrisă pentru unitatea de masă are forma :

$$\int v\mathrm{d}p + \Delta\left(\frac{w^2}{2}\right) + g\Delta h + l_m + F = C \tag{1}$$

sau, în condițiile în care sistemul nu schimbă lucru mecanic cu mediul exterior, $l_m = 0$ și atunci

$$\int v\mathrm{d}p + \Delta\left(\frac{w^2}{2}\right) + g\Delta h + F = C, \tag{2}$$

expresie care reprezintă forma cea mai des utilizată a ecuației generale a bilanțului de energie pentru rezolvarea multor probleme ale curgerii verticale, înclinate sau orizontale.

În relațiile (1) și (2) v este volumul specific al sistemului ; p — presiunea sistemului ; w — viteza sistemului ; h — înălțimea punctului considerat față de un reper dat ; F — pierderile de energie datorită ireversibilității (frecări, lunecări, difuzie etc.) ; g — accelerația gravitațională.

Pentru a stabili expresia ecuației gradientului de presiune în cazul general al curgerii, se scrie ecuația (2) sub formă diferențială :

$$v\mathrm{d}p + w\mathrm{d}w + g\mathrm{d}h + \mathrm{d}F = 0 \tag{3}$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho} + w\mathrm{d}w + g\mathrm{d}h + \mathrm{d}F = 0. \tag{4}$$

Dacă se consideră o conductă înclinată la un unghi θ față de orizontală, ca în figura 1, deoarece $\mathrm{d}h = \sin\theta\,\mathrm{d}l$, ecuația (4) devine :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho} + w\mathrm{d}w + g\sin\theta\,\mathrm{d}l + \mathrm{d}F = 0. \tag{5}$$

Multiplicînd ecuaţia (5) cu ρ/dl, se obţine

$$\frac{dp}{dl} + \frac{\rho w dw}{dl} + \rho g \sin\theta + \frac{\rho dF}{dl} = 0. \tag{6}$$

Această ecuaţie poate fi rezolvată pentru gradientul de presiune, şi dacă se consideră o cădere de presiune pozitivă în direcţia de curgere, atunci

$$\frac{dp}{dl} = \rho g \sin\theta + \frac{\rho dF}{dl} + \rho w \frac{dw}{dl}. \tag{7}$$

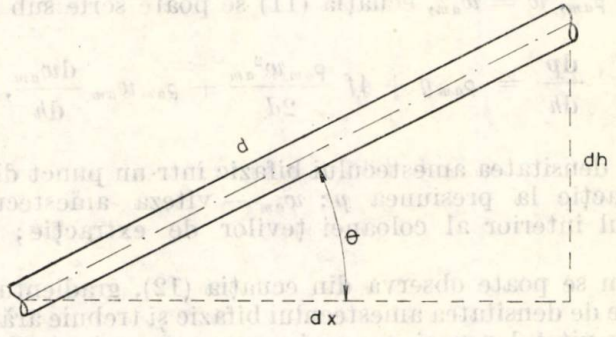


Fig. 1

Se poate admite deci că gradientul total de presiune este alcătuit din trei componente, adică :

$$\frac{dp}{dl} = \left(\frac{dp}{dl}\right)_{st} + \left(\frac{dp}{dl}\right)_{fr} + \left(\frac{dp}{dl}\right)_{acc}, \tag{8}$$

unde

$\left(\frac{dp}{dl}\right)_{st} = \rho g \sin\theta$ este componenta datorită energiei potenţiale; aceasta se referă la faptul că termenul respectiv ar fi un gradient static;

$\left(\frac{dp}{dl}\right)_{fr} = \rho \frac{dF}{dl}$ este componenta datorită pierderilor prin frecare. Ţinînd seama de ecuaţia lui Fanning

$$\left(\frac{dp}{dl}\right)_{fr} = 4f\frac{\rho w^2}{2d}; \tag{9}$$

$\left(\frac{dp}{dl}\right)_{acc} = \rho w \frac{dw}{dl}$ este componenta datorită variaţiei energiei cinetice sau acceleraţiei.

Rezultă în final că

$$\frac{dp}{dl} = \rho \sin\theta + 4f\frac{\rho w^2}{2d} + \rho w \frac{dw}{dl}. \tag{10}$$

Ecuaţia generală a gradientului de presiune se aplică pentru curgerea staţionară şi unidimensională a oricărui fluid aflat într-o conductă înclinată la orice unghi θ, pentru care valorile parametrilor f, ρ şi w pot fi definite. Determinare acestor variabile este cauza majorităţii dificultăţilor întîlnite în studierea curgerii amestecurilor bifazice.

În cazul particular al curgerii verticale, deoarece $\theta = 90°$ şi $dl = dh$, ecuaţia (10) devine

$$\frac{dp}{dh} = \rho g + 4f \frac{\rho w^2}{2d} + \rho w \frac{dw}{dh} \tag{11}$$

sau, în situaţia deplasării printr-o coloană de ţevi de extracţie a unui amestec $\rho = \rho_{am}$, $w = w_{am}$, ecuaţia (11) se poate scrie sub forma

$$\frac{dp}{dh} = \rho_{am} g + 4f \frac{\rho_{am} w^2_{am}}{2d} + \rho_{am} w_{am} \frac{dw_{am}}{dh}, \tag{12}$$

unde ρ_{am} este densitatea amestecului bifazic într-un punct din coloana de ţevi de extracţie la presiunea p; w_{am} — viteza amestecului bifazic; d — diametrul interior al coloanei ţevilor de extracţie; f — factorul de frecare.

Aşa cum se poate observa din ecuaţia (12), gradientul de presiune static depinde de densitatea amestecului bifazic şi trebuie arătat că, exceptînd condiţiile vitezelor mari, cea mai mare parte a pierderilor de presiune în cazul curgerii verticale este provocată de această componentă. Gradientul de presiune datorită frecării necesită evaluarea unui factor de frecare bifazic, iar cel provocat de variaţia energiei cinetice sau accelerarea fluidelor este uneori considerat neglijabil şi, de obicei, se calculează numai pentru cazurile vitezelor mari de curgere.

După cum se cunoaşte din literatura de specialitate [4, 5], pînă în prezent au fost puse la punct destul de multe teorii şi corespunzător metode de calcul pentru stabilirea valorilor gradienţilor de presiune la curgerea amestecurilor bifazice prin coloane de ţevi de extracţie care diferă între ele prin procedeele folosite pentru determinarea parametrilor care descriu cele trei componente ale gradientului total de presiune. Astfel, unii cercetători convin în a presupune că fazele lichidă şi gazoasă se deplasează cu aceeaşi viteză (fără alunecare între faze), pentru a determina densitatea amestecului şi a evalua un factor de frecare bifazic în mod semiempiric [2, 7, 13]. Alţii ţin seama de efectul alunecării dar nu iau în considerare regimul de curgere şi stabilesc metode de calcul pentru fracţia de lichid şi pentru factorul de frecare [9]. În sfîrşit, o altă categorie ţin seama atît de efectul alunecării, cît şi de regimul de curgere, caz în care sînt necesare nu numai corelaţii pentru fracţia de lichid şi factorul de frecare, dar şi procedee de prevedere a diferitelor modele sau regimuri de curgere; corelaţiile pentru fracţia de lichid şi factorul de frecare sînt, de obicei, diferite pentru fiecare regim de curgere în parte [1, 4, 6, 11].

În ceea ce priveşte factorul de frecare trebuie menţionat că aceasta se determină în cadrul metodelor stabilite pentru evaluarea gradientului de presiune fie cu ajutorul unei corelaţii care exprimă dependenţa între

un factor de frecare de tip Fanning și un produs de forma $\rho_{am} w_{am} d$, de fapt numărătorul numărului Reynolds relativ la amestec, fie dintr-o diagramă Moody în funcție de un număr Reynolds calculat corespunzător condițiilor de curgere.

3. CORELAȚIA PROPUSĂ PENTRU FACTORUL DE FRECARE

3.1. PRINCIPII GENERALE

Prin folosirea rației gaze-lichid ca un parametru adițional de corelare și extindere a datelor de producție la un domeniu larg de condiții a fost stabilită o nouă corelație între factorul de frecare de tip Fanning și numărătorul numărului Reynolds relativ la amestec, dezvoltată pentru șase game de rații gaze-lichide *) distincte.

Determinarea intervalelor corespunzătoare acestor game s-a făcut pe baza reprezentării grafice a datelor experimentale, prelucrate pînă la obținerea valorilor parametrilor caracteristici, și a analizei modului lor de grupare în funcție de rația gaze-lichid.

Conform noii corelații propuse și a criteriului adoptat privind intervalul de valori a parametrului adițional de corelare au fost construite șase curbe de corelare pentru factorul de frecare, sporind astfel în mod considerabil precizia de determinare a acestui factor în comparație cu celelalte corelații dezvoltate pînă în prezent [2, 7, 13].

Ipotezele folosite în lucrarea de față pentru stabilirea factorului de frecare au în vedere următoarele aspecte:

a. Corelația se bazează pe date de producție obținute de la un număr mare de sonde în erupție naturală sau artificială care produceau în condiții de lucru dintre cele mai diferite. Cu toate că datele de producție nu au întotdeauna gradul de precizie al datelor de laborator, nu este totuși indicat să se înlocuiască o serie de condiții de lucru de la sondele reale cu date obținute în instalațiile experimentale de laborator. Folosirea datelor de producție elimină problema extrapolării datelor de laborator la condițiile reale de lucru ale sondelor din schelele de petrol. În ceea ce privește proprietățile fizice ale fluidelor produse, acestea au fost determinate în laborator folosind probe luate de la sondele cercetate.

b. Nu s-a făcut nici o încercare de evaluare a diferitelor componente care alcătuiesc pierderile totale de energie rezultate ca urmare a fenomenelor ireversibile care apar în timpul curgerii eterogene a amestecului de lichid și gaze, respectiv nu a fost separat efectul alunecării gazelor prin lichid de efectul frecării acestor două faze pe pereții coloanei de curgere. Totuși, pierderea de energie datorită alunecării gazelor este în mod inevitabil inclusă în corelația factorului de frecare deoarece aceasta a fost dedusă din date de producție în care alunecarea a fost evident prezentă.

c. Asupra regimurilor sau modelelor de curgere, care pot să apară atunci cînd două fluide cu proprietăți fizice diferite se deplasează simultan într-o conductă, nu s-a făcut nici-o referire. Majoritatea cercetătorilor care iau în considerare regimurile de curgere definesc trei regimuri dis-

*) S-a folosit noțiunea de rație gaze-lichid pentru a exprima acest parametru în cazul cel mai general.

tincte de curgere și un regim de tranziție care pot să apară la curgerea bifazică într-o coloană de țevi de extracție. În ultimii ani au apărut o serie de teorii cate împart condițiile de curgere în regimuri sau modele și dezvoltă, în general, corelații separate pentru fiecare regim de curgere în parte. Trebuie arătat însă că toate aceste teorii au fost deduse pe baza datelor obținute în instalații experimentale de laborator la scară relativ redusă în care fluidele folosite au fost, de regulă, aerul și apa sau, mai rar, unele produse petroliere. Este deci greu de presupus că în coloanele de extracție reale are loc aceeași comportare a regimurilor de curgere ca într-o instalație experimentală.

Succesiunea, dar mai ales delimitarea regimurilor de curgere sînt de obicei influențate de condițiile specifice existente în coloanele de extracție ale sondelor eruptive, și în principal de natura și viteza amestecului bifazic, procesul de ieșire a gazelor din soluție, efectul de micșorare a diametrului coloanei de țevi datorită depunerii de parafină etc. Este de aceea destul de dificil să se delimiteze practic zonele modelelor individuale de curgere. Din această cauză schemele modelelor de curgere propuse de diferiți cercetători cum și limitele ce definesc fiecare model de curgere în parte nu sînt întotdeauna aceleași pentru teoriile dezvoltate pînă în prezent, care au la bază acest mod de abordare a curgerii bifazice în coloane de extracție. De aici rezultă că delimitarea regimurilor de curgere este relativă și că nu se exclude posibilitatea apariției unor zone de tranziție între ele.

Cercetările recent efectuate au pus în evidență faptul că, în cazu deplasării într-o coloană de extracție a unui țiței saturat cu gaze dizolvate acestea ies din soluție la o presiune mai mică decît cea prezisă prin calcule de echilibru. În general, presiunea de saturație poate să difere cu aproximativ 10 ... 12 bari dacă țițeiul este agitat sau în stare de repaus [12].

În cazul sondelor la care pe pereții coloanei de extracție se depune parafină crearea unui canal discontinuu de curgere are ca rezultat, la un moment dat, o intensificare a procesului de separare a gazelor la orice adîncime și prin aceasta o creștere însemnată a presiunii la partea superioară a coloanei. Acest fenomen implică faptul că, în principal, la sondele în care țițeiul vine din zăcămînt la o presiune egală sau mai mare decît presiunea de saturație se poate aștepta ca rația efectivă gaze-țiței să fie la orice adîncime mai mică decît cea calculată într-o coloană de extracție cu diametru constant [12]. Se poate deci întîmpla ca în aceste situații, atît succesiunea, cît și delimitarea regimurilor de curgere estimate prin calcule să nu corespundă cu cele care se dezvoltă în coloane de extracție reale.

Studiile din ultimul timp au arătat dealtfel, că metodele care folosesc corelații de calcul în concordanță cu regimurile care se dezvoltă în cazul curgerii bifazice în coloana țevilor de extracție a sondelor eruptive și care sînt foarte laborioase nu sînt și cele mai exacte în estimarea gradienților de presiune [10].

d. Vîscozitatea nu a fost luată în considerare ca un parametru de corelare, dar se presupune că efectele ei au fost cuprinse în datele de producție utilizate. În general, curgerea amestecului eterogen de țiței, apă și gaze într-o coloană de țevi de extracție este dominată de un înalt grad de turbulență, cele mai multe sonde făcînd parte din această categorie [3, 13]. Din această cauză pierderea de energie datorită efortului de

forfecare generat de caracterul curgerii și al fluidului eterogen este neglijabilă și deci curgerea poate fi considerată practic ca independentă de efectul vîscozității fluidelor. Acest lucru nu trebuie să surprindă atît timp cît este la fel de adevărat că pentru curgerea unui fluid omogen în regim turbulent rugos pierderile de energie sînt independente de numărul Reynolds și deci de proprietățile fizice ale fluidului care curge. Se poate admite deci, în limitele unei aproximații cu totul acceptabilă din punct de vedere practic, o similitudine între curgerea eterogenă și curgerea omogenă prin coloane de lungime mare, în ceea ce privește regimul de curgere — viteză mare, număr Reynolds mare, regim de curgere similar celui turbulent rugos și deci independența pierderilor de energie față de vîscozitate.

În corelațiile propuse de diverși cercetători, vîscozitatea fluidului care curge este folosită în determinarea unui număr Reynolds în funcție de care se stabilește factorul de frecare, în general, dintr-o diagramă de tip Moody, cum și pentru alte numere adimensionale utilizate ca parametri de corelare. Trebuie arătat că valorile vîscozităților sînt cele măsurate în condiții standard și nu în condițiile de presiune și temperatură din coloana de extracție, după cum și conceptul unei vîscozități bifazice este încă destul de neclar și definit în mod diferit de diverși cercetători [4].

3.2. STABILIREA CORELAȚIEI FACTORULUI DE FRECARE

Factorul de frecare f a fost determinat din datele de producție, datele PVT și măsurătorile de presiune și temperatură efectuate în lungul coloanei de extracție ale sondelor cercetate, folosind relația lui Fanning,

$$f = \frac{Fd}{2\Delta h\, \bar{w}_{am}^2}, \tag{13}$$

și ecuația generală a bilanțului de energie scrisă sub formă

$$\int_{p_1}^{p_2} v\,dp + g\Delta h + F = 0, \tag{14}$$

unde

$\bar{w}_{am}$ — este viteza medie a amestecului bifazic între două secțiuni 1 și 2 normale pe axa coloanei de extracție, corespunzător presiunilor p_1 și p_2, m/s;

Δh — diferența de nivel între secțiunile 1 și 2 față de un reper dat, egală de regulă cu lungimea coloanei de țevi de extracție, m. În aplicarea acestui procedeu de calcul, valoarea absolută a termenului $\int_{p_1}^{p_2} v\,dp$ trebuie să fie întotdeauna mai mare sau egală cu valoarea lui Δh pentru ca factorul F să fie zero sau un număr pozitiv. În caz contrar, datele de producție sau datele PVT folosite în calcul nu se pot aplica sistemului luat în considerare.

Valorile lui f calculate prin această metodă au fost corelate cu funcția produsului dintre diametrul coloanei de extracție, viteza și densitatea

amestecului bifazic care curge prin coloană, $\rho_{am} w_{am} d$, pentru cele șase game de rații gaze-lichid stabilite. Acest produs, care reprezintă numărătorul numărului Reynolds relativ la amestec, a fost exprimat în funcție de datele de producție ale sondelor astfel:

$$\rho_{am} w_{am} d = \frac{m}{v_{am}} \cdot \frac{4 Q_t v_{am}}{\pi d^2} \cdot d = \frac{4 m Q_t}{\pi d} \tag{15}$$

sau

$$\rho_{am} w_{am} d = 1{,}4737 \cdot 10^{-5} \frac{m Q_t}{d}, \tag{16}$$

unde Q_t este debitul de țiței cu care produce sonda.

În felul acesta, noua corelație a factorului de frecare apare ca o funcție de produsul $\rho_{am} w_{am} d$ și rația gaze-lichid, ceea ce reprezintă o exprimare mult mai corectă a acestui parametru.

Rezolvarea funcției $f = f(\rho_{am} w_{am} d, R_{gl})$, în vederea construirii curbelor de corelare ale factorului de frecare, se face după următoarea metodologie de lucru:

a. Se calculează valoarea lui m, masa unui metru cub de țiței „mort" plus masa totală a gazelor și a apei care îl însoțesc:

$$m = \rho_t + \rho_g R_{gt} + \rho_a R_{at}, \tag{17}$$

unde ρ_t, ρ_g, ρ_a reprezintă, respectiv, densitatea țițeiului, a gazelor și a apei în condiții standard (p_0, T_0), kg/m^3; R_{gt} — rația totală gaze-țiței a sondei, m^{3}N/m^3; R_{at} — rația apă-țiței a sondei, m^3/m^3.

b. Se calculează valoarea produsului $\rho_{am} w_{am} d$ (relația 16).

c. Din ecuația generală a bilanțului de energie, ținînd seama că $v = \frac{v_{am}}{m}$, se determină valoarea factorului F între secțiuni, unde presiunile au valorile p_1 și p_2:

$$F = \frac{1}{m} \int_{p_2}^{p_1} v_{am} \, \mathrm{d}p - g \Delta h. \tag{18}$$

d. Se determină valoarea lui $\bar{v}_{am}$, valoarea medie a lui v_{am} obținută prin integrare între limitele p_1 și p_2:

$$\bar{v}_{am} = \frac{\int_{p_2}^{p_1} v_{am} \, \mathrm{d}p}{p_1 - p_2}. \tag{19}$$

e. Se calculează viteza medie a amestecului bifazic:

$$\bar{w}_{am} = \frac{4 Q_t \bar{v}_{am}}{\pi d^2}. \tag{20}$$

f. Se calculează valoarea factorului de frecare f din relația lui Fanning (13).

În acest mod se obține dependența dintre produsul $\rho_{am} w_{am} d$ și factorul de frecare f, pentru o valoarea dată a rației gaze-lichid.

Se observă că factorul de frecare f, care este o mărime adimensională, a fost corelat cu produsul $\rho_{am} w_{em} d$, care nu este adimensional. Aceasta deoarece datorită turbulenței excesive din coloana de extracție, curgerea verticală a amestecului eterogen de țiței, apă și gaze poate fi considerată ca independentă de efectul viscozității fluidelor. Prin urmare, produsul variabil $\rho_{am} w_{am} d$ variază la fel ca și produsul $\rho_{am} w_{am} d/\mu_{am}$ (unde μ_{am} este viscozitatea amestecului de lichid și gaze), produs care reprezintă tocmai numărul Reynolds, respectiv tot o mărime adimensională.

Rezultă că, în cazul curgerii turbulente, factorul de frecare f fiind independent de efectul viscozității variază puțin în lungul coloanei de extracție. El variază numai cu rugozitatea relativă a țevilor de extracție, care este, în general, constantă pentru aceiași coloană de țevi. Se poate considera astfel că, factorul de frecare f se menține constant în timpul curgerii verticale a amestecului bifazic gaze-lichid prin coloana de extracție.

Pentru construirea curbelor de corelare a factorului de frecare pe baza corelației propuse s-au folosit date de la un număr de 331 sonde din mai multe schele de extracție din țara noastră, care în momentul efectuării măsurătorilor experimentale produceau în erupție naturală sau artificială.

Aceste date sînt:

— date de producție: debitul de țiței, debitul de gaze produs și injectat, debitul de apă sau procentul de impurități, diametrul coloanei de țevi de extracție, adîncimea de fixare a coloanei de extracție sau adîncimea punctului de injecție și densitatea apei produse;

— date din analize PVT: factorul de volum pentru țiței, factorul de volum pentru gaze, rația de soluție, densitatea țițeiului și densitatea gazelor;

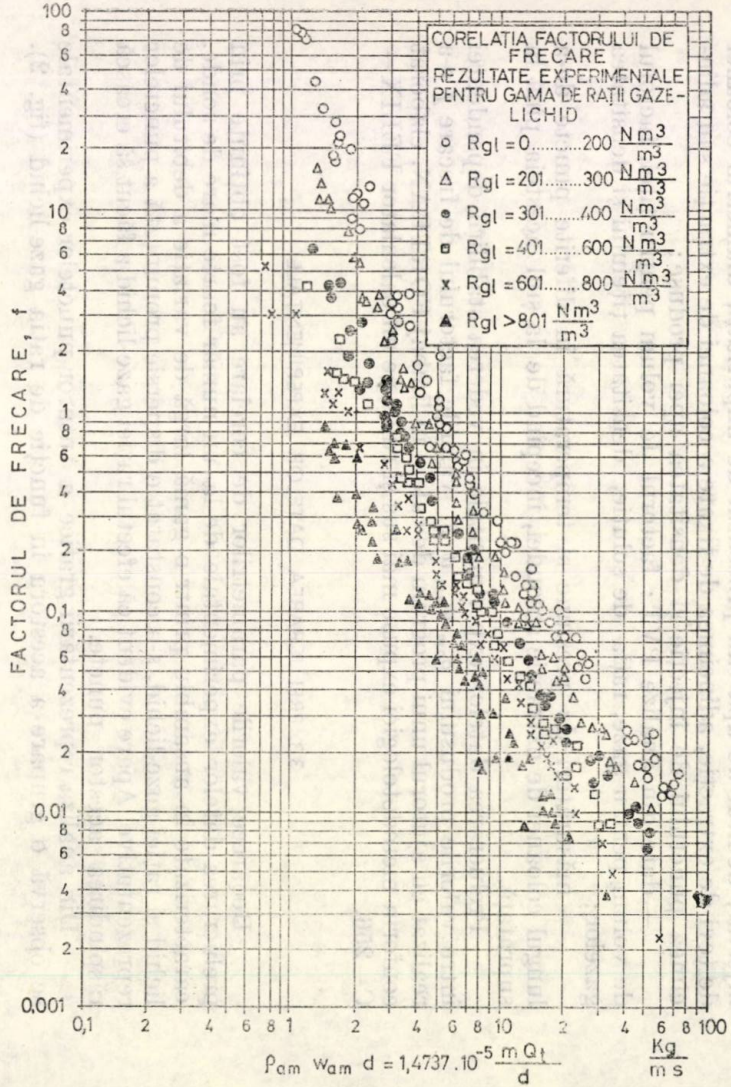
— măsurători de presiune și temperatură în diferite puncte de-a lungul coloanei de extracție a sondei, începînd de la șiul acesteia pînă la suprafață.

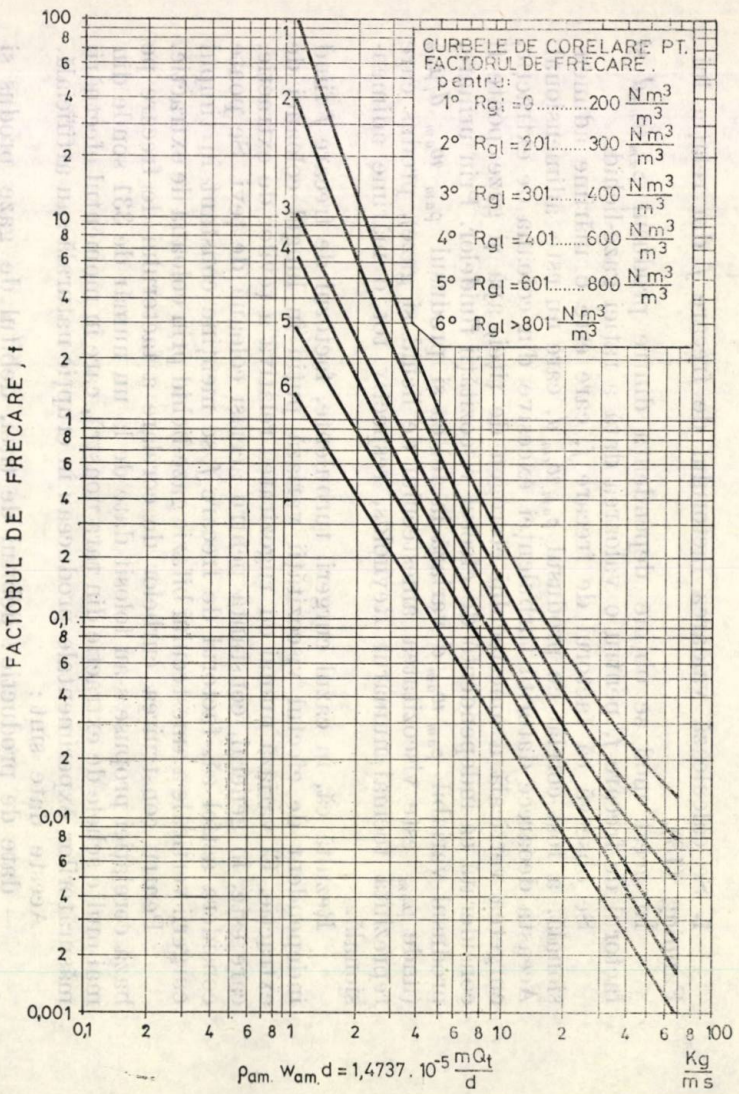
Prelucrarea datelor experimentale în vederea stabilirii dependenței între valorile produsului $\rho_{am} w_{am} d$ și valorile factorului de frecare f s-a realizat cu ajutorul unui program de calcul în limbaj FORTRAN, elaborat conform metodotologiei expuse mai sus și rulat pe un calculator FELIX—C—256.

3.3. PRELUCRAREA DATELOR EXPERIMENTALE

Deoarece valorile parametrilor de corelare au fost obținute prin prelucrarea datelor experimentale de la un număr foarte mare de sonde, caracterizate în ansamblu printr-o gamă largă de variație a debitului de lichid și rației gaze-lichid, s-a constatat o dispersie pronunțată a punctelor reprezentative. Apare evident că efectul rației gaze-lichid a făcut să crească răspîndirea acestor puncte.

Din analiza reprezentării grafice a tuturor punctelor experimentale se observă o grupare a acestora în funcție de rația gaze-lichid (fig. 2).


CORELAȚIA FACTORULUI DE FRECARE
REZULTATE EXPERIMENTALE PENTRU GAMA DE RAȚII GAZE-LICHID
○ Rgl = 0.....200 Nm3/m3
△ Rgl = 201.....300 Nm3/m3
● Rgl = 301.....400 Nm3/m3
□ Rgl = 401.....600 Nm3/m3
× Rgl = 601.....800 Nm3/m3
▲ Rgl > 801 Nm3/m3
FACTORUL DE FRECARE, f
ρam wam d = 1,4737 . 10-5 m Qt/d
Kg/ms


CURBELE DE CORELARE PT. FACTORUL DE FRECARE.
pentru:
1° Rgl = 0.....200 Nm3/m3
2° Rgl = 201.....300 Nm3/m3
3° Rgl = 301.....400 Nm3/m3
4° Rgl = 401.....600 Nm3/m3
5° Rgl = 601.....800 Nm3/m3
6° Rgl > 801 Nm3/m3
FACTORUL DE FRECARE, f
ρam. wam. d = 1,4737 . 10-5 m Qt/d
Kg/ms

S-au stabilit, de aceea, următoarele domenii ale raţiei gaze-lichid pentru care s-a încercat realizarea unei dependenţe funcţionale între cele două mărimi: 0 ... 200, 201 ... 300, 301 ... 400, 401 ... 600, 601 ... 800 şi >801 m^3N/m^3.

Pentru domeniile corespunzătoare valorilor mici ale raţiei gaze-lichid, în sistemul de axe dublu logaritmic, poziţia punctelor experimentale sugerează o dependenţă parabolică între logaritmul factorului de frecare şi logaritmul produsului $\varrho_{am} w_{am} d$, iar pentru domeniile corespunzătoare valorilor mari ale raţiei gaze-lichid apare ca probabilă chiar şi o dependenţă liniară între logaritmii acelorași mărimi.

Stabilirea relaţiilor analitice între aceste mărimi s-a realizat prin metoda celor mai mici pătrate pentru o ecuaţie de forma:

$$\log f = a_0 + a_1 \log R + a_2 (\log R)^2, \tag{21}$$

unde R are semnificaţia unui număr Reynolds considerînd la toate determinările efectuate drept viscozitate o mărime care nu influenţează factorul de frecare în situaţia unei turbulenţe avansate.

Determinarea coeficienţilor a_0, a_1 şi a_2 ai modelului ales, rezultă din rezolvarea următorului sistem de ecuaţii:

$$a_0 n + a_1 \Sigma \log R + a_2 \Sigma (\log R)^2 = \Sigma \log f,$$

$$a_0 \Sigma \log R + a_1 \Sigma (\log R)^2 + a_2 \Sigma (\log R)^3 = \Sigma \log f \cdot \log R,$$

$$a_0 \Sigma (\log R)^2 + a_1 \Sigma (\log R)^3 + a_2 \Sigma (\log R)^4 = \Sigma \log f \cdot (\log R)^2,$$

unde prin Σ s-a notat sumă de la $i = 1$ la $i = n$, în care n este numărul de puncte experimentale.

Din acest sistem se obţin următoarele expresii pentru coeficienţii a_0, a_1 şi a_2:

$$a_0 = \frac{[\Sigma X^2 \Sigma X^4 - (\Sigma X^3)^2]\Sigma Y - [\Sigma X \Sigma X^4 - \Sigma X^2 \Sigma X^3]\Sigma XY + [\Sigma X \Sigma X^3 - (\Sigma X^2)^2]\Sigma X^2 Y}{n[\Sigma X^2 \Sigma X^4 - (\Sigma X^3)^2] - [\Sigma X \Sigma X^4 - \Sigma X^2 \Sigma X^3]\Sigma X + [\Sigma X \Sigma X^3 - (\Sigma X^2)^2]\Sigma X^2},$$

$$a_1 = \frac{[\Sigma X^2 \Sigma X^3 - \Sigma X \Sigma X^4]\Sigma Y - [(\Sigma X^2)^2 - n\Sigma X^4]\Sigma XY + [\Sigma X \Sigma X^2 - n\Sigma X^3]\Sigma X^2 Y}{n[\Sigma X^2 \Sigma X^4 - (\Sigma X^3)^2] - [\Sigma X \Sigma X^4 - \Sigma X^2 \Sigma X^3]\Sigma X + [\Sigma X \Sigma X^3 - (\Sigma X^2)^2]\Sigma X^2},$$

$$a_2 = \frac{[\Sigma X \Sigma X^3 - (\Sigma X^2)^2]\Sigma Y - [n\Sigma X^2 - \Sigma X \Sigma X^2]\Sigma XY + [n\Sigma X^2 - (\Sigma X^2)^2]\Sigma X^2 Y}{n[\Sigma X^2 \Sigma X^4 - (\Sigma X^3)^2] - [\Sigma X \Sigma X^4 - \Sigma X^2 \Sigma X^3]\Sigma X + [\Sigma X \Sigma X^3 (\Sigma X^2)^2]\Sigma X^2},$$

unde $X = \log R$, $Y = \log f$.

În vederea prelucrării datelor experimentale prin metoda celor mai mici pătrate, pentru a stabili care este relaţia funcţională cea mai adecvată, s-a întocmit un program de calcul în limbaj FORTRAN rulat pe un calculator FELIX—C—256. Programul permite determinarea coeficienţilor din relaţia liniară şi parabolică, calculează suma abaterilor pătratice corespunzătoare celor două corelări şi coeficienţii corelaţiei totale şi verifică semnificaţia modelului cu ajutorul testului Student.

Pe baza criteriului adoptat mai sus, în urma prelucrării datelor experimentale, se constată că aproximarea parabolică conduce la o corelare mai exactă decît aproximarea liniară.

Pentru cele șase curbe de corelare construite (fig. 3), corespunzătoare celor șase domenii ale rației gaze-lichid pentru care s-a încercat stabilirea dependenței funcționale între valorile produsului $\rho_{am} w_{am} d$ și valorile corespunzătoare ale factorului de frecare f, coeficienții a_0, a_1 și a_2 au următoarele valori în cazul regresiei parabolice (tabelul 1).

Tabelul 1

Coeficienții curbelor de corelare pentru regresia parabolică

Curba nr.	Rația gaze-lichid m^3N/m^3	Coeficienții modelului			Coeficienții corelației totale
		a_0	a_1	a_2	
1	0...200	2,0771476	−3,3215359	0,6472872	0,99688
2	201...300	1,6228428	−2,8980393	0,4813879	0,99877
3	301...400	1,1122542	−2,3660909	0,2716193	0,99722
4	401...600	0,8095282	−2,0334256	0,0938538	0,99887
5	601...800	0,4791003	−1,7133352	−0,0301261	0,99834
6	801	0,1748991	−1,7322861	0,0134384	0,98576

În vederea stabilirii concordanței dintre datele experimentale și modelul ales, în programul de calcul s-a inclus și determinarea coeficientului corelației totale. Din tabelul 1 se observă că acest coeficient are valori foarte apropiate de unitate, așa încît putem concluziona că dependența polinomială de ordinul doi dintre variabile este just aleasă.

Pentru a testa semnificația coeficienților calculați, programul cuprinde instrucțiuni pentru calculul testului Student raportat la rezidual, conform relației;

$$t_{ai} = \frac{a_i}{s\sqrt{c_{i,i}}} \quad (i = 0,\ 1,\ 2), \tag{22}$$

unde s este estimata abaterii standard; $c_{i,i}$ — coeficientul corespunzător din matricea corelațiiilor.

Compararea valorilor calculate cu relația (22) cu cele tabelate în literatura de specialitate [3], corespunzătoare gradelor de libertate ale fiecărui model și unui nivel de 5% (tabelul 2), arată că pentru primele patru curbe toți coeficienții sînt semnificativi ($t_{ai} > t_{tabel}$), iar pentru ultimele două curbe coefiiencții a_2 nu sînt semnificativi la nivelul de 5%. Acest fapt apare explicabil prin valorile ridicate ale rației gaze-lichid și în special prin gama foarte largă de variație a acestui parametru, pentru $R_{gl} > 801$ m^3N/m^3.

Pentru fiecare coeficient al modelului ales s-a calculat și intervalul de încredere folosind relația

$$a_i - t_{n-3;\,0,05}\, s\sqrt{c_{i,i}} < \alpha_i < a_i + t_{n-3;\,0,05}\, s\sqrt{c_{i,i}}, \tag{23}$$

Tabelul 2

Valorile testului de semnificație Student

Coeficienții modelului / Curba nr.	a_0 $t_{calculat}$	a_1 $t_{calculat}$	a_2 $t_{calculat}$	$t_{n-3;0,05}$
1	64,48	44,03	17,21	1,9799
2	65,19	46,23	14,15	2,0003
3	29,26	24,96	5,51	2,0003
4	32,44	32,42	2,619	2,0211
5	24,77	34,34	1,005	2,0003
6	2,75	9,87	0,1224	2,0003

unde $t_{n-3;\,0,05}$ este valoarea testului Student pentru $n-3$ grade de libertate și un interval de semnificație de 0,05 ; α_i — coeficienții reali ai modelului:

Rezultatele obținute sînt date în tabelul 3.

Tabelul 3

Intervalele de încredere ale coeficienților modelului

Curba	Coeficienții reali ai modelului		
	α_0	α_1	α_2
1	2,0771476±0,06378	−3,3215359±0,14936	0,6472872±0,07447
2	1,6228428±0,04979	−2,8980393±0,12540	0,4813879±0,06804
3	1,1122542±0,07605	−2,3660909±0,18961	0,2716193±0,09862
4	0,8095282±0,05043	−2,0334256±0,12678	0,0938538±0,07243
5	0,4791003±0,03869	−1,7133352±0,09979	−0,0301261±0,05996
6	0,1748991±0,07911	−1,7322861±0,35096	0,0134384±0,21966

3.4. VERIFICAREA CORELAȚIEI FACTORULUI DE FRECARE

După ce s-a stabilit că în determinarea factorului de frecare la curgerea amestecurilor bifazice prin coloane de țevi de extracție rația gaze-lichid trebuie să fie un parametru adițional de corelare, indiferent de mărimea ei, a fost necesar să se verifice exactitatea corelației propuse. Pentru aceasta, fiecare din cele șase curbe de corelare construite au fost testate pentru o gamă largă de debite de lichid, pentru dimensiunile uzuale ale țevilor de extracție și pentru diferite rații gaze-lichid cuprinse în limitele specifice domeniului fiecărei curbe. În felul acesta s-a putut, verifica corelația propusă pentru diferite valori ale produsului $\rho_{am}\, w_{am}\, d$ în mai multe puncte situate în lungul curbelor construite, corespunzătoare unor condiții de lucru dintre cele mai diferite. S-au obținut astfel numeroase și variate rezultate pe baza cărora a fost posibil să se stabilească o serie de concluzii cu privire la corelația propusă privind gradul ei de exactitate pentru domeniile de condiții studiate.

Verificarea corelației propuse pentru factorul de frecare s-a făcut calculînd gradienții de presiune și construind cu ajutorul acestora curba de variație a presiunii în lungul coloanei de țevi de extracție, curbă care s-a comparat apoi cu cea reală construită prin măsurători directe la sondă. Pentru curba construită pe cale analitică s-a determinat abaterea față de curba reală, calculîndu-se eroarea relativă medie procentuală. În felul acesta s-a reușit să se scoată mai bine în evidență superioritatea corelației propuse pentru determinarea factorului de frecare la curgerea amestecurilor bifazice în coloana țevilor de extracție a sondelor eurptive, față de corelațiile folosite pînă în prezent care nu țin de acest parametru.

În vederea construirii curbei de variație a presiunii prin măsuărtori directe s-au efectuat înregistrări de presiune în sonde cu ajutorul manometrelor de adîncime, iar pentru construirea curbei pe cale analitică au fost folosite date de producție și analize PVT de la aceleași sonde.

Corelația factorului de frecare a fost verificată pentru o gamă largă de debite de lichid și rații gaze-lichid, cuprinse între 12 și 100 $m^3/24$ h, respectiv 69 și 1890 m^3/m^3N, și pentru diametre ale țevilor de extracție de $2^{3/8}$, $2^{7/8}$ și $3^{1/2}$ inch.

Gradienții de presiune calculați cu ajutorul corelației propuse au dat posibilitatea să se construiască curbe de variație a presiunii în lungul coloanelor de țevi de extracție apropiate de cele construite prin măsurători directe la sondă, pentru majoritatea debitelor de lichid și rațiilor gaze-lichid testate. Astfel, pentru debite de lichid mai mari de 55 $m^3/24$ h și rații gaze-lichid cuprinse între 0 și 300 m^3N/m^3, eroarea relativă medie a fost mai mică de 5%, iar pentru rații gaze-lichid mai mari de 300 m^3N/m^3, eroarea nu a depășit 7,5%.

Pentru debite de lichid cuprinse între 30 și 55 $m^3/24$ h abaterea medie maximă a fost de 6%, pentru rații gaze-lichid mai mici de 300 m^3N/m^3, și de 9%, pentru rații gaze-lichid mai mari de 300 m^3N/m^3. În general, pentru debite de lichid mai mici de 30 $m^3/24$ h rezultatele au fost bune pentru aproape toate gamele rațiilor gaze-lichid testate. Eroarea medie relativă nu a depășit 6%, pentru rații gaze-lichid mai mici de 300 m^3N/m^3 și 11%, pentru rații gaze-lichid mai mari de 300 m^3N/m^3.

În tabelul 4 sînt cuprinse o parte din rezultatele obținute în urma verificării corelației factorului de frecare, iar în figurile 4 ... 7 sînt prezentate cîteva din diagramele corespunzătoare.

Din analiza calculelor efectuate și din alura curbelor trasate se remarcă faptul că, în general, gradienții de presiune determinați cu noua corelație față de gradienții de presiune estimați prin măsurători directe de presiune în sondă, sînt:

— mai mici, pentru debite de lichid relativ scăzute și rații gaze-lichid $< 200\ m^3N/m^3$ și $> 800\ m^3N/m^3$;

— mai mari, pentru restul gamelor de debite de lichid și rații gaze-lichid.

În concluzie, verificările efectuate arată că noua corelație a factorului de frecare permite să se obțină rezultate destul de bune în calculul gradienților de presiune, pentru un domeniu larg de condiții privind debitele de lichid și rațiile gaze-lichid. Acest fapt o recomandă spre a fi utilizată în calculul de prevedere a gradienților de presiune.

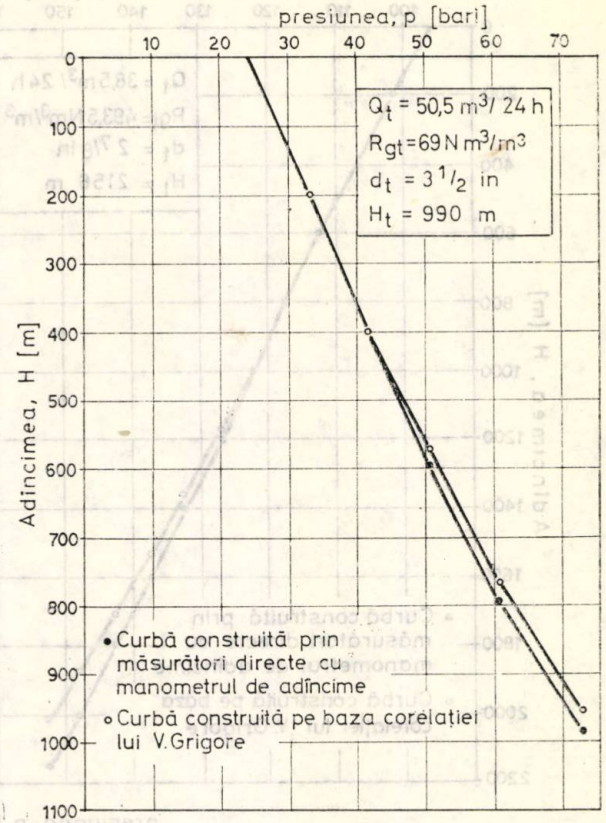

presiunea, p [bari]
10
20
30
40
50
60
70
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
1100
Adîncimea, H [m]
Q_t = 50,5 m³/ 24 h
R_{gt} = 69 N m³/m³
d_t = 3 1/2 in
H_t = 990 m
• Curbă construită prin măsurători directe cu manometrul de adîncime
∘ Curbă construită pe baza corelației lui V. Grigore

Fig. 4

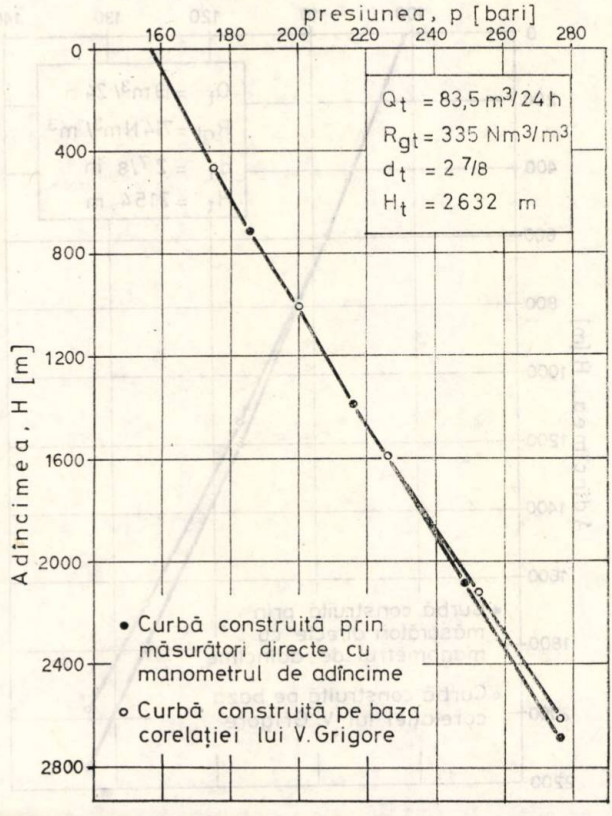

presiunea, p [bari]
160
180
200
220
240
260
280
0
400
800
1200
1600
2000
2400
2800
Adîncimea, H [m]
Q_t = 83,5 m³/24 h
R_{gt} = 335 Nm³/m³
d_t = 2 7/8
H_t = 2632 m
• Curbă construită prin măsurători directe cu manometrul de adîncime
∘ Curbă construită pe baza corelației lui V. Grigore

Fig. 5

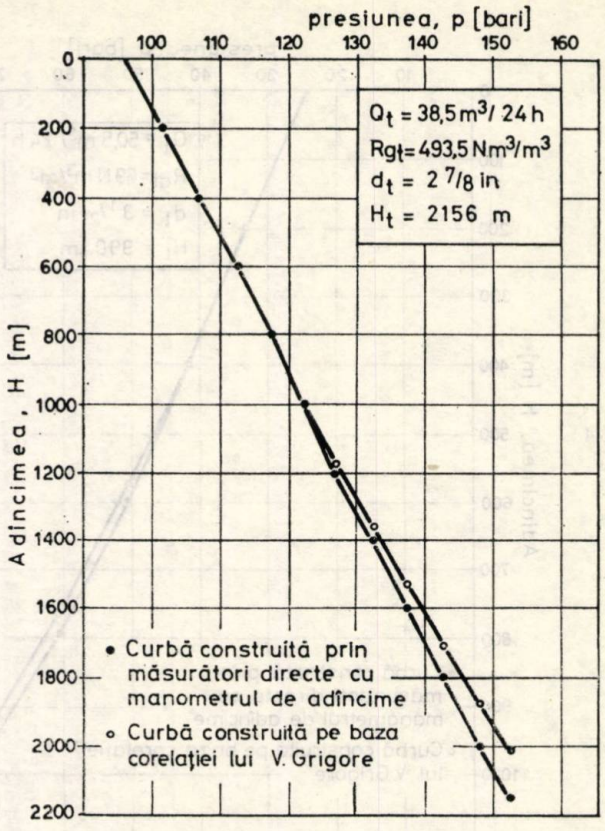

presiunea, p [bari]
100
110
120
130
140
150
160
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
2200
Adîncimea, H [m]
Q_t = 38,5 m³/ 24 h
Rg_t = 493,5 Nm³/m³
d_t = 2 7/8 in
H_t = 2156 m
• Curbă construită prin măsurători directe cu manometrul de adîncime
∘ Curbă construită pe baza corelației lui V. Grigore

Fig. 6

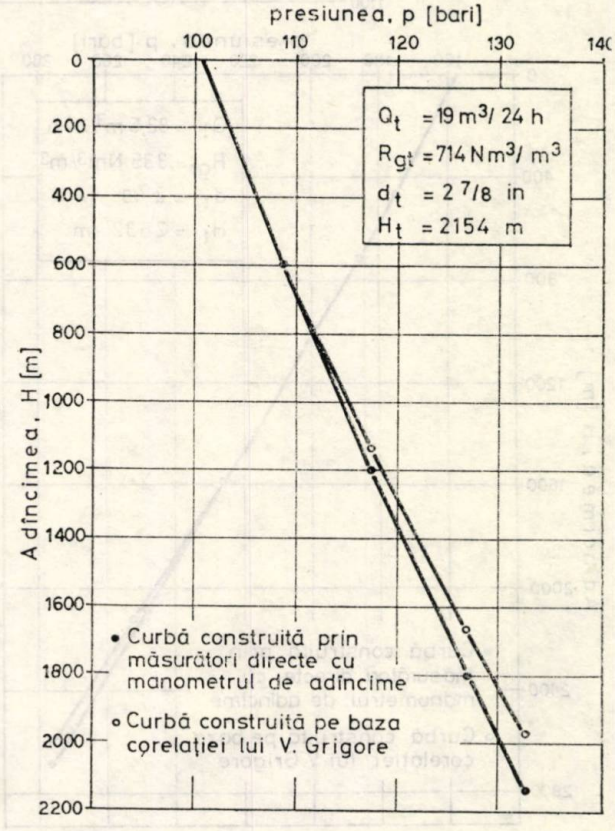

presiunea, p [bari]
100
110
120
130
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
2200
Adîncimea, H [m]
Q_t = 19 m³/ 24 h
R_{gt} = 714 Nm³/ m³
d_t = 2 7/8 in
H_t = 2154 m
• Curbă construită prin măsurători directe cu manometrul de adîncime
∘ Curbă construită pe baza corelației lui V. Grigore

Fig. 7

Tabelul 4

Rezultate obținute prin verificarea corelației factorului de frecare

Curba de corelare pt. factorul de frecare	Debitul de țiței $m^3/24$ h	Rația gaze-țiței m^3N/m^3	Diametrul coloanei de țevi de extracție, inch	Adîncimea de fixare a coloanei de extracție, m	Eroarea relativă medie procentuală %
	13,6	74,0	2 3/8	2015	4,78
0...200	20,0	150,0	3 1/2	1330	5,65
	29,0	100,0	2 7/8	2764	4,05
	35,0	171,0	2 7/8	2240	5,98
	47,0	85,0	2 3/8	2770	5,54
	50,5	69,0	3 1/2	990	3,67
	95,0	137,0	2 7/8	2639	2,38
	22,6	265,5	2 7/8	1520	5,36
201...300	86,0	208,0	2 3/8	2718	5,03
	100,0	209,0	2 7/8	2006	1,72
	30,7	358,0	2 7/8	1286	5,24
301...400	59,5	387,0	2 7/8	2000	7,31
	83,5	335,0	2 7/8	2632	0,82
	12,0	500,0	2 7/8	2151	9,19
	17,8	449,0	2 3/8	2639	5,56
	24,0	597,0	2 7/8	2718	1,08
401...600	34,0	455,0	2 7/8	2178	7,76
	38,5	493,5	2 7/8	2156	2,43
	65,0	577,0	2 3/8	3060	1,79
	19,0	714,0	2 7/8	2154	5,07
601...800	27,4	657,0	2 7/8	2170	7,00
	49,0	734,7	2 3/8+2 7/8	2720	5,95
	12,0	833,0	2 7/8	2442	5,12
	13,3	1461,0	2 7/8	1980	6,37
801	17,5	1085,0	2 3/8	3321	10,67
	23,8	1890,0	2 7/8	2747	9,84
	34,5	1044,0	2 7/8	2735	8,87

Primită la redacție la 5 ianuarie 1983

BIBLIOGRAFIE

1. K. AZIZ, G.W. GOVIER, M. FOGARAȘI, *Pressure drop in wells producing oil and gas*, Journal Canadian of Petroleum Technology, July — Sept., 1972.
2. P.B. BAXENDELL, R., THOMAS, *The calculation of pressure gradients in high rate flowing wells*, Journal of Petroleum Technology, October, 1961.
3. C.A. BENNETT, N.L., FRANKLIN, *Statistical analysis in chemistry*, New York, John Wiley and Sons, Inc., London, 1963.
4. J.P., BRILL, H.D., BEGGS, *Two — phase flow in pipes*, Tulsa University, 1975.
5. K.E., BROWN, *Gas lift theory and practice, Iincluding a review of petroleum engineering fundamentals*, Prentice — Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A., 1967.
6. H., DUNS, JR., N.C.J. ROS., *Vertical flow of gas and liquid mixtures in wells*, Sixth World Petroleum Congress, procedings, Sect. II, Frankfurt am Main, June, 1963.
7. G.H. FANCHER, JR., K.E. BROWN, *Predication of pressure gradients for multiphase flow in tubing*, Society of Petroleum Enginneering Journal, March 1963.
8. V. GRIGORE, *Cercetări privind optimizarea regimului de extracție a țițeiului prin erupție artificială*, Teză de doctorat, Ploiești, 1977.

9. A.R., HAGEDORN, K.E. BROWN, *Experimental study of pressure gradients accuring during continuus two – phase flow in smalldiameter verical conduits*, Journal of Petroleum Technology, April, 1965.
10. J.O. LAWSON, J.P. BRILL, *A statistical evolution of methods used to predict pressure lasses for multiphase flow in vertical oil well tubing*, Paper SPE 4267 to e presented at 43th Annual SPE Fall Meetings Las Vegas, Nevada, Sept. – Oct., 1973.
11. J. ORKISZEWSKI, *Predicting two-phase pressure drops in vertical pipes*, Journal of Petroleum Technology, June, 1967.
12. G.V. PANTELEEV, *Turbulizator potoca primeniaemi dlia uvelicenia davlenia na uste skvajin*, Neftepromislovoe Delo, *9*, 1970.
13. F.H. POETTMANN, P.G. CARPENTER, *The multiphase flow of gas, oil and water through vertical flow strings with application to the designg of gas-lift installations*, Drilling and Production Practice, 1952.

CALCULUL DE REZISTENȚĂ AL STRUCTURILOR TUBULARE PRESURIZATE LA EXTERIOR. II

de ALECSANDRU PAVEL
Institutul de petrol și gaze, Ploiești

Se expune calculul de rezistență al inelelor de rigidizare geometric imperfecte. Se studiază efectele de contur și se evaluează stările corespunzătoare de solicitare și deplasare-deformare, atît pentru panourile tubulare, cît și pentru structura tubulară cu rigidizări transversale și presurizare exterioară, operîndu-se corecțiile ce se impun. Se determină capacitatea portantă a structurilor examinate.

5. CALCULUL INELELOR DE RIGIDIZARE

Se consideră un inel de rigidizare inițial *perfect circular*, cu $EI_i =$ $=$ const., care este solicitat prin *sarcinile exterioare radiale uniforme* q și se presupune că forma deformată a inelului respectiv, sub acțiunea sarcinilor q, este cea schematizată ca atare în figura 7. Se poate demonstra ușor că efortul normal de copresiune N_0 (în N), în secțiunea transversală corespunzătoare punctului A, are expresia :

$$N_0 = q(0{,}5\ D_{mi} - w_0), \qquad (97$$

iar momentul încovoietor (în N.mm), care, în aceeași secțiune transversală, este M_0, într-o secțiune transversală oarecare, corespunzătoare, bunăoară, punctului B, are expresia :

$$M = M_0 - 0{,}5\ qD_{mi}(w_0 - w). \qquad (98)$$

Preluînd o parte din solicitările la *compresiune transversală* (*inelară*), datorite presurizării exterioare a structurii tubulare, evident, inelele de rigidizare trebuie să fie calculate și din punctul de vedere al rezistenței lor elastomecanostatice.

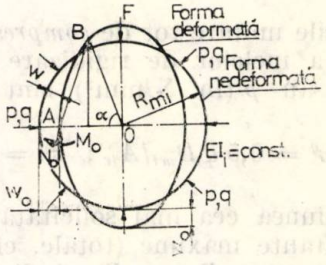


Fig. 7. — Scheme de calcul privind inelele de rigidizare cu $EI_i =$ const.

Așa cum se cunoaște, practic, realizarea constructivă de inele de rigidizare (fig. 3) cu forma inițială, nesolicitată, perfect circulară este imposibilă, întotdeauna existînd o anumită abatere de *construcție* de la circularitate, respectiv o anumită *ovalitate inițială* (fig. 8).

Dacă ovalitatea inițială *maximă* (admisibilă, posibilă etc.) a inelelor de rigidizare nesolicitate este w^0_{max}, atunci ovalitatea inițială curentă w^0 a acelorași inele, corespunzătoare unui punct M oarecare ce aparține fibrei mediane, va avea [10] expresia $w_0 = w^0_{max} \cos 2\beta$.

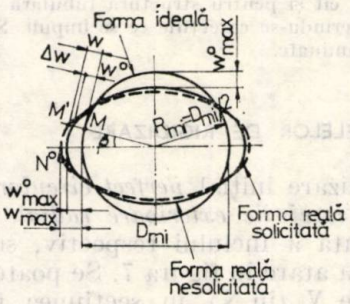


Fig. 8. — Ovalizarea inelelor de rigidizare.

Momentul încovoietor *maxim* datorit ovalizării M^0 (în N.mm), corespunzător efortului de compresiune $N^0 = q\,R_{mi} = 0{,}5\,q\,D_{mi}$ sau $N^0 = 0{,}5\,p\,D_{mi}\,b$ (în N), în secțiunile cu $\beta = 0,\ \pi$, va fi [2]:

$$M^0 = 0{,}625\,q\,D_{mi}\,w^0_{max}, \tag{99}$$

respectiv

$$M^0 = 0{,}625\ p\,D_{mi}\,b_i\,w^0_{max}, \tag{100}$$

acestuia revenindu-i următorul efort unitar de *compresiune inelară*:

$$\sigma^{M^0} = M^0/W_{ie} = 0{,}625\,q\,D_{mi}\,w^0_{max}/W_{ie} \tag{101}$$

sau

$$\sigma^{M^0} = M^0/W_{ie} = 0{,}625\,p\,D_{mi}\,b_i\,w^0_{max}/W_{ie}. \tag{102}$$

Eforturile unitare tot de *compresiune inelară*, care apar în secțiunea transversală a inelelor de rigidizare sub acțiunea sarcinilor de calcul q (în N/mm) sau p (în N/mm²) sînt:

$$\sigma^q = 0{,}5\,q\,D_{mi}/A_{ie}\ ;\quad \sigma^p = 0{,}5\,p\,D_{mi}(b_i + 30\,s)/A_{ie}. \tag{103, 104}$$

În secțiunea cea mai solicitată a inelelor de rigidizare, eforturile unitare rezultante maxime (totale, efective) $\sigma_{c\,max}$, de *compresiune inelară*, vor fi (pentru $D_{mi} \to D_{ei}$, indicele IR semnificînd inelul de rigidizare):

$$\sigma_{IR\,max} = \sigma^q + \sigma^{M^0} = 0{,}5\,q\,D_{ei}[A^{-1}_{ie} + 1{,}25\,w^0_{max}\,W^{-1}_{ie}], \tag{105}$$

respectiv

$$\sigma_{IR\,max} = \sigma^p + \sigma^{M^0} = 0{,}5\,pD_{ei}\left[\frac{b_i + 30\,s}{A_{ie}} + \frac{1{,}25\,b_i\,w^0_{max}}{W_{ie}}\right]. \tag{106}$$

Pentru *inelul* de lățime unitară ($b_i \to 1$), decupat dintr-o structură tubulară *netedă* (infinit) *lungă ovalizată*, adică chiar dintr-un panou tubular al structurii executate ca atare în condiții industriale sau/și de

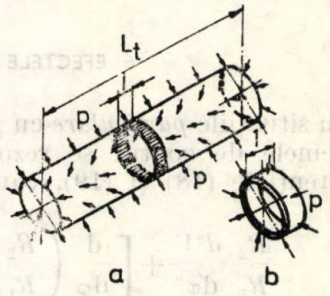


Fig. 9. — Scheme de calcul pentru structura tubulară netedă, lungă, solicitată la presiunea exterioară (unilaterală) uniformă; *a* — structura tubulară propriu-zisă; *b* — inelul cilindric (de lățime unitară).

șantier, corespunde (fig. 9): $A_i = 1.(s + h_i)$, $W_{ie} = 1.(s + h_i)^2/6$, $b_i + 30\,s \to 1$ și $q = p.1$, rezultînd direct

$$\sigma_C = \sigma^p + \sigma^{M^0} = [pD_{ei}/2(s + h_i)][1 + 7{,}5\, w^0_{max}/(s + h_i)], \qquad (107)$$

unde indicele *C* semnifică *structura tubulară (cilindrică) cu inele ovalizate.*

Avînd în vedere că ovalitatea și, deci, ovalizarea inițială maximă, *admisă* în mod obișnuit în practica construcției de structuri tubulare cu diametre mari, poate fi de 1,0% din diametru, se obține (evident, pentru $w^0_{max} = 0{,}01\, D_{ei,e}$):

$$\sigma_{c\,max} = 0{,}5\, qD_{ei}(A_{ie}^{-1} + 0{,}0125\, D_{ei} W_{ie}^{-1}), \qquad (108)$$

$$\sigma_{c\,max} = 0{,}5\, pD_{ei}\left(\frac{b_i + 30\,s}{A_{ie}} + \frac{0{,}0125\, b_i D_{ei}}{W_{ie}}\right), \qquad (109)$$

$$\sigma_C = [p\, D_{ei}/2(s + h_i)]\,[1 + 0{,}075\, D_{ei}/(s + h_i)], \qquad (110)$$

condiția de rezistență pentru dispizitivele și sistemele de tipul inelelor de rigidizare fiind următoarea:

$$\sigma_{c\,max}, \sigma_C \leqslant 0{,}5\, \sigma_{0,2}. \qquad (111)$$

Introducînd factorul *multiplicator* 1,1, care are funcția unui coeficient de corecție ce ține seama de neuniformitatea (datorită execuției, montării etc.) cîmpului eforturilor unitare de compresiune inelară pe secțiunea transversală compusă (de calcul) a inelelor de rigidizare, formulele (108)—(110) devin:

$$\sigma_{c\,max} = 0{,}55\, qD_{ei}(A_{ie}^{-1} + 0{,}0125\, D_{ei}\, W_{ie}^{-1}), \qquad (112)$$

$$\sigma_{c\,max} = 0{,}55\, pD_{ei}\left(\frac{b_i + 30\,s}{A_{ie}} + \frac{0{,}0125\, b_i\, D_{ei}}{W_{ie}}\right), \qquad (113)$$

$$\sigma_C = 0{,}55\, [pD_{ei}/(s + h_i)]\,[1 + 0{,}075\, D_{ei}/(s + h_i)], \qquad (114)$$

urmînd a fi *preferate* ca atare, în calculele practice, mai ales dacă condiția de rezistență (111) se reformulează astfel:

$$\sigma_{c\,max},\ \sigma_C \leqslant \sigma_{0,2}/1{,}6 = 0{,}265\,\sigma_{0,2}. \tag{115}$$

Cu privire la formulele derivate (107), (110) și (114), se recomandă ca utilizarea lor practică să fie făcută cu precauție și numai ca alternativă de confruntare.

6. EFECTELE DE CONTUR

Pentru situațiile *particulare* cu $p_x = p_z = 0$, cînd $I(\varphi) = 0$ și $\Phi(\varphi) = 0$, problemele de contur se rezolvă prin soluționarea sistemului de ecuații diferențiale (18) și (19), care se metamorforează astfel:

$$\frac{R_2}{R_1}\frac{d^2V}{d\varphi^2} + \left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{R_2}{R_1}\operatorname{ctg}\varphi\right]\frac{dV}{d\varphi} - \left[\frac{R_1}{R_2}\operatorname{ctg}^2\varphi - \mu\right]V = E\,s\,R_1\vartheta, \tag{116}$$

$$\frac{R_2}{R_1}\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} + \left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{R_2}{R_1}\operatorname{ctg}\varphi\right]\frac{d\vartheta}{d\varphi} - \left[\frac{R_1}{R_2}\operatorname{ctg}^2\varphi + \mu\right]\vartheta = -\frac{R_1}{D}V. \tag{117}$$

Pentru $p_z = p \neq 0$, $N_m = 0$ și $v > 0$ spre interior, prelucrarea matematică a ecuațiilor diferențiale (18) și (19) furnizează următoarea ecuație diferențială clasică [10]:

$$\frac{d^4v}{dx^4} + 4k_1^4 v = \frac{p}{D}, \tag{118}$$

a cărei soluție generală este de forma

$$v = \frac{pD_m^2}{4Es} + C_1 \sin k_1x \operatorname{sh} k_1x + C_2 \sin k_1x \operatorname{ch} k_1x + C_3 \cos k_1x \operatorname{sh} k_1x + C_4 \cos k_1x \operatorname{ch} k_1x, \tag{119}$$

$C_{1,2,3,4}$ fiind constante de integrare care se determină din condițiile de contur.

6.1. Stările de solicitare și deplasare-deformare pentru tubulară. Dată fiind schema de calcul prezentată în figura 10, rezultă

$$M_m = -D(d^2v/dx^2); \tag{120}$$

$$Q_x = dM_m/dx = -D(d^3v/dx^3), \tag{121}$$

$$M_t = \mu M_m;\quad N_t = -2E\,s\,v/D_m, \tag{122, 123}$$

iar pentru starea de solicitare ilustrată schematic în figura 11 corespunde

$$v_{x=0} = v_{x=L} = \frac{pD_m^2}{4Es} - \frac{Q_0 k_1 D_m^2}{2Es} X_1(k_1 L) - \frac{M_0 k_1^2 D_m^2}{2Es} X_2(k_1 L), \quad (124)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)_{x=L} = \frac{Q_0 k_1^2 D_m^2}{2Es} X_2(k_1 L) + \frac{M_0 k_1^3 D_m^2}{Es} X_3(k_1 L). \quad (125)$$

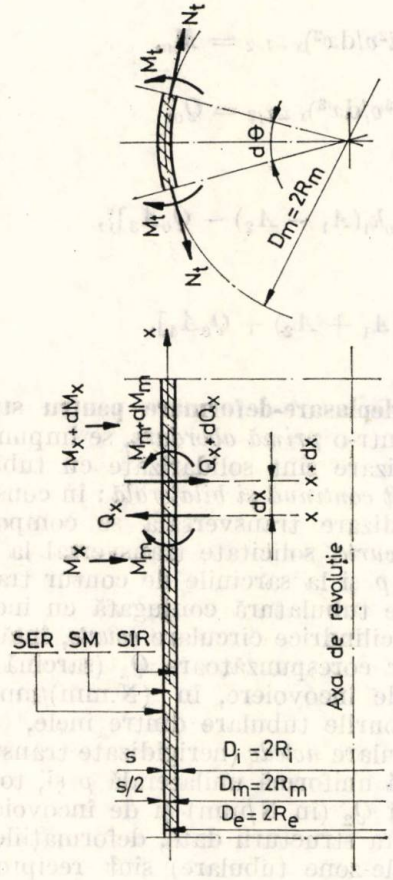


Fig. 10. — Schema de calcul evidenţiind eforturile (în situaţia $N_m = 0$) din tubulatură.

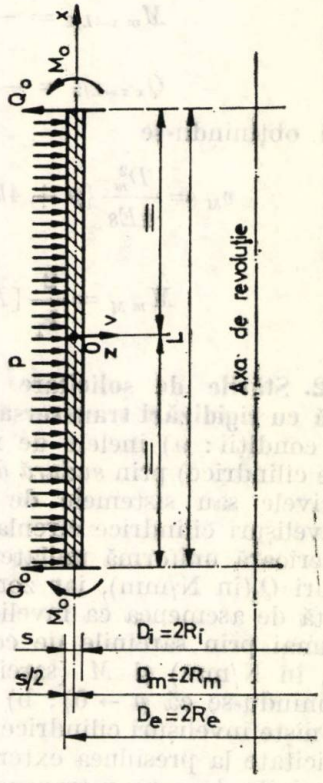


Fig. 11. — Panoul tubular neted (dintre inele) solicitat la presiune exterioară uniformă unilaterală şi sarcini (Q_0, M_0) corespunzătoare efectelor de contur.

Poziţionînd *simetric* originea coordonatelor (fig. 11), astfel contururile transversale avînd coordonatele $x = \pm L/2$, din motive de simetrie,

constantele de integrare $C_{2,3}$ dispar din ecuaţia (119), pentru $x = 0$, adică la jumătatea panoului tubular considerat (indice M), rezultînd

$$v_{x=0} = v_M = \frac{pD_m^2}{4Es} + C_4, \tag{126}$$

$$M_{m\,x=0} = M_{m\,M} = -D(d^2v/dx^2)_{x=0} = -2k_1^2DC_1, \tag{127}$$

ceea ce reprezintă un sistem de două ecuaţii cu numai două necunoscute ($C_{1,4}$). Evident, acestea din urmă se vor exprima în funcţie de sarcinile (eforturile) de contur M_0 şi Q_0 conform următoarelor *condiţii de contur*:

$$M_{m\,x=L/2} = -D(d^2v/dx^2)_{x=L/2} = M_0, \tag{128}$$

$$Q_{x\,x=L/2} = -D(d^3v/dx^3)_{x=L/2} = Q_0, \tag{129}$$

în final obţinîndu-se

$$v_M = \frac{D_m^2}{4Es}\{p + 4k_1[M_0k_1(A_1 - A_2) - Q_0A_3]\}, \tag{130}$$

$$M_{m\,M} = \frac{2}{k_1}[M_0k_1(A_1 + A_2) + Q_0A_4]. \tag{131}$$

6.2. Stările de solicitare şi deplasare-deformare pentru structura tubulară cu rigidizări transversale. Într-o *primă abordare*, se impun următoarele condiţii: a) inelele de rigidizare sînt solidarizate cu tubulatura (virolele cilindrice) prin *sudură de colţ continuă şi bilaterală*; în consecinţă, dispozitivele sau sistemele de rigidizare transversală se comportă ca nişte învelişuri cilindrice circulare *scurte*, solicitate transversal la presiunea exterioară uniformă unilaterală p şi la sarcinile de contur transmise de suduri Q_1(în N/mm), iar zona de tubulatură conjugată cu inelele se comportă de asemenea ca învelişuri cilindrice circulare *scurte*, însă solicitate numai prin sarcinile de contur corespunzătoare Q_3 (sarcină transversală, în N/mm) şi M [sarcină de încovoiere, în (N.mm)/mm] (aici presupunîndu-se că $p \to 0$); b) panourile tubulare dintre inele, considerate ca nişte învelişuri cilindrice circulare *netede* (nerigidizate transversal), sînt solicitate la presiunea exterioară uniformă unilaterală p şi, totodată, prin sarcinile de contur transversală Q_2 (în N/mm) şi de încovoiere M; c) la joncţiunea inelelor cu tubulatura structurii date, deformaţiile şi deplasările elementelor conjugate (inele-zone tubulare) sînt reciproc *compatibile*.

În condiţiile enunţate, schema de calcul privind stările de solicitare şi deformare-deplasare din structura tubulară rigidizată transversal şi presurizată la exterior este redată în figura 12. Evident, atunci cînd solidarizarea inelelor cu tubulatura se realizează prin sudură de colţ continuă unilaterală sau discontinuă bilaterală ori unilaterală, condiţia a) trebuie reconsiderată şi reformulată ca atare. Se mai menţionează,

suplimentar, că, în general, condiția c) nu se asigură sau se asigură foarte dificil în practică, mai ales dacă soluțiile constructive sînt altele decît cele conforme condiției a).

Prin urmare, conform figurii 12, o anumită zonă a structurii tubulare, rigidizate transversal cu inele, s-a descompus în trei elemente de în-

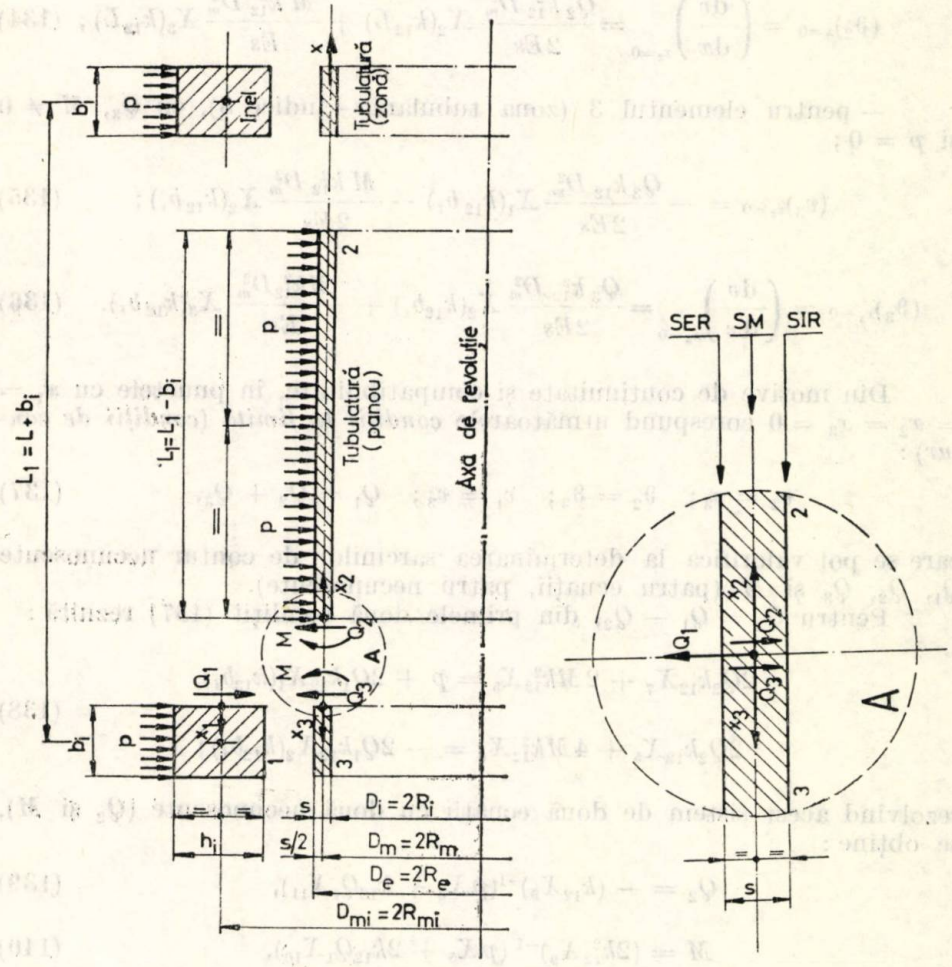


Fig. 12. — Schema de calcul cu trei elemente privind stările de solicitare și deformare-deplasare din structura tubulară rigidizată transversal și presurizată la exterior.

veliș cilindric circular (1 — inelul; 2 — panoul tubular; 3 — zona tubulară), sensul pozitiv al sarcinilor transversale fiind cel indicat. Avînd în vedere expresia generală a rotirii $\vartheta = dv/dx$ și ecuațiile (124, 125), rezultă:

— pentru elementul 1 (inelul — indice 1), cu p, $Q_1 \neq 0$ și $M = 0$:

$$(v_1)_{x_1=0} = \frac{pD_{mi}^2}{4Eh_i} + \frac{Q_1 k_{11} D_{mi}^2}{2Eh_i} X_1(k_{11} b_i); \qquad (132)$$

— pentru elementul 2 (panoul tubular — indice 2) cu p, Q_2, $M \neq 0$:

$$(v_2)_{x_2=0} = \frac{pD_m^2}{4Es} - \frac{Q_2 k_{12} D_m^2}{2Es} X_1(k_{12}L) - \frac{M k_{12}^2 D_m^2}{2Es} X_2(k_{12}L); \quad (133)$$

$$(\vartheta_2)_{x=0} = \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x_2=0} = \frac{Q_2 k_{12}^2 D_m^2}{2Es} X_2(k_{12}L) + \frac{M k_{12}^3 D_m^2}{Es} X_3(k_{12}L); \quad (134)$$

— pentru elementul 3 (zona tubulară — indice 3), cu Q_3, $M \neq 0$ și $p = 0$;

$$(v_3)_{x_3=0} = -\frac{Q_3 k_{12} D_m^2}{2Es} X_1(k_{12}b_i) - \frac{M k_{12}^2 D_m^2}{2Es} X_2(k_{12}b_i); \quad (135)$$

$$(\vartheta_3)_{x_3=0} = \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x_3=0} = \frac{Q_3 k_{12}^2 D_m^2}{2Es} X_2(k_{12}b_i) + \frac{M k_{12}^3 D_m^2}{Es} X_3(k_{12}b_i). \quad (136)$$

Din motive de continuitate și compatibilitate, în punctele cu $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ corespund următoarele *condiții la limită* (*condiții de contur*) :

$$v_2 = v_3; \quad \vartheta_2 = \vartheta_3; \quad v_1 = v_3; \quad Q_1 = Q_2 + Q_3, \quad (137)$$

care se pot valorifica la determinarea sarcinilor de contur necunoscute Q_1, Q_2, Q_3 și M (patru ecuații, patru necunoscute).

Pentru $Q_3 = Q_1 - Q_2$, din primele două condiții (137) rezultă :

$$\begin{aligned} 2Q_2 k_{12} X_7 + 2M k_{12}^2 X_5 &= p + 2Q_1 k_{12} X_1(k_{12}b_i), \\ 2Q_2 k_{12} X_5 + 4M k_{12}^2 X_6 &= -2Q_1 k_{12} X_2(k_{12}b_i); \end{aligned} \quad (138)$$

rezolvînd acest sistem de două ecuații cu două necunoscute (Q_2 și M), se obține :

$$Q_2 = -(k_{12}X_9)^{-1}(pX_6 + k_{12}Q_1 X_{11}), \quad (139)$$

$$M = (2k_{12}^2 X_9)^{-1}(pX_5 + 2k_{12}Q_1 X_{10}), \quad (140)$$

iar din cea de-a treia condiție (137) — după substituirea mărimilor acum cunoscute Q_2 și M, respectiv $Q_3 = Q_1 - Q_2$ — rezultă :

$$Q = -\frac{p}{2} \frac{D_{mi}^2/h_i + D_m^2 X_{12}/s}{k_{11} D_{mi}^2 X_1(k_{11}b_i)/h_i + k_{12} D_m^2 X_{13}/s}. \quad (141)$$

Așadar, succesiunea de rezolvare va fi următoarea : $Q_1(141) \to Q_2$ (139) și M (140) $\to Q_3 = Q_1 - Q_2$ (137), de fapt, Q_1 reprezentînd sarcina,

pe unitatea de lungine din circumferința mediană a structurii tubulare rigidizate transversal, introdusă prin intermediul sudurilor de colț continue și bilaterale dintre inele și tubulatură.

Se atrage atenția că fromula (140) furnizează valori *M prea mici* și se recomandă o eventuală nouă abordare a problemei de contur pentru structurile tubulare în discuție.

Pentru $D_m \to D_{mi} \to D_e$, rezultă următoarele *formule aproximative*:

$$Q_1 = -\frac{p}{2}\frac{s + h_i X_{12}}{k_1\sqrt{s^3/h_i}\,X_1(k_1\sqrt{sb_i^2/h_i}) + k_1 h_i X_{13}},$$

$$Q_2 = -(k_1 X_9)^{-1}(pX_6 + k_1 Q_1 X_{11}); \quad Q_3 = Q_1 - Q_2,$$

$$M = (2k_1^2 X_9)^{-1}(pX_5 + 2k_1 Q_1 X_{10}).$$

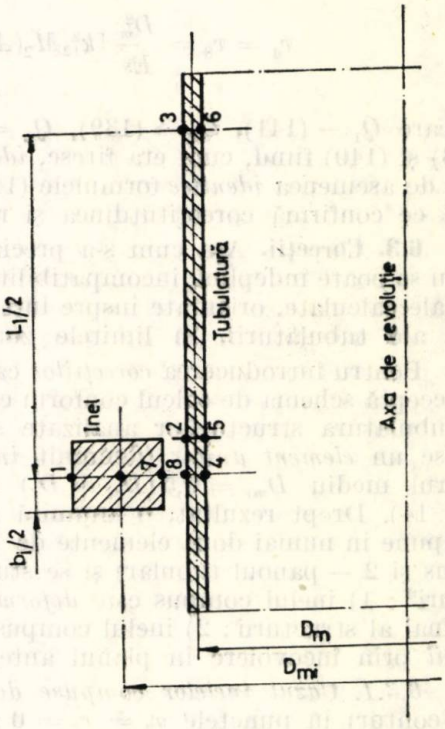


Fig. 13. — Nominalizarea unor puncte reprezentative de analiză a stării de solicitare și deformare-deplasare, corespunzătoare efectelor de contur, pentru schema de calcul cu trei elemente.

În punctele 1 ... 8, materializate în figura 13, momentul încovoietor $M \to M_{1,2,3,4}$ și deplasarea radială $v \to v_{1,2,\ldots,8}$ se pot calcula cu următoarele formule:

$$M_1 = -\frac{2Q_1}{k_{11}}A_5; \quad M_2 = \frac{pX_5}{2k_{12}^2 X_9} + \frac{Q_1 X_{10}}{k_{12} X_9}, \qquad (142, 143)$$

$$M_3 = \frac{2}{k_{12}}[M_2 k_{12}(A_1 + A_2) + Q_2 A_4], \qquad (144)$$

$$M_4 = \frac{2}{k_{12}} [M_2 k_{12} (A_6 + A_7) + Q_3 A_8]; \tag{145}$$

$$v_1 = v_7 = \frac{D_{mi}^2}{4Eh_i} (p + 4Q_1 k_{11} A_9), \tag{146}$$

$$v_2 = v_5 = \frac{D_{mi}^2}{4Eh_i} [p + 2Q_1 k_{11} X_1 (k_{11} b_i)], \tag{147}$$

$$v_3 = v_6 = \frac{D_m^2}{4Es} [p + 4k_{12}^2 M_2 (A_1 - A_2) - 4k_{12} Q_2 A_3], \tag{148}$$

$$v_4 = v_8 = \frac{D_m^2}{Es} [k_{12}^2 M_2 (A_6 - A_7) - k_{12} Q_3 A_{10}], \tag{149}$$

în care $Q_1 \rightarrow$ (141), $Q_2 \rightarrow$ (139), $Q_3 = Q_1 - Q_2$ și $M \rightarrow$ (140), formulele (143) și (140) fiind, cum era firesc, *identice*. Pentru $M_0 = M_2$ și $Q_0 = Q_2$, sînt de asemenea *identice* formulele (148) și (130), respectiv (144) și (131), ceea ce confirmă corectitutdinea și rigurozitatea analizei efectuate.

6.3. Corecții. Așa cum s-a precizat anticipativ, de regulă, condiția c) nu se poate îndeplini, incompatibilitatea constînd în aceea că deplasările radiale calculate, orientate înspre interior, ale inelelor sînt *mai mari* decît cele ale tubulaturii, în limitele zonelor de conjugare.

Pentru introducerea *corecțiilor* care se impun, într-o a *doua abordare*, se acceptă schema de calcul conform căruia, în zonele de conjugare, inelele și tubulatura structurilor analizate sînt interdependente și, deci, alcătuiesc un *element unitar* (denumit *inel compus*) de lungime b_i, cu diametrul mediu $D_{mi} = 0{,}5\,(D_{ei} + D_i)$ și de grosime totală $h = h_i + s$ (fig. 14). Drept rezultat, o anumită zonă de structură tubulară se descompune în numai două elemente de înveliș cilindric circular (1 — inelul copus și 2 — panoul tubular) și se studiază, distinct, următoarele două cazuri* : 1) inelul compus este *deformabil* prin încovoiere în planul longitudinal al structurii ; 2) inelul compus este *rigid* și, prin urmare, *nedeformabil* prin încovoiere în planul antepreciza t.

6.3.1. Cazul inelelor compuse deformabile. Din condițiile la limită (de contur) în punctele $x_1 = x_2 = 0$:

$$v_1 = v_2 ; \ \vartheta_1 = \vartheta_2, \tag{150}$$

rezultă următorul sistem de două ecuații cu două necunoscute (Q și M) :

$$A_{11} Q + A_{12} M = Cp ; \ A_{12} Q + A_{13} M = 0, \tag{151, 152}$$

* Oricum, încovoierea, în planul longitudinal al structurii tubulare cu inele, a inelelor compuse (cu grosimea $h > h_i$) este *mai mică* decît cea a inelelor propriu-zise (cu grosimea $h_i < h$), care, la rîndul său, este cu *mult mai mică* decît cea a panourilor tubulare (cu grosime $s \ll h_i$).

a cărui rezolvare furnizează următoarele soluţii :

$$Q = -\frac{CA_{13}}{A_{12}^2 - A_{11}A_{13}}p\,; \quad M = \frac{CA_{12}}{A_{12}^2 - A_{11}A_{13}}p. \qquad (153,\ 154)$$

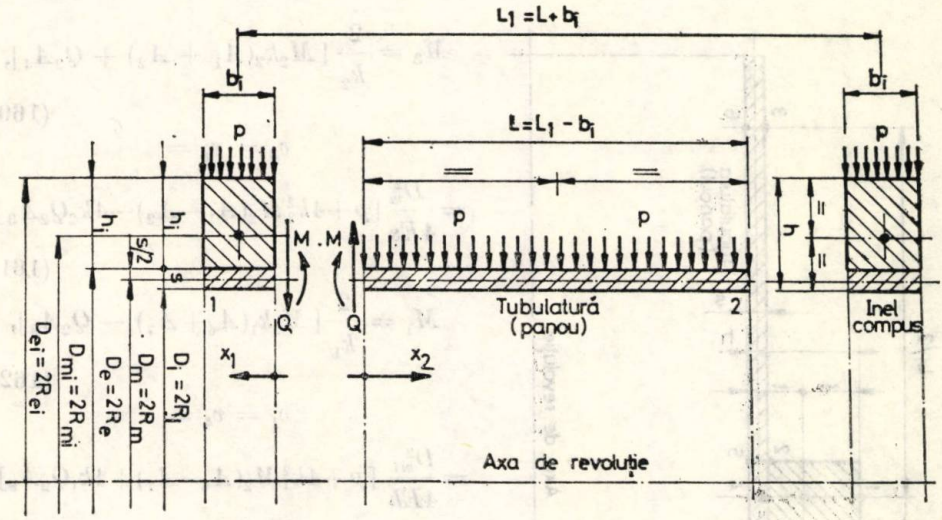


Fig. 14. — Schema de calcul cu două elemente privind stările de solicitare şi deformare-deplasare din structura tubulară rigidizată transversal şi presurizată la exterior.

6.3.2. Cazul inelelor compuse rigide (*nedeformabile*). Din noile condiţii la limită (de contur) în punctul $x_1 = x_2 = 0$:

$$(v_2)_{x_2=0} = v_1\,; \quad (\vartheta_2)_{x_2=0} = 0, \qquad (155)$$

aici v_1 reprezentînd deplasarea radială corespunzătoare inelului compus, în ansamblul său, rezultă următorul sistem nou de două ecuaţii cu două necunoscute (Q şi M) :

$$\frac{D_m^2}{4s}\left[p - 2k_2^2 X_2(k_2L)\,M - 2k_2 X_1(k_2L)Q\right] = \frac{D_{mi}^2}{4h}\left(p + \frac{2Q}{b_i}\right),$$
$$2k_2\,X_3(k_2L)M + X_2(k_2L)\,Q = 0, \qquad (156)$$

prin rezolvarea căruia se obţin soluţiile :

$$Q = pb_i\,\frac{CX_3(k_2L)}{k_2 b_i D_m^2/4s + 2X_3(k_2L)D_{mi}^2/4h}, \qquad (157)$$

$$M = -\frac{Q}{2k_2}\,\frac{X_2(k_2L)}{X_3(k_2L)}. \qquad (158)$$

6.3.3. Starea de solicitare și deplasare-deformare corectată. Pentru punctele reprezentative de analiză ($j = 1, 2, \ldots, 6$), materializate în figura 15, rezultă:

$$v_2 = v_5 = \frac{D_m^2}{4Es}\,[p - 2k_2^2 M_2 X_2(k_2 L) - 2k_2 Q_2 X_1(k_2 L)], \tag{159}$$

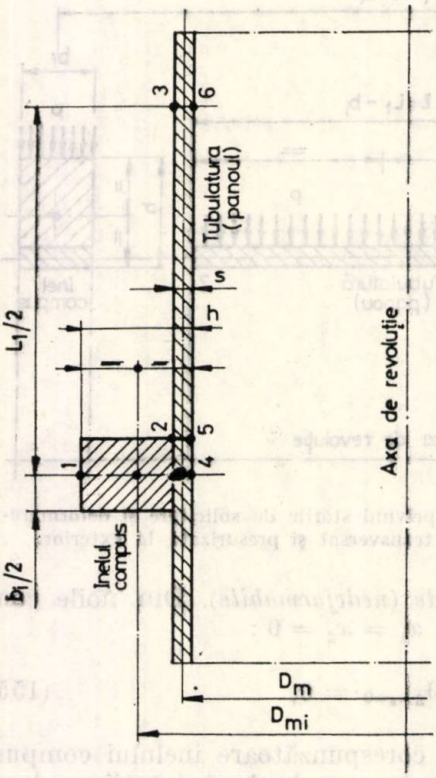


Fig. 15. — Nominalizarea unor puncte reprezentative de analiză a stării de solicitare și deformare-deplasare, corespunzătoare efectelor de contur, pentru schema de calcul cu două elemente.

$$M_3 = \frac{2}{k_2}\,[M_2 k_2 (A_1 + A_2) + Q_2 A_4], \tag{160}$$

$$v_3 = v_6 = \frac{D_m^2}{4Es}\,[p + 4k_2^2 M_2 (A_1 - A_2) - 4k_2 Q_2 A_3], \tag{161}$$

$$M_1 = \frac{2}{k_1}\,[M_2 k_1 (A_6 + A_7) - Q_2 A_8], \tag{162}$$

$$v_1 = v_4 = \frac{D_{mi}^2}{4Eh}\,[p + 4k_1^2 M_2 (A_6 - A_7) + 4k_1 Q_2 A_9], \tag{163}$$

în care:

a) în condițiile inelelor compuse *deformabile*, $Q_2 = Q \rightarrow (153)$ și $M_2 = M \rightarrow (154)$;

b) în condițiile inelelor compuse *rigide* (*nedeformabile*), $M_1 \rightarrow (162) \rightarrow 0$, $(163) \rightarrow 0$, deoarece, conform primei ecuații (155), formula citată își pierde semnificația, astfel că $v_1 = v_2 = v_4 = v_5$ și se determină cu (159), iar — în formulele disponibile (150) ... (161) — $Q_2 = Q \rightarrow (157)$ și $M_2 = M \rightarrow (158)$.

7. CAPACITATEA PORTANTĂ

Într-un anumit punct de analiză $j = 1, 2, \ldots, 8$ (fig. 13), eforturile unitare inelare $\sigma_{j\,ov}$ (în N/mm²), corespunzătoare momentului încovoietor datorit ovalizării M° (formula 100), se determină cu următoarele formule evidente:

— pentru *inele*, în punctele $j = 1,7$ (formula 102);

$$\sigma_{j\,ov} = 0{,}625\, p\, D_{mi} b_i w^0_{max} e_j / I_{ie}; \tag{164}$$

— pentru *tubulatură*, în punctele $j = 2,\ 4,\ 5,\ 8$:

$$\sigma_{j\,ov} = 0{,}625\, pD_m b_i w^0_{max} e_j / I_{ie}; \tag{165}$$

— pentru *tubulatură*, în punctele $j = 3{,}6$:

$$\sigma_{j\,ov} = 0{,}625\, pD_m b_i w^0_{max} e_j / I_{ie} + 0{,}166\, s^3(0{,}5L - 15s), \tag{166}$$

în care e_j reprezintă distanța radială (în mm) a punctului dat j față de fibra neutră a secțiunii (longitudinale) de rezistență, compuse (eficiente), a inelelor de rigidizare.

Avînd în vedere starea de solicitare și deformare-deplasare din structura tubulară analizată și, deci, următoarele eforturi unitare inelare *parțiale*:

$$\sigma_{jv} = 2Ev_j / D_j; \quad \sigma_{jM} = 6\mu M_j / s_j^2, \tag{167, 168}$$

în care $D_j = D_{mi}$ și $s_j = h_i$ pentru punctele $j = 1, 7$, respectiv $D_j = D_m$ și $s_j = s$ pentru punctele $j = 2, \ldots, 6{,}8$, eforturile unitare inelare *rezultante* σ_{tj} (în N/mm²) vor fi:

$$\sigma_{tj} = \sigma_{j\,ov} + \sigma_{jv} + \sigma_{jM},$$

pentru:

$$A_j = p_j^{-1}(\sigma_{jv} + \sigma_{jM}) = p_j^{-1}(2Ev_j / D_j + 6\mu M_j / s_j^2)$$

și (formula 164)

$$B_j = 0{,}625\, D_{mi} b_i w^0_{max} e_j / I_{ie},$$

respectiv (formula 165):

$$B_j = 0{,}625\, D_m b_i w^0_{max} e_j / I_{ie},$$

sau (formula 166):

$$B_j = 0{,}625\, D_m b_i w^0_{max} e_j / I_{ie} + 0{,}166\, s^3(0{,}5L - 15s),$$

la limită ($\sigma_{tj} \to \sigma_{0.2}$) obținîndu-se:

$$p_j(A_j + B_j) = \sigma_{0.2},$$

astfel că se impune următoarea *condiție de securitate tehnică*:

$$p_j < p_{\lim j} = \frac{\sigma_{0.2} - (\sigma_{jv} + \sigma_{jM})}{B_j}. \tag{169}$$

Pentru un factor de securitate egal cu 1,5, față de limita tehnică de curgere $\sigma_{0,2}$, evident, corespunde *restricția*:

$$p_j \leqslant p_{aj} = \frac{0{,}666\,\sigma_{0,2} - (\sigma_{jv} + \sigma_{jM})}{B_j}, \tag{170}$$

utilizabilă ca atare în practică.

Așadar, evaluarea capacității portante a structurilor tubulare rigidizate transversal și presurizate la exterior, folosind ecuații de forma și tipul (169, 170) implică utilizarea metodei iterației.

Evident, pentru starea *nouă* de solicitare și deplasare-deformare, *corectată*, capacitatea portantă a structurilor tubulare în discuție se va putea evaula și interpreta în conformitate cu preceptele expuse.

NOTAȚII

$D_i = D_m - s$, D_m, $D_e = D_m + s$ reprezintă diametrele de calcul interior, mediu și, respectiv, exterior ale peretelui de rezistență și/sau stabilitate al structurii tubulare de tip manta, tubulatură (T) etc., în mm;

D_{it}, D_{et} — diametrele tehnologice interior și exterior ale peretelui structurii tubulare date, în mm;

$D_{ei} = 2R_{ei}$, $D_{mi} = 2R_{mi} = D_{ei} - h$, $D_{ii} = 2R_{ii}$ — diametrele exterior, mediu și interior ale corpului de rezistență al dispozitivelor (inelelor) de rigidizare transversală, în mm; evident, din motive constructive și de montare, în general, $D_{ii} > D_{et}$, adoptîndu-se $D_{ii} = D_{et} + (3 \ldots 5)$ mm;

R_1, $R_2 < R_1$ — razele de curbură principale, în mm;

r — raza cercului paralel, în mm;

$s_1 = s + s_a$ — grosimea totală a peretelui structurii tubulare, în mm;

$s = 0{,}5(D_e - D_i) = (s_1 - s_a)$ — grosimea de calcul a peretelui de rezistență și/sau stabilitate al structurii tubulare de tip manta, tubulatură (T) etc., în mm;

$s_a = (s_1 - s) = (s_{ai} + s_{ae})$, s_{ai}, s_{ae} — adaosurile de grosime total (s_a), interior (s_{ai}) și exterior (s_{ae}), în mm;

$b = b_i$, $h = h_i$ — lățimea și înălțimea profilului transversal al (secțiunii transversale de calcul a) dispozitivelor (inelelor) de rigidizare transversală, în mm;

L_1 — distanța dintre planurile succesive ale rigidizărilor transversale, respectiv pasul (echidistant) dintre dispozitivele (inelele) de rigidizare transversală consecutive, în mm;

L — distanța dintre dispozitivele (inelele) de rigidizare transversală consecutive, respectiv lungimea panourilor tubulare netede (nerigidizate transversal), în mm;

L_t, H — lungimea (înălțimea) totală a structurii tubulare de tip manta cilindrică, tubulatură etc., în mm;

L_e — lungimea efectivă de conlucrare, în limitele zonei echivalente de rigidizare transversală, în mm;

$l_s \leqslant 8s$, $l'_s \leqslant 8s$ — lungimea sudurilor discontinue de solidarizare (IR—T) și, corespunzător, a spațiilor nesudate alternate cu sudurile de solidarizare S (fig. 1), în mm;

e — distanța de la suprafața mediană SM pînă la centrul geometric al secțiunii transversale a dispozitivelor IR, în mm;

z — distanța de la suprafața mediană SM pînă la centrul geometric al secțiunii transversale combinate, cuprinzînd secțiunea transversală a dispozitivelor IR și o fîșie de manta sau tubulatură (T) cu lungimea efectivă $0{,}5\ L_e$ de o parte și de cealaltă parte a dispozitivului IR dat, în mm;

A_m, A_t, W_m, W_t — aria (A), în mm² și modulul axial de rezistență (W), în mm³, ale secțiunii transversale de calcul a unui anumit element (perete etc.);

$A_i(= b_i b_i)$ și $I_i(= b_i h_i^3/12)$ — aria, în mm² și momentul de inerție geometric, în mm⁴, ale secțiunii transversale a dispozitivelor (inelelor) de rigidizare IR;

$A_{ie} = A_i + (b_i + 30\ s)s$ — aria secțiunii transversale de rezistență, compuse (eficiente), a inelelor de rigidizare, în mm²;

I_{ie} și $W_{ie} = I_{ie}/z$ — momentul de inerție geometric, în mm⁴ și modulul èe rezistență, în mm³, ale secțiunii transversale de rezistență, compuse (eficiente), a inelelor de rigidizare;

V_f — volumul fundului, în mm³;

u — deplasarea după direcția axei x, adică *longitudinală*, a unui punct $M \in SM$, în mm;

v — deplasarea după direcția axei z, adică *radială* → *diametrală*, a aceluiași punct $M \in SM$, în mm;

w, w_0 — deplasările radială curentă și radială maximă ale inelelor de rigidizare solicitate, apărute ca efecte ale distorsionării formei inițiale perfect circulare, în mm;

Δr — variația (lungirea, scurtarea) razei cercului paralel, în mm;

Δ — deplasarea axială (longitudinală) a structurii tubulare, în ansamblul său, în mm;

ϑ — rotirea elementului (meridianului) sau structurii, în rad;

φ — deschiderea unui punct curent $M \in SM$, în rad sau grd;

ε_{10} — deformația (lungirea) specifică maximă, eventual în %, în domeniul de proporționalitate al materialelor tehnice, de bază, utilizate;

$\varepsilon_1 = \varepsilon_x = \varepsilon_m$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_y = \varepsilon_t$ — deformația specifică longitudinală și, respectiv, inelară, eventual în %;

σ_{10} — limita tehnică de proporționalitate a materialelor tehnice date, în N/mm²;

$\sigma_c = \sigma_{0,2}$ — limita tehnică de curgere a materialelor tehnice date, în N/mm²;

σ_a — rezistența admisibilă a materialului de bază pentru solicitarea statică de întindere, în N/mm²;

$\sigma_{ac} = (1{,}30 \ldots 1{,}50)\ \sigma_a$ — rezistența admisibilă a materialului de bază pentru solicitarea statică de compresiune, în N/mm²;

E — modulul de elasticitate longitudinal (modulul lui Young) al materialului peretelui structurii tubulare date, în N/mm²;

μ — coeficientul de contracție transversală (coeficientul lui Poisson) pentru materialul peretelui;

$D = Es^3/12(1 - \mu^2)$ — rigiditatea la încovoiere (rigiditate cilindrică) a structurii tubulare de tipul învelișului de revoluție, în N.mm;

$p = p_e$ — presuinea exterioară uniformă de calcul, în N/mm²;

p_x, p_z — presiunile (sarcinile unitare, forțele exterioare unitare) de calcul, care revin în lungul coordonatelor x (longitudinal) și z (radial), în N/mm²;

$q = p.1$ — sarcina exterioară unitară, în N/mm, ea reprezentînd rezultanta așa-numitei presiuni exterioare p, în N/mm², ce revine unității de lungime din perimetrul median $2\pi R_{mi} = \pi D_{mi}$ al inelului circular;

γ_e — greutatea volumică a fluidului de lucru exterior care exercită presurizarea hidrostatică, în N/mm³;

$N_x = N_m$, $N_y = N_t$, Q — eforturile normale longitudinal (N_m) și inelar (N_t), respectiv eforturile transversale (Q), din suprafața mediană, în N/mm;

M_m, M_t — momentele încovoietoare (interioare) longitudinale și inelare, în suprafața mediană, în (N.mm)/mm;

σ — efortul unitar normal, în general, în N/mm²;

$\sigma'_m = N_m/A_m = N_m/1.s$, $\sigma''_m = \pm M_m/W_m = \pm 6M_m/1.s^2$, $\sigma_m = \sigma'_m + \sigma''_m = N_m/s \pm 6M_m/s^2$ — eforturile unitare normale longitudinale (axiale), în N/mm²;

$\sigma'_t = N_t/A_t = N_t/1.s$, $\sigma''_t = \pm M_t/W_t = \pm 6M_t/1.s^2$, $\sigma_t = \sigma'_t + \sigma''_t = N_t/s \pm \pm 6M_t/s^2$ — eforturile unitare normale inelare (circumferențiale), în N/mm²;

σ_{max} — efortul unitar normal maxim, în general, în N/mm²;

$\tau = Q/A_m = Q/1.s$ — efortul unitar transversal (tangențial), în N/mm²;

P_0 — rezultanta sarcinilor uniforme sau a eforturilor uniforme ce revin conturului *transversal* liber sau acționează pe conturul *transversal* respectiv, în N;

Q_0 — sarcina (efortul transversal) de contur, în N/mm;

M_0 — momentul încovoietor (sau efortul corespunzător) de contur, în (N.mm)/mm;

φ_s — coeficientul de rezistență al sudurilor; așa cum se cunoaște, pentru solicitările de compresiune, în general, $\varphi_s = 1{,}00$;

$$k_1 = k_2 = k_{12} = \sqrt[4]{3(1 - \mu)^2}/\sqrt{0{,}5\, D_m s},$$

$$k_{11} = \sqrt[4]{3(1 - \mu^2)}/\sqrt{0{,}5 D_{mi} h_i}, \quad k_3 = \sqrt[4]{3(1 - \mu^2)}/\sqrt{0{,}5\ D_{mi}(h_i + s)}$$ — așa-numiții factori de atenuare, în mm^{-1};

$$A_1 = \frac{\operatorname{ch} 0{,}5k_1L \sin 0{,}5k_1L}{\operatorname{sh} k_1L + \sin k_1L}; \quad A_2 = \frac{\operatorname{sh} 0{,}5k_1L \cos 0{,}5k_1L}{\operatorname{sh} h_1L + \sin k_1L};$$

$$A_3 = \frac{\operatorname{ch} 0{,}5k_1L \cos 0{,}5k_1L}{\operatorname{sh} k_1L + \sin k_1L}; \quad A_4 = \frac{\operatorname{sh} 0{,}5k_1L \sin 0{,}5k_1L}{\operatorname{sh} k_1L + \sin k_1L};$$

$$A_5 = \frac{\operatorname{sh} 0{,}5k_{11}b_i \sin 0{,}5k_{11}b_i}{\operatorname{sh} k_{11}b_i + \sin k_{11}b_i}\,; \quad A_6 = \frac{\operatorname{ch} 0{,}5k_{12}b_i \sin 0{,}5k_{12}b_i}{\operatorname{sh} k_{12}b_i + \sin k_{12}b_i}\,;$$

$$A_7 = \frac{\operatorname{sh} 0{,}5k_{12}b_i \cos 0{,}5\, k_{12}b_i}{\operatorname{sh} k_{12}b_i + \sin k_{12}b_i}\,; \quad A_8 = \frac{\operatorname{sh} 0{,}5k_{12}b_i \sin 0{,}5k_{12}b_i}{\operatorname{sh} k_{12}b_i + \sin k_{12}b_i}\,;$$

$$A_9 = \frac{\operatorname{ch} 0{,}5k_{11}b_i \cos 0{,}5k_{11}b_i}{\operatorname{sh} k_{11}b_i + \sin k_{11}b_i}\,; \quad A_{10} = \frac{\operatorname{ch} 0{,}5k_{12}b_i \cos 0{,}5k_{12}b_i}{\operatorname{sh} k_{12}b_i + \sin k_{12}b_i}\,;$$

$$A_{11} = \frac{k_3 D_{mi}^2}{2h} X_1(k_3 b_i) + \frac{k_2 D_m^2}{2s} X_1(k_2 L)\,;$$

$$A_{12} = -\frac{k_3^2 D_{mi}^2}{2h} X_2(k_3 b_i) + \frac{k_2^2 D_m^2}{2s} X_2(k_2 L),\ \text{în mm}^{-1}\,;$$

$$A_{13} = \frac{k_3^3 D_{mi}^2}{h} X_3(k_3 b_i) + \frac{k_2^3 D_m^2}{s} X_3(k_2 L),\ \text{în mm}^{-2}\,;$$

$$C = D_m^2/4s - D_{mi}^2/4h,\ \text{în mm}\,;$$

$$X_1(k_1 L) = X_1(k_{12} L) = \frac{\operatorname{ch} k_1 L + \cos k_1 L}{\operatorname{sh} k_1 L + \sin k_1 L}\,;$$

$$X_2(k_1 L) = X_2(k_{12} L) = \frac{\operatorname{sh} k_1 L - \sin k_1 L}{\operatorname{sh} k_1 L + \sin k_1 L}\,;$$

$$X_3(k_1 L) = X_3(k_{12} L) = \frac{\operatorname{ch} k_1 L - \cos k_1 L}{\operatorname{sh} k_1 L + \sin k_1 L}\,;$$

$$X_1(k_{11} b_i) = \frac{\operatorname{ch} k_{11}b_i + \cos k_{11}b_i}{\operatorname{sh} k_{11}b_i + \sin k_{11}b_i}\,;$$

$$X_1(k_{12} b_i) = \frac{\operatorname{ch} k_{12}b_i + \cos k_{12}b_i}{\operatorname{sh} k_{12}b_i + \sin k_{12}b_i}\,;$$

$$X_2(k_{12} b_i) = \frac{\operatorname{sh} k_{12}b_i - \sin k_{12}b_i}{\operatorname{sh} k_{12}b_i + \sin k_{12}b_i}\,;$$

$$X_3(k_{12} b_i) = \frac{\operatorname{ch} k_{12}b_i - \cos k_{12}b_i}{\operatorname{sh} k_{12}b_i + \sin k_{12}b}\,;$$

$$X_1(k_1b_i) = \frac{\operatorname{ch} k_1b_i + \cos k_1b_i}{\operatorname{sh} k_1b_i + \sin k_1b_i}\,; \quad X_2(k_1b_i) = \frac{\operatorname{sh} k_1b_i - \sin k_1b_i}{\operatorname{sh} k_1b_i + \sin k_1b_i}\,;$$

$$X_3(k_1b_i) = \frac{\operatorname{ch} k_1b_i - \cos k_1b_i}{\operatorname{sh} k_1b_i + \sin k_1b_i}\,; \quad X_1(k_2L) = \frac{\operatorname{ch} k_2L + \cos k_2L}{\operatorname{sh} k_2L + \sin k_2L}\,;$$

$$X_2(k_2L) = \frac{\operatorname{sh} k_2L - \sin k_2L}{\operatorname{sh} k_2L + \sin k_2L}\,; \quad X_3(k_2)L = \frac{\operatorname{ch} k_2L - \cos k_2L}{\operatorname{sh} k_2L + \sin k_2L}\,;$$

$$2X_1X_3 - X_2^2 = 1\,;$$

$$X_5 = X_2(k_{12}L) - X_2(k_{12}b_i)\,; \quad X_6 = X_3(k_{12}L) + X_3(k_{12}b_i)\,;$$

$$X_7 = X_1(k_{12}L) + X_1(k_{12}b_i)\,; \quad X_9 = X_5^2 - 2X_6X_7\,;$$

$$X_{10} = X_1(k_{12}b_i)\,X_5 + X_2(k_{12}b_i)\,X_7\,;$$

$$X_{11} = 2X_1(k_{12}b_i)\,X_6 + X(k_{12}b_i)\,X_5\,; \quad X_{12} = X_{11}X_9^{-1}\,;$$

$$X_{13} = X_1(k_{12}b_i)\,(1 + X_{12}) + X_2(k_{12}b_i)\,X_{10}X_9^{-1}\,;$$

SIR, *SM*, *SER* — suprafeţele interioară, mediană şi, respectiv, exterioară ale peretelui de rezistenţă (stabilitate) al structurii tubulare de tip manta sau tubulatură (T);
SIT, *SET* — suprafeţele interioară şi exterioară tehnologice;
AR — axa de revoluţie;
IR — dispozitivele (inelele) de rigidizare transversală;
S — sudurile de solidarizare.

Notă. Mărimile de tip ε sînt *deformaţii* (specifice), iar celelalte mărimi (u, v, ϑ, Δr) sînt *deplasări*, uneori Δr putînd avea şi semnificaţia unei *deformaţii liniare*.

Primită la redacţie la 11 octombrie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. K.Z. GALIMOV, *Osnovî nelineinoi teorii tonkih obolocek*, Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1975.
2. A. PAVEL, *Elemente de inginerie mecanică (pentru petrochimie)*, Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1981, p. 158—181, 184—189, 203—205 şi 219—232.
3. V.Z. VLASOV, *Obşciaia teoria obolocek i ee prilojenia v tehnike*, Moskva, Gostehizdat, 1949; *Izbrannie trudî*, Moskva, Izd. An SSSR, 2 vol., 1962; *The general theory of shells and its industrial applications*, NASA TT F—99, 1964.
4. E. REISSNER, *A new derivation of the equations for the deformation of elastic shells*, Amer. J. Math., **63**, p. 177—184 (1941); *Stress strain relation in the theory of thin elastic shells*, J. Math. and Phys., **31**, p. 109 (1952); *On axi-symmetrical deformations on thin shells of revolution*, Proc. Symp. Apl. Math., Amer. Math. Soc., 1957, vol. 3, p. 27; *On finite symmetrical deflections of thin shells of revolution*, Trans. ASME, 1969, Series E, **36**, 2.

5. A. LOVE, *Treatise on the mathematical theory of elasticity*, New York, Dover Publications, 1944 (v. şi Phil. Trans. Roy. Soc., 1888, vol. A 179).
6. V.V. NOVOJILOV, *Teoria tonkih obolocek*, Moskva, Oboronghiz, 1941 şi Leningrad, Sudostroenie, 1951 şi 1962; *Osnovi nelineinoi teorii uprugosti*, Moskva, Gostehizdat, 1948; *The theory of thin shells*, Groningen — The Netherlands, P. Noordhoff Ltd., 1959.
7. A.L. GOLDENVEIZER, *Theory of thin elastic shells*, New York, Pergamon Press, 1961; *Teoria uprughih tonkih obolocek*, Moskva, Gostehizdat, 1953 şi Moskva, Nauka, 1976.
8. H.M. MUŞTARI, *Nekotorie obobşcenia teorii tonkih obolocek*, Izv. fiz.-mat. obşcestva pri Kazanskom Univ., 1938, **XI**, ser. 8.
9. H.M. MUŞTARI, K.Z. GALIMOV, *Nelineinaia teoria uprughih obolocek*, Kazan, Tatkingoizdat, 1957.
10. S. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKI-KRIEGER, *Theory of plates and shells*, New York, Mc Graw-Hill, 1959; *Teoria plăcilor plane şi curbe*, Bucureşti, Editura tehnică, 1968.

O METODĂ DE EVALUARE A OBOSELII ROCILOR

de D. BRATOSIN
Centrul de Fizica Pămîntului și Seismologie

Lucrarea are ca obiect determinarea în laborator a diminuării rezistenței de rupere a rocilor sub acțiunea sarcinilor dinamice și obținerea unei curbe Wöhler ținînd cont de neomogenitatea probelor.

1. INTRODUCERE

Deseori rocile sînt supuse unor solicitări dinamice datorate seismelor, exploziilor, traficului rutier și feroviar, vibrațiilor fundațiilor de mașini etc. Pentru siguranța construcțiilor fundate pe astfel de roci este necesară evaluarea influenței acestor solicitări asupra proprietăților mecanice ale rocilor, influență ce se poate manifesta prin apariția fenomenelor de oboseală.

Oboseala materialelor a fost intens studiată în special la metalele din componența organelor de mașini. Există numeroase studii efectuate pe metale atît în scopul elucidării mecanismului de rupere prin oboseală, cît și în scopul furnizării datelor de proiectare [6], [7].

Atunci cînd caracteristicile solicitării dinamice sînt cunoscute, se determină experimental reducerea rezistenței de rupere în funcție de numărul de cicluri, obținîndu-se o curbă cunoscută sub denumirea de curba lui Wöhler. La determinarea curbei Wöhler se utilizează epruvete provenite din aceeași șarjă, identice ca formă și grad de prelucrare deoarece procedeul de determinare se bazează pe compararea rezistenței de rupere a unor epruvete solicitate cu un anumit număr de cicluri cu rezistența de rupere statică obținută prin ruperea altor epruvete.

Acest procedeu a fost aplicat și în cazul unor roci naturale (marmore, gresii) sau artificiale (ipsos, beton), încercări ce au relevat diminuări importante ale rezistențelor de rupere [3]. Însă, datorită neomogenității pronunțate a majorității rocilor, rezistențele de rupere ale probelor diferă apreciabil, ceea ce face deosebit de dificilă compararea rezistenței de rupere a unei probe solicitată cu un anumit număr de cicluri înainte de a fi ruptă cu rezistența de rupere statică determinată pe altă probă.

În această lucrare se va prezenta un procedeu de obținere a unei curbe Wöhler normalizată, procedeu asemănător celui utilizat la metale dar care evită compararea datelor obținute pe probe diferite prin utilizarea corelației dintre rezistența de rupere și densitatea unei probe. Procedeul va fi exemplificat utilizînd datele obținute prin încercări în triaxial a unor probe de calcar, încercări efectuate în laboratorul de mecanică a pămînturilor din Centrul de Fizica Pămîntului și Seismologie.

2. CORELAȚIA S—ρ

Pentru a putea determina reducerea rezistenței de rupere datorată exercitării unui anumit număr de cicluri fără a apela la compararea cu rezistența de rupere a altei probe este necesară evaluarea rezistenței de

rupere pe care proba a avut-o înainte de a fi solicitată ciclic. În acest scop vom folosi relaţia direct proporţională care există între rezistenţa de rupere S a unei probe şi densitatea sa ρ.

Prin rezistenţa de rupere a unei probe S vom înţelege valoarea intensităţii tensiunilor tangenţiale τ care provoacă ruperea, valoare determinată în triaxial pe drumul în tensiuni corespunzător solicitării dinamice date. Deci, rezistenţa de rupere corespunde punctului în care drumul în tensiuni impus intersectează suprafaţa de rupere [1], [5].

În aparatul de compresiune axial-simetrică cunoscut sub denumirea de „triaxial" unei probe cilindrice (uzual cu $h = 8$ cm şi $\varnothing = 3{,}5$ cm) i se impune o stare de tensiune axial-simetrică cu $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$ [2] astfel că invariantul τ va avea expresia

$$\tau = \sqrt{-2J_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,(\sigma_1 - \sigma_2), \tag{2.1}$$

unde J_2 este al doilea invariant al deviatorului tensorului tensiune:

$$J_2 = -\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \tag{2.2}$$

Drumurile în tensiuni ce pot fi impuse în triaxial sînt situate în planul $\sigma_2 = \sigma_3$ al spaţiului tensiunilor principale (fig. 1) şi pot fi astfel alese încît să fie cît mai apropiate solicitării exterioare anailzate. Astfel, în cazul cînd solicitarea dinamică dată este compusă din vibraţiile verticale ce se suprapun peste o stare de tensiune iniţială — cazul solicitărilor date de fundaţiile de maşini sau de trafic — drumul în tensiuni indicat este drumul „cu presiune laterală constantă" (*1* din fig. 2), iar în cazul cînd solicitarea exterioară o constituie undele de forfecare date de seisme sau explozii mai indicat este ca în triaxial să se impună drumul cu „presiune medie constantă" (*2* din fig. 2). Ambele drumuri au ca punct de plecare punctul din spaţiul invarianţilor corespunzător stării iniţiale de tensiune (*A* din fig. 2).

Încercînd la rupere n probe cu densităţi diferite prelevate din amplasamentul analizat, se poate stabili o corelaţie $S - \rho$ prin prelucrarea statistică a valorilor S_i, $\rho_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ cu o metodă de regresie liniară sau polinomială [4]. Dacă se alege regresia liniară, corelaţia $S - \rho$ ia forma:

$$S = a\rho + b \pm \delta_1, \tag{2.3}$$

unde a şi b sînt coeficienţii regresiei:

$$a = \frac{n\sum_i^{1,n} S_i\rho_i - \sum_i^{1,n} S_i \sum_i^{1,n} \rho_i}{n\sum_i^{1,n} \rho_i^2 - \left(\sum_i^{1,n} \rho_i\right)^2}; \qquad b = \frac{1}{n}\left(\sum_i^{1,n} S_i - a\sum_j^{1,n} \rho_i\right), \tag{2.4}$$

ρ este densitatea materialului,

$$\rho = W/(Vg), \tag{2.5}$$

relație în care s-a notat cu W greutatea probei, cu V volumul său și cu g accelerația gravitațională, iar δ_1 este dispersia valorilor experimentale față de dreapta $S = a\rho + b$.

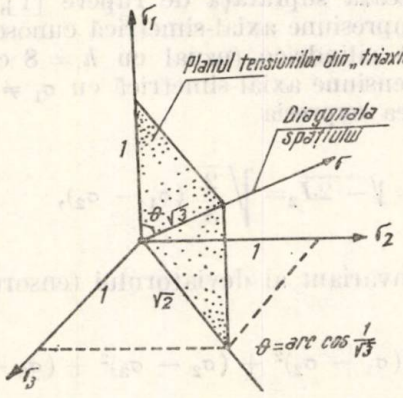


Fig. 1

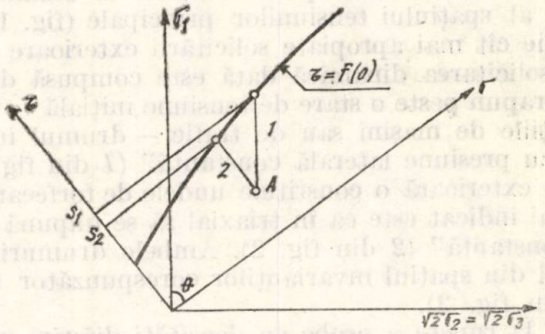


Fig. 2

Se poate astfel evalua o rezistență de rupere statică probabilă, S', fără a distruge proba care poate fi ulterior încercată la oboseală. Însă, deoarece erorile date de corelația (2.3) sînt minime numai pentru domeniul de valori ρ_i cu care a fost obținută, densitatea probei pentru care se calculează S' trebuie să fie cuprinsă în domeniul de valori ρ_i utilizat la stabilirea corelației.

3. CURBA WÖHLER NORMALIZATĂ

Utilizînd corelația rezistență de rupere — densitate, se poate determina și în cazul materialelor neomogene, ca rocile, o curbă de reducere a rezistenței de rupere asemănătoare curbei Wöhler.

Mai întîi se determină rezistența de rupere statică probabilă S' a unei probe cu ajutorul corelației (2.3) cu densitatea stabilită anterior pe probe provenite din același amplasament. Apoi, se solicită ciclic această probă cu o amplitudine apropiată dar inferioară valorii S', determinîndu-se fie numărul de cicluri care au provocat ruperea, fie rezistența de rupere S după un anumit număr de cicluri, caz în care se întrerupe solicitarea ciclică și se încarcă proba pînă la rupere.

Raportul $R = S/S'$ va fi o măsură a diminuării rezistenței de rupere datorată exercitării ciclurilor respective, diminuare evaluată pe aceeași probă.

Repetînd procedeul de mai sus cu n probe, fiecare cu o altă amplitudine sau număr de cicluri N, se pot obține prechi de valori R_i, $N_i (i = 1, 2, \ldots n,)$ la care se adaugă punctul $R = 1$ pentru $N = 1$. Prin prelucrarea acestor valori se poate obține o relație $R = f(N)$ într-o formă care să se apropie cît mai mult de distribuția experimentală obținută.

O astfel de formă este și exponențiala

$$R = p + qe^{-r \ln N}, \tag{3.1}$$

formă curent folosită pentru curbe Wöhler corespunzătoare unor solicitări ciclice pulsatorii sub limita de curgere. Cum, în general, rocile au o comportare tensiune-deformație aproape liniară cu o rupere bruscă, casantă, exponențiala (3.1) poate fi acceptată.

Determinarea constantelor conținute în relația (3.1) se poate face în două etape: într-o primă etapă se calculează asimptota p, iar apoi, translatînd axa absciselor în asimptotă se determină parametrii q și r [8]. Astfel, din ecuație (3.1) se obține

$$\ln N = \frac{1}{r} \ln \frac{R - p}{q}. \tag{3.2}$$

Alegînd trei valori N_i astfel ca

$$\ln N_3 = \frac{1}{2} (\ln N_1 + \ln N_2), \tag{3.3}$$

din ecuația (3.2) se obține

$$\frac{1}{r} \ln \frac{R_3 - p}{q} = \frac{1}{2r} \left(\ln \frac{R_1 - p}{q} + \ln \frac{R_2 - p}{q} \right) =$$

$$= \frac{1}{r} \ln \sqrt{\frac{(R_1 - p)(R_2 - p)}{q^2}},$$

de unde rezultă

$$p = \frac{R_1 \cdot R_2 - R_3^2}{R_1 + R_2 - 2R_3}, \tag{3.4}$$

relaţie cu care se poate obţine asimptota p în funcţie de trei valori R_i corespunzătoare valorilor N_i care îndeplinesc condiţia (3.3). Desigur, este indicat ca experimentările să fie astfel conduse încît să se poată obţine trei valori N_i care să îndeplinească condiţia (3.3), iar valorile N_1 şi N_2 să fie cît mai distanţate.

Efectuînd translaţia $y = R - p$ şi notînd $x = \ln N$, ecuaţia (3.1) ia forma:

$$y = q\, e^{-rx}$$

care, prin logaritmare, se transformă în ecuaţia liniară:

$$Y = Q - rx,$$

ai cărei coeficienţi $Q = \ln q$ şi r pot fi obţinuţi aplicînd metoda regresiei liniare datelor experimentale $Y_i = \ln(R_i - p)$ şi $x_i = \ln N_i$. Se obţin astfel şi ultimii doi parametri ai exponenţialei (3.1), r direct, iar q din inversarea $q = e^Q$.

Însă, ecuaţia (3.1) astfel determinată va fi afectată de o anumită eroare δ_2 provenită atît din calculul asimptotei p, cît şi din abaterile ecuaţiei (3.7) faţă de distribuţia dată. În plus, ţinînd cont că valorile rezistenţelor de rupere statice probabile care au intervenit în determinarea ecuaţiei (3.1) sînt afectate de erorile δ_1 ale corelaţiei (2.3), zona de dispersie a ecuaţiei, (3.1) va trebui extinsă prin însumarea celor două abateri δ_1 şi δ_2.

Exponenţiala (3.1) poate fi considerată ca ecuaţia unei curbe Wöhler normalizată în raport cu rezistenţa de rupere statică şi poate fi utilizată prin comparare cu valorile raportului R' dintre intensitatea maximă a tensiunilor tangenţiale a solicitării dinamice date şi rezistenţa de rupere statică minimă a rocii investigate.

Valorile R' situate sub asimptota curbei, deci inferioare rezistenţei la oboseală, vor indica o comportare bună a rocii, indiferent de numărul de cicluri — condiţie ce trebuie îndeplinită de solicitările date de fundaţiile de maşini şi de traficul rutier sau feroviar.

În cazul solicitărilor dinamice puternice dar cu un număr redus de cicluri — seisme, explozii — valorile R' se pot situa peste asimptotă în domeniul de durabilitate limitată. În acest caz curba (3.1) poate fi utilizată pentru evaluarea rezistenţei pe care se poate sconta în exploatarea ulterioară.

4. EXEMPLU

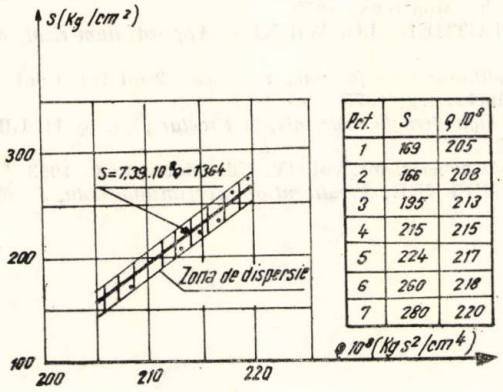
În laboratorul de mecanică a pămînturilor din Centrul de Fizica Pămîntului şi Seismologie Bucureşti au fost efectuate încercări în scopul evaluării rezistenţei la oboseală a unui calcar solicitat de vibraţiile sinusoidale verticale date de fundaţia unei maşini, vibraţii ce se suprapun peste o stare iniţială de tensiune dată de greutatea proprie a construcţiei.

Atît încercările de rupere, cît şi încercările ciclice au fost efectuate în triaxial pe drumul cu „presiune laterală constantă", punctul de plecare fiind punctul corespunzător tensiunilor date de sarcina statică ($\sigma_1 = 3$ daN/cm^2, $\sigma_2 = \sigma_3 = 1{,}5$ daN/cm^2).

Au fost rupte mai întîi şapte probe de densităţi diferite şi s-a obţinut o corelaţie liniară $S - \rho$,

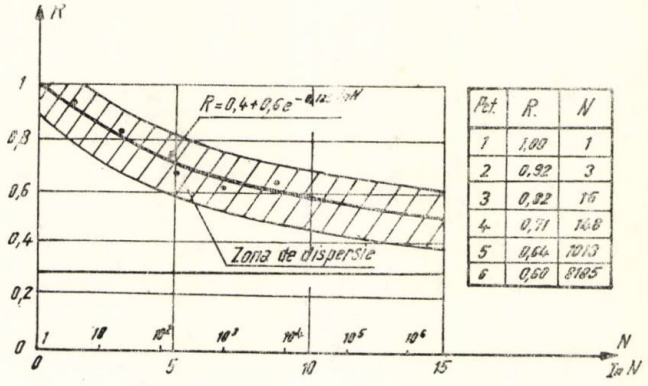
$$S = 7{,}39 \cdot 10^8 \rho - 1364 \pm 20,$$

unde rezistenţa de rupere S este dată în daN/cm^2, iar densitatea ρ în daN.s^2/cm^4 (fig. 3).



Pct.	S	ρ 10⁸
1	169	205
2	166	208
3	195	213
4	215	215
5	224	217
6	260	218
7	280	220

Fig. 3



Pct.	R	N
1	1,00	1
2	0,92	3
3	0,82	16
4	0,71	108
5	0,64	7013
6	0,60	81685

Fig. 4

Au fost, apoi, solicitate cu cicluri pulsatorii cinci probe, cu amplitudini între 0,6—0,9 din rezistenţa de rupere statică probabilă, determinîndu-se numărul de cicluri care au provocat ruperea. S-a obţnut curba Wöhler normalizată:

$$R = 0{,}4 + 0{,}6\, e^{0{,}125 \ln N}$$

cu o zonă de dispersie $\delta = \pm 0{,}12$ (fig. 4).

În cazul investigat, valoarea raportului R' dintre intensitatea tensiunilor tengențiale date de solicitări și rezistența de rupere statică minimă a fost sub asimptotă la zona de dispersie ($R = 0{,}28$), fapt ce a indicat ca improbabilă apariția fenomenelor de oboseală.

Primită la redacție la 18 mai 1982

BIBLIOGRAFIE

1. K. AKAI, T. ADACHI, K. NISHI, *Mechanical properties of soft rocks*, 9-th Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Tokio, 1977.
2. D. BRATOSIN, *Un model elastic neliniar pentru pământuri*, St. cerc. mec. apl., *4*, 1977.
3. G. BRIGHENTI, *Mechanical behaviour of rocks under fatigue*, 4-th Congr. of the Int. Soc. of Rocks Mech., Montreux, 1979.
4. B. CARNAHAN, N.A. LUTHER, J.O. WILKES, *Applied numerical methods*, J. Wiley, 1969.
5. G. GUDEHUȘ, *On constitutive laws for soils and rocks*, 2-nd Int. Conf. on Num. Meth. in Geomech., Blacksburg, 1976.
6. M. RONAY, *Fatigue of high-strength materials*, în *Fracture*, ed. by H. LIEBOWITZ, Academic Press, 1971.
7. S. NĂDĂȘAN, *Rezistența materialelor*, vol. IV, Ed. Did. și Ped., 1963.
8. A.G. WORTHING, I. GEFFNER, *Treatment of experimental data*, J. Wiley, 1955.

RECENZII

GÜNTHER SCHMIDT. Grundlagen der Regelungstechnik (Bazele tehnicii reglărilor) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1981, cu 152 figuri, 22 tabele, 62 exemplare.

Manualul se adresează studenților institutelor politehnice, și cuprinde modelarea matematică a diferitelor sisteme de reglare, descrierea comportării și a stabilității lor, precum și elaborarea unor sisteme de reglare liniare și neliniare simple. Datorită faptului că automatizarea a pătruns în toate domeniile vieții, manualul poate fi folosit cu succes de oricine dorește să-și completeze cunoștințele cu problematica tehnicii reglării.

Materialul tratat este organizat în șase capitole, astfel:

În introducere (cap. 1) se descrie tehnica reglării, evoluția ei istorică, dezvoltarea descrierii sistemelor, elementele planului de flux al semnalelor, desfășurarea principială și fluxul semnalelor la sistemele de comandă și reglare, noțiuni ale tehnicii de comandă și reglare precum și alte aspecte privind soluționarea reglării.

Capitolul 2 este dedicat modelării matematice a elementelor circuitelor de reglare. Se face o clasificare a sistemelor și descrierea diferitelor tipuri de sisteme. Se tratează modelarea cu ajutorul unor analogii fizice și normarea sistemelor. Apoi se analizează comportarea și proprietățile elementelor de transfer precum și funcțiile de transfer ale unor elemente liniare de transfer.

În capitolul 3 se discută despre comportarea circuitelor de reglare liniare. Se tratează despre structura de bază a circuitelor de reglare cu o singură buclă, cerințele și proprietățile principiale ale circuitelor de reglare simple, puncte de vedere la alegerea circuitului de reglare, precum și exemple tipice de regulatoare liniare.

Capitolul 4 se ocupă de stabilitatea circuitelor de reglare liniare, de definiții ale stabilității, diferite criterii de stabilitate, metode pentru verificarea stabilității.

În capitolul 5 se prezintă modul de elaborare a comportării circuitului de reglare insistindu-se asupra cerințelor elaborării circuitului de reglare, procedeelor sistematice de încercare ale circuitului de reglare, optimizării parametrilor reglării, dimensionării parametrilor de reglare cu ajutorul unor reguli specifice și măsurilor pentru îmbunătățirea comportării reglării și lărgirea structurii de reglare.

Ultimul capitol, al 6-lea, tratează despre reglaje neliniare simple.

Pentru mai buna orientare a cititorului există un index cu notațiile și prescurtările cele mai importante utilizate în carte, un index cu noțiunile de specialitate întîlnite în manual precum și o bibliografie pentru completarea cunoștințelor expuse.

Tratarea didactică a materialului, cu mult e exemple, scheme și diagrame permite o citire ușoară și asimilare rapidă a conținutului manualului.

Gerhard Winter

KARLHEINZ ROTH. Konstruieren mit Konstruktionskatalogen. (Proiectarea cu ajutorul cataloagelor de proiectare) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.
Cu 276 figuri și 3000 de reprezentări individuale, 38 cataloage de proiectare precum și 476 definiții ale unor noțiuni de specialitate.

Cartea se adresează proiectanților din toate domeniile construcției de mașini, aparate și utilaje, studenților din institutele politehnice de specialitate, cadrelor didactice și cercetătorilor din domeniul sus-amintit, precum și cititorilor care activează în domenii înrudite, ca, de exemplu, construcțiile civile și industriale, electrotehnica, tehnologia construcției de mașini, fizica și care sînt interesați să se familiarizeze cu problemele ridicate de proiectarea în construcția de mașini.

Necesitățile vieții moderne reclamă din partea proiectantului elaborarea unui număr foarte mare de soluții constructive, care pot fi realizate în condiții variate. Pentru a permite

raţionalizarea şi optimizarea activităţii de proiectare, autorul, pe baza unei experienţe îndelungate în activitatea de proiectare şi apoi de cercetare, a dezvoltat o metodă de proiectare raţională bazată pe utilizarea unor cataloage de proiectare. Acestea cuprind culegeri de soluţii ale unor probleme constructive care se repetă în activitatea de proiectare, execuţia raţională a unor componente simple şi subansamble, precum şi reguli pentru compunerea lor. Realizarea cataloagelor de proiectare presupune o analiză strictă a diferiţilor factori din cuprinsul lor şi duce la recunoaşterea faptului că cele mai multe soluţii constructive pot fi reduse la un număr relativ mic de elemente de bază.

Capitolul 1 demonstrează avantajele executării metodice a activităţii de proiectare. În capitolul 2 se descrie desfăşurarea activităţii de proiectare şi se demonstrează că orice obiect tehnic poate fi descris cu ajutorul mărimilor generale din proiectare şi anume — material, energie şi informaţie. Capitolul 3 prezintă posibilitatea alcătuirii cataloagelor de proiectare şi indică modul de asociere a elementelor după caracteristici.

În capitolul 4 sînt cuprinse cataloagele de proiectare cu lămurirea modului de utilizare, cu diferite detalii suplimentare.

Capitolul 5 tratează despre modul de lucru în conformitate cu planurile de desfăşurare. Se insistă asupra elaborării unei teme de proiectare cît mai precise cu ajutorul unui număr mare de mijloace ajutătoare, îndrumări şi exemple.

Noile structuri funcţionale, metodele care permit elaborarea unor algoritmi mai buni pentru diferitele faze ale proiectării sînt date în capitolul 6. Sînt elaborate noi unităţi structurale pentru sinteza organelor de maşini şi a unor grupe funcţionale, se prezintă o nouă teorie a inelelor de tensiuni ca bază pentru înţelegerea constructivă a transmiterii forţelor în îmbinări şi mecanisme. Capitolul se încheie cu prezentarea unor unităţi de măsură mecanice pentru funcţiuni din tehnica informaticii şi o încercare de analiză structurală asistată de calculator.

Capitolul 7 cuprinde definiţiile unor noţiuni de specialitate, care să ajute pe cititor în utilizarea cărţii.

Abordarea modernă a problematicii proiectării în construcţia de maşini cuprinsă în această carte este de un real interes pentru toţi cei ce lucrează în domeniu.

Gerhard Winter

VIRGIL OLARIU, PETRE SIMA şi VALERIU ARCHIRILOAIE, Mecanică Tehnică, Editura tehnică, 1982, 448 pag., 399 fig., 9 tabele

Etapa revoluţiei tehnico-ştiinţifice pe care o parcurgem implică cunoaşterea şi aplicarea celor mai noi cuceriri ale ştiinţei contemporane. În acest context ca dealtfel în întreaga istorie a dezvoltării ştiinţei, experimentul sau metodele de investigaţie trebuie să-şi aducă un aport substanţial. Dezvoltarea accelerată a ştiinţei mecanicii este legată de utilizarea ultimelor cuceriri tehnice în acest domeniu.

Noua lucrare „Mecanică tehnică" este rodul experienţei didactice şi ştiinţifice a autorilor, acumulată în decursul a numeroşi ani în învăţămîntul superior tehnic şi a unei bogate activităţi de cercetare pentru producţie ; este o lucrare inedită prin modul ei de prezentare, prin conducerea demonstraţiilor şi interpretarea rezultatelor, prin conţinutul ei instructiv.

În vederea prezentării cît mai unitare, autorii au grupat cunoştinţele teoretice şi practice ale mecanicii tehnice în patru părţi : Probleme generale, Statica, Cinematica şi Dinamica, fiecare din aceste părţi conţinînd cîte trei capitole : Noţiuni şi principii fundamentale, Teoria torsorului şi Centre de greutate, iar celelalte trei părţi conţin fiecare capitolele : Noţiuni fundamentale, Teoreme şi metode generale şi Probleme speciale.

Cît priveşte forma de prezentare, lucrarea se prezintă într-o grafică cu totul deosebită ; desenele sînt executate în mai multe culori, ceea ce permite o pătrundere mai uşoară în intimitatea fenomenului fizic, iar definiţiile şi formulele apar în aliniate tipărite în culoarea albastră. Concluziile, elementele de sinteză, precum şi noţiunile şi principiile fundamentale au fost tipărite prin culoare roşie. Se scoate astfel în evidenţă, putîndu-se discerne cu uşurinţă, ceea ce este mai important şi necesar de a fi reţinut, din întregul material conţinut în lucrare. Sub acest raport, lucrarea este prima carte tehnică apărută în culori în ţara noastră, putînd fi pusă, atît ca formă, cît şi ca conţinut, alături de cele mai moderne cărţi similare apărute în literatura tehnică modernă mondială.

Metoda de tratare este cea vectorială, considerîndu-se că răspunde cel mai bine la studiul fenomenelor mecanice.

Autorii lucrării utilizează cu precădere metoda matriceală de tratare a problemelor, ceea ce oferă posibilitatea de a se deduce mult mai ușor și rapid formulele, relațiile și ecuațiile care stau la baza mecanicii.

Pe parcursul întregii lucrări, materia este expusă de la simplu la complex, partea teoretică fiind ilustrată, așa cum am mai amintit, de figuri sugestive și intuitive. Fiecare capitol se încheie cu un număr important de aplicații legate direct de practica inginerească, ceea ce contribuie la ușurarea înțelegerii noțiunilor și asigură însușirea temeinică a cunoștințelor de mecanică cu largi posibilități de aplicate în crecetare și în tehnică.

Lucrarea prezintă interes deosebit și prin calitățile ei pedagogice. Expunerea este clară și ușor de urmărit. Stilul în care este redactată lucrarea este vioi și accesibil. Autorii au reușit să ocolească unele dificultăți ce ar fi putut proveni din instrumentul matematic folosit. Ea se adresează cadrelor tehnice din întreprinderi și institute de cercetare, studenților de la institutele tehnice de învățămînt superior, cadrelor didactice care predau mecanica la liceele industriale, precum și cursanților care frecventează forme de reciclare postliceale.

Elaborînd această valoroasă lucrare, autorii s-au străduit să urmeze drumul „Școlii românești de mecanică", deschis de către marii mecanicieni înaintași, Spiru Haret, Traian Lalescu, Andrei Ioachimescu și continuat de Victor Vâlcovici, Octav Onicescu, Dumitru Ion Mangeron, Caius Iacob, și de o suită întreagă de mecanicieni care, în plină putere de creație, activează cu multă dăruire pentru progresul și prestigiul științei românești.

Recomandăm cu căldură această carte de remarcabil nivel, care prezintă interes și utilitate deosebită și constituie un frumos aport adus de autori, cadre didactice de la catedra de Mecanică fină și teoretică a Universității Brașov, pentru ridicarea și perfecționarea disciplinelor de mecanică în țara noastră.

Se cuvine să exprimăm calde mulțimiri Editurii tehnice pentru includerea în planul de editare a acestei lucrări și pentru condițiile tehnice excelente de realizare.

Ilie Constantinescu

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).
- Referate ştiinţifice şi tehnice, la care se expun stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sinsincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul al maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, 70701, str. Const. Mille, nr. 15, sectorul 1.

R
F2557

6
TOMUL 42
nov.—dec.
1983

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Consiliul de conducere

Acad. E. CARAFOLI, *redactor şef*

Membri :

Acad. I. ANTON,
Acad. ŞT. BĂLAN,
Acad. D. DUMITRESCU,
Acad. C. IACOB,
Acad. D. MATEESCU,
Acad. O. ONICESCU,
Acad. R. VOINEA,
Prof. C. AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. GH. BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Dr. ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. R. C. BOGDAN,
Prof. R. PRIŞCU,
Dr. Ing. V. VISARION,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Dr. ing. I. CRIŞAN,
Prof. CR. PELECUDI,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie.*

Colegiul de redacţie

Acad. E. CARAFOLI, *redactor şef*

Membri:

Acad. I. ANTON,
Acad. D. MATEESCU,
Dr. ing. CRIŞAN,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie.*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute, în Editura Academie R.S. România se vor adresa: ILEXIM, Departamentul export-import carte, Departamentul export-import presă (pentru reviste), 70517, str. 13 Decembrie nr. 3, P.O. Box 136 — 137, telex 11226. Bucureşti, România. În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei, 70701, str. Const. Mille nr. 15

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79717, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 42, nr. 6 noiembrie—decembrie 1983

SUMAR

STUDII

I. SETEANU, M. ERHAN, Transportul aluviunilor în regim nepermanent V. Colmatarea albiilor naturale în regim de viitură 535

AL. D. STAN, FL. MINESCU, Scurgerile gazelor prin mediile poroase superficiale 547

IULIAN POPESCU, Legi de mişcare realizabile de mecanismul patrulater articulat 559

MIRCEA GH. MUNTEANU, GRIGORE I. GOGU, GHEORGHE N. RADU, Contribuţii la studiul rigidităţii, stabilităţii elastice şi vibraţiilor plăcilor circulare 568

A. PAVEL, Efectele abaterilor de la rectilinitatea generatoarei în cazul mantalelor recipientelor cilindrice presurizate la interior 593

NOTE

CORINA SOARE, O metodă de rezolvare a grinzilor cu zăbrele static nedeterminate 609

INDEX ALFABETIC 619

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 42, nr. 6 noiembrie–decembrie 1992

SUMAR

STUDII

I. SERBĂNOIU, M. BUHĂIAȘ, Transportul aluviunilor în regim permanent. V. Coloniștarea albiilor naturale în regim de viitură 823

AL. D. ȘTIAN, EL. MINESCU, Soluția grafică prin metoda poligonului forțe superficiale 847

IULIAN POPESCU, Legi de mișcare realizabile de mecanismul patrulater articulat 869

MIRCEA GH. MUȘTEIANU, GRIGORE I. COCU, GHEORGHE N. IIADU, Contribuții la studiul stabilității elastice și vibrații ale plăcilor circulare 885

A. ZAVELI, Efectele abaterilor de la rectilinitate generatoare în cazul mișcărilor rectilinie-alternative prezentate în lucrare 899

NOTE

CORINA SOARE, O metodă de rezolvare a grinzilor cu zăbrele static nedeterminate 909

INDEX ALFABETIC 919

ST. CERC. MEC. APL., TOMUL 42, NR. 6, PAG. 823–923, BUC., 1992

TRANSPORTUL ALUVIUNILOR ÎN REGIM NEPERMANENT. V. COLMATAREA ALBIILOR NATURALE ÎN REGIM DE VIITURĂ

de I. SETEANU, M. ERHAN

Institutul politehnic București

Se prezintă un model de calcul al transportului aluvionar în regim nepermanent pentru albii de formă arbitrară, ținînd seamă de aportul straturilor inferioare ale patului albiei. Se elaborează un model matematic de bilanț, detaliat pe fracții granulometrice pentru materialul aluvionar din pat și se indică un exemplu de calcul pentru un lac de acumulare de capacitate redusă.

1. INTRODUCERE

Observațiile experimentale asupra transportului de aluviuni în cursuri de apă, în regim natural sau amenajat, pun în evidență tendința de modificare a materialului sedimentat, ca urmare a interacțiunii dintre patul albiei și curent. Deși modelul fizic uzual, bazat pe relații globale de bilanț pentru materialul solid, furnizează informații utile privind modificările geomorfologice ale patului albiei, introducerea în analiză a variației granulometriei patului permite, de exemplu, explicarea tendinței profilului longitudinal de apropiere de o curbă limită, ca urmare a efectului de „pavare" (menținerea în pat a granulelor de o mărime capabilă să asigure neantrenarea acestora în curent).

Lucrarea de față reprezintă o continuare a unui număr de studii anterioare [1], [2], [3], [4]. Se analizează curgerea nepermanentă în albii cu pat mobil și secțiuni transversale de formă arbitrară, folosindu-se un model detaliat de interacțiune pat-curgere, bazat pe trei relații de bilanț:

— bilanțul pe fracții granulometrice în pat înainte de modificarea zonei de influență;

— bilanțul fazei solide transportate în curentul lichid;

— bilanțul global de refacere a zonei de influență, legat de schimbare a curbei granulometrice locale.

Se insistă asupra modificării granulometriei în zona de influență, în condițiile existenței unui aport de debit solid variabil în secțiunea amonte, într-o perioadă de viitură de hidrograf afluent cunoscut și pentru un grafic de manevră al evacuatorilor barajului din aval ales în conformitate cu normele de exploatare a amenajării hidroenergetice (de exemplu, o cheie limnimetrică impusă).

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 6, 1983, P. 535 – 546

2. MODELUL FIZIC

Se analizează procesul complex de transport-erodare-colmatare care însoțește curgerea apei în albii naturale. Se admite că albia este deformabilă, modificarea structurii morfologice a patului fiind o consecință a tendinței cursului de apă de a atinge o stare de echilibru dinamic pentru un profil în lung și o succesiune de secțiuni transversale limită. Se admite că zona de analiză poate fi discretizată într-o succesiune de tronsoane delimitate de profilele secțiunilor transversale, cunoscute inițial prin măsurători topografice directe. Rugozitatea patului (după Manning) se presupune inițial cunoscută și variabilă pe direcția transversală curgerii, iar modificările sale sînt modelate în funcție de transformările survenite în structura granulometriei patului. În bieful amonte al sectorului de studiu se cunoaște hidrograful fazei lichide, variabil în timp, în conformitate cu evoluția undei de viitură concrete. Pentru rezolvarea numerică a problemei se admite că acest hidrograf se poate asimila cu o succesiune de trepte de debit, pe durate de timp variabile, alese convenabil. Aportul de debit solid în secțiunea amonte este cunoscut la orice moment de timp, împreună cu contribuția afluenților în zona studiată.

În bieful aval, limitat de corpul unui baraj, cu evacuatorii deschiși la capacitatea maximă sau în conformitate cu un grafic de manevră impus, debitul solid transvazat se poate admite că nu este, într-o primă aproximație, influențat de prezența barajului, în timp ce debitul fazei lichide este legat de nivelul suprafeței libere prin cheia limnimetrică de manevră.

Debitul solid transportat în sectorul de studiu constituie o suprapunere dinamică a contribuției bazinului hidrografic din amonte și a efectului de expulzare a granulelor din pat de către curent, respectiv a depunerii sedimentelor în suspensie. Cantitativ, gradul de erodare al patului este dependent de forma concretă a curbei granulometrice și de adîncimea pînă la care se poate considera că forțele hidrodinamice de antrenare mai pot avea efect asupra granulelor din pat. Adîncimea acestei zone (zona de influență) se va admite constantă și cunoscută [4]. Refacerea zonei de influență, pe o durată de timp mai îndelungată, ca urmare a antrenări, respectiv a depunerii, are drept consecință modificarea accentuată a structurii granulometrice a patului, respectiv colmatarea sau pavarea acestuia [3].

În conformitate cu lucrările anterioare ale autorilor se admite că procesul complex de erodare-depunere și refacere se poate descompune în două etape:

— faza de erodare-depunere, în timpul ΔT, în care compoziția zonei de influență se menține constantă, iar grosimea sa se modifică, crescînd la depunere, respectiv micșorîndu-se în cazul erodării. Curba granulometrică suferă o primă modificare;

— faza de refacere, admisă practic instantanee, în care, datorită contribuției structurilor inferioare ale patului și ca urmare a ecranării efectului forțelor hidrodinamice de antrenare în profunzime, grosimea zonei de influență revine la valoarea anterioară, iar compoziția granulometrică suferă o nouă modificare.

Pe lîngă bilanțul masic în cele două faze de mai sus, efectuat la nivelul patului, se adaugă schimbările compoziției fazei solide în suspensie,

exprimate prin relația de continuitate în care se introduce explicit contribuția patului albiei.

Intervalul de timp ΔT în care se desfășoară prima etapă de transformare a patului admite o valoare limită superioară, dependentă de intensitatea antrenării în pat a granulelor. Cu cît această limită superioară este mai mică, cu atît tendința de depunere este mai accentuată, respectiv tinde spre pavare în caz contrar. Întrucît, pentru analiza simultană a procesului de depunere în toate secțiunile de curgere este necesar un același pas de timp, la un moment dat, acesta va fi inferior celei mai mici dintre valorile limită caracteristice sectorului analizat.

Evoluția fazei lichide în fiecare dintre etapele treaptă ale hidrografului de viitură constituie o curgere gradual variată (de tip remu) cu un nivel constant în secțiunea transversală, variabil de la un profil la altul, în conformitate cu relațiile de analiză ale curgerii cu suprafață liberă în regim fluvial (pentru numere Froude subunitare).

Pentru a putea efectua bilanțul fazei solide în fiecare dintre etapele treaptă ale hidrografului de viitură și a obține informații asupra modificărilor patului în diferite puncte ale secțiunii transversale se împarte curentul lichid în tuburile de curent corespunzătoare unor fracții de debit ales.

Procesul fizic al transportului solid formează obiectul de analiză al unui domeniu modern și deosebit de complex al hidraulicii tehnice, datorită numărului mare de parametri ce guvernează procesul și a scărilor diferite de timp ale mișcărilor fazelor lichide și solide. Urmînd pe H. A. Einstein [7], se va detalia, pe considerente semiempirice, descrierea procesului de transport pe fracții granulometrice în cadrul schemei lui F. Toffaleti [5], obținîndu-se capacitatea de antrenare la echilibru în curgerea uniformă. Ansamblul de relații obținute constituie un sistem închis cu ajutorul căruia, pe baza unui set minim de date experimentale, se pot obține informații suficient de detaliate asupra modificărilor morfologice ale albiei unui curs de apă, cu implicații directe asupra bazinului hidrografic asociat.

3. MODELUL MATEMATIC

Mișcarea permanentă gradual variată a cursului de apă este descrisă prin relația lui Bernoulli, care, între două secțiuni transversale i și k, este echivalentă cu sistemul Saint-Venant în regim staționar. Notînd prin H cota suprafeței libere față de un plan de referință (fig. 1) se obține :

$$H_i = H_k + FQ^2, \qquad (1)$$

$$H_i = z_i + h_i, \qquad (2)$$

unde z_i reprezintă cota patului în secțiunea i față de același plan de referință, iar h_i este adîncimea corespunzătoare.

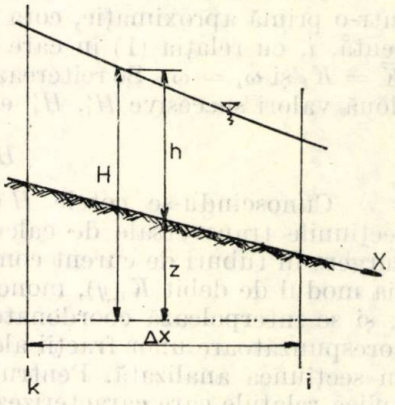


Fig. 1

Factorul F se scrie :

$$F = \zeta \left(\frac{1}{\omega_k^2} - \frac{1}{\omega_i^2} \right) + \frac{\Delta x}{\overline{K}^2}, \tag{3}$$

unde ω_i și ω_k sînt ariile secțiunilor vii, iar ζ este coeficientul pierderilor locale :

$$\zeta = \begin{cases} \dfrac{\alpha_B}{2g} & \text{canale convergente,} \\ 0 & \text{canale divergente.} \end{cases} \tag{4}$$

Modulul mediu de debit $\overline{K}$ se obține din relația :

$$\frac{2}{\overline{K}^2} = \frac{1}{K_i^2} + \frac{1}{K_k^2}, \tag{5}$$

în care K_i și K_k sînt modulele de debit exprimate prin relația lui Chézy :

$$K = \omega C \sqrt{R}, \tag{6}$$

R fiind raza hidraulică :

$$R = \omega / \chi, \tag{7}$$

χ este perimetrul udat, iar coeficientul lui Chézy, C, se scrie, după Manning, sub forma :

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6}. \tag{8}$$

Coeficientul de rugozitate, n, variază atît în secțiunea transversală, cît și de la un profil la altul.

Pentru stabilirea curbei de remu s-a admis că suprafața liberă este orizontală în secțiunea transversală, iar patul albiei constituie un contur poligonal. Pentru regimuri de curgere subcritice lente calculul se efectuează din sectorul aval spre amonte [2].

Cunoscîndu-se cota H_k într-o secțiune transversală dată, se estimează într-o primă aproximație, cota suprafeței libere în secțiunea amonte adiacentă, i, cu relația (1) în care parametrul F este determinat cu condiția $\overline{K} = K_k$ și $\omega_i = \omega_k$. Se reiterează calculul cotei H_i pînă cînd diferența între două valori succesive H_i', H_i'' este inferioară unei valori impuse :

$$| H_i' - H_i'' | \leqslant \varepsilon. \tag{9}$$

Cunoscîndu-se cotele $H_i (i = 1, 2, \ldots, N)$ ale suprafeței libere în secțiunile transversale de calcul, este necesar să se dividă domeniul de curgere în tuburi de curent componente. Pentru aceasta se definește funcția modul de debit $K_i(y)$, monotonă pe porțiuni, în secțiunea transversală i, și se interpolează coordonatele Y ale tuburilor de curent componente corespunzătoare unor fracții alese ale modulului de debit (debitului) total în secțiunea analizată. Pentru fiecare tub de curent intermediar se pot aplica relațiile care caracterizează transportul de sediment în schema unidimensională de curgere.

La momentul de timp $T = T_n$, pe unitatea de arie a patului aluvionar, se află o cantitate de sediment de greutate G_n. În intervalul de timp următor ΔT_n greutatea materialului antrenat (depus) este C_n. Înainte de refacerea zonei de influență (la sfîrșitul primei etape) greutatea sedimentului aflat în unitatea de arie a patului, $\bar{G}_{n+1}$, este:

$$\bar{G}_{n+1} = G_n - C_n . \tag{10}$$

Introducînd parametrul adimensional de antrenare:

$$C' = G_n/\bar{G}_{n+1}, \tag{11}$$

relația (10) devine:

$$\bar{G}_{n+1} = \frac{G_n}{1 + C'} . \tag{12}$$

Dacă $C_n > 0$ (erodare), întrucît greutatea maximă de material ce poate fi antrenată din pat este G_n, rezultă $C_n \in (0, G_n)$, pentru care $C' \in (0, \infty)$. În cazul depunerii ($C_n < 0$) $C_n \in (-\infty, 0)$, respectiv $C' \in (-1, 0)$. Prin urmare, în general, $C' \in (-1, \infty)$, valorile negative corespunzînd depunerii.

Pentru a efectua bilanțul de material în pat înainte de refacere, detaliat pe fracții granulometrice, se ține seamă că în intervalul de timp ΔT_n din greutatea C_n antrenată (depusă), fracția i are contribuția $1/2\ C_n(t_n^{(i)} + t_{n+1}^{(i)})$, unde $t_n^{(i)}$ este ponderea gravimetrică a fracției de diametru d_i în faza lichidă la momentul T_n.

La momentul T_{n+1} din cantitatea $\bar{G}_{n+1}$ de material aluvionar în pat pe unitatea de arie, partea corespunzătoare fracției i este $\bar{b}_{n+1}^{(i)}\ \bar{G}_{n+1}$, unde $\bar{b}_{n+1}^{(i)}$ reprezintă ponderea gravimetrică în pat înainte de refacere. Relația de bilanț masic se scrie, după unele transformări [4]:

$$\bar{b}_{n+1}^{(i)} = b_n^{(i)}(1 + C') - 1/2\ C'(t_n^{(i)} + t_{n+1}^{(i)}). \tag{13}$$

Notînd prin $(\overline{\gamma}_{sm})_{n+1}$ greutatea specifică volumetrică a materialului zonei înainte de refacere, rezultă variația adîncimii h_n a zonei de influență:

$$\Delta h_n = \frac{G_n C'}{1 + C'} \frac{1}{(\overline{\gamma}_{sm})_{n+1}} + h_n \frac{m_n - \overline{m}_{n+1}}{1 - \overline{m}_{n+1}}, \tag{14}$$

unde $(\overline{\gamma}_{sm})_{n+1} = \gamma_s(1 - \overline{m}_{n+1})$. Greutatea specifică a scheletului solid este notată prin γ_s, iar porozitatea zonei de influență, $\overline{m}_{n+1}$, înainte de refacere, se poate calcula cu relația lui Komura ([6]:

$$\overline{m}_{n+1} = 0{,}245 + 0{,}03285/(\bar{D}_{65})_{n+1}^{0{,}21}, \tag{15}$$

în care $(\bar{D}_{65})_{n+1}$ reprezintă diametrul efectiv al patului înainte de refacere, soluție a ecuației:

$$\int_0^{(\bar{D}_{65})_{n+1}} \bar{b}_{n+1}\, \mathrm{d}D = 0{,}65 \int_0^{\infty} \bar{b}_{n+1}\, \mathrm{d}D. \tag{16}$$

În etapa refacerii adîncimii de influenţă, în cazul erodării, o parte din materialul de profunzime pătrunde în zonă, respectiv în cazul depunerii, straturile inferioare sînt parţial ecranate faţă de acţiunea de antrenare a forţelor hidrodinamice. Într-o primă aproximaţie, se poate admite că adîncimea de influenţă rămîne constantă :

$$h_{n+1} = h_n. \tag{17}$$

În consecinţă, variaţia adîncimii zonei de influenţă după refacere este egală cu variaţia înainte de refacere şi de semn contrar, iar greutatea pe unitatea de arie a materialului din zona de influenţă după refacere este

$$G_{n+1} = \frac{G_n}{1 + C'}(1 + \theta), \tag{18}$$

unde

$$\theta = C' \frac{1 - m_0}{1 - \bar{m}_{n+1}} \tag{19}$$

în cazul erodării, respectiv

$$\theta = C' \frac{1 - m_n}{1 - \bar{m}_{n+1}} \tag{20}$$

în cazul depunerii.

Bilanţul refacerii materialului din pat furnizează ponderile gravimetrice după refacere :

$$b_{n+1}^{(i)} = \frac{\bar{b}_{n+1}^{(i)} + \theta b_0^{(i)}}{1 + \theta} \tag{21}$$

în cazul erodării, respectiv

$$b_{n+1}^{(i)} = \frac{\bar{b}_{n+1}^{(i)} + \theta b_n^{(i)}}{1 + \theta} \tag{22}$$

în cazul depunerii.

Bilanţul de material în curentul lichid se întocmeşte admiţînd că indiferent de mărimea debitului solid $Q_{a,n}$ intrat prin secţiunea amonte la momentul de timp T_n(fig. 2), debitul solid $Q_{t,n}$, transportat prin secţiunea aval, corespunde regimului de echilibru (calculabil în cadrul modelului Toffaleti), corelat cu ponderea granulometrică $b_n^{(i)}$ în pat, datorită interacţiunii curent-albie, pe lungimea L a sectorului analizat.

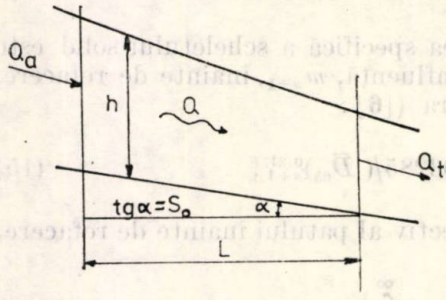


Fig. 2

Luînd în considerare cantitatea de material în suspensie la un moment dat şi însumînd ecuaţiile de bilanţ pentru toate fracţiile granulometrice se obţine relaţia [4] :

$$1/2\ (Q_{t,n} + Q_{t,n+1})\,\Delta T_n = 1/2(Q_{a,n} + Q_{a,n+1})\Delta T_n +$$

$$+\frac{L}{2v}(Q_{a,n}+Q_{t,n})+C_n\,L\,B-\frac{L}{2v}(Q_{a,n+1}+Q_{t,n+1}), \tag{23}$$

unde B reprezintă lățimea medie a tubului de curent, $v=Q/(BH)$ este viteza medie în secțiunea transversală, iar H este adîncimea de curgere.

Combinînd egalitățile de bilanț de mai sus, se deduce mărimea intervalului de timp ΔT_n, pentru pasul de iterație n :

$$\Delta T_n=\frac{2L\,B\,C'}{1+C'}\,\frac{G_n}{\beta_1}+\frac{L}{v}\,\frac{\beta_2}{\beta_1}, \tag{24}$$

unde

$$\beta_1=Q_{t,n}+Q_{t,n+1}-Q_{a,n}-Q_{a,n+1}, \tag{25}$$

$$\beta_2=Q_{t,n}+Q_{a,n}-Q_{t,n+1}-Q_{a,n+1}. \tag{26}$$

Întrucît pasul de timp ΔT_n, deși nu are o valoare impusă, trebuie să fie același pentru toate tuburile de curent și toate secțiunile transversale, iar mărimea parametrului adimensional de antrenare C' trebuie să verifice condiția fizică $C'>-1$, se utilizează egalitatea (24) pentru a verifica această condiție, pentru un pas de timp ΔT_n ales inițial și corectat ulterior.

4. ALGORITMUL DE CALCUL. REZULTATE

Mărimi cunoscute din considerente fizice : lungimea L a sectorului analizat, profilele secțiunilor transversale, hidrograful afluent de viitură, adîncimea de influență h, admisă constantă în timp (eventual variabilă de la o secțiune la alta), ponderile granulometrice $b_0^{(i)}$ ale materialului de fund, greutatea specifică γ_s a scheletului solid, rugozitățile Manning și graficul de manevră $H=f(Q,t)$ al evacuatorilor barajului din aval, hidrograful debitelor solide ce intră în amonte și pe afluenții din zona de studiu.

Condiții la limită : debitul solid $Q_{a,n}$, respectiv lichid Q_n în secțiunea amonte, debitul evacuat $Q_n''(H_n)$ în secțiunea aval.

Ponderile granulometrice $t^{(i)}$ în sectorul aval corespund distribuției de echilibru pentru transportul de sediment. Ele se pot calcula împreună cu debitul solid total Q_t după Toffaleti în funcție de parametrii fizici ai fazei lichide (temperatură, viscozitate), respectiv ai fazei solide (greutate specifică, mărimea hidraulică a particulelor), de condițiile de curgere (viteză, adîncimea de curgere) și de ponderile granulometrice $b^{(i)}$ în pat.

La un moment de timp T_n procedeul de calcul iterativ constă din următoarele etape :

— în cadrul unei scheme predictor-corector se anticipează distribuția granulometrică în curentul lichid $t_{n+1}^{(i)}$ egală cu cea anterioară $t_n^{(i)}$ și se determină, într-o primă aproximație, parametrul de antrenare C' din relația (24) pentru $Q_{t,n+1}=Q_{t,n}$ și $Q_{a,n+1}=Q_{a,n}$. Dacă $C'<-1$, pasul de timp T_n este ales necorespunzător și se reduce într-o nouă estimare la jumătate etc. Dacă $C'>-1$, se determină, în continuare, ponderile granulometrice în pat, utilizînd relația :

$$\bar{b}_{n+1}'^{(i)}=b_n^{(i)}(1+C')-C'\,t_n^{(i)}. \tag{27}$$

Folosind schema lui Toffaleti se corectează ponderile granulometrice $t_{n+1}^{(i)}$ și se reestimează ponderile în pat :

$$\bar{b}_{n+1}''^{(i)} = b_n^{(i)}(1 + C') - C'(\alpha t_n^{(i)} + (1 - \alpha)\, t_{n+1}^{(i)}), \tag{28}$$

unde α este un parametru de suprarelaxare, $\alpha \in (0{,}5 \ldots 0{,}85)$, care mărește viteza de convergență a procesului. Reevaluările predictor-corector continuă pînă cînd este îndeplinită condiția :

$$\max_i |\, \bar{b}_{n+1}''^{(i)} - \bar{b}_{n+1}'^{(i)} | \leqslant \varepsilon), \tag{29}$$

unde ε are o valoare aleasă, suficient de mică.

Cunoscînd ponderile granulometrice $\bar{b}_{n+1}^{(i)}$ în pat înainte de refacere, se calculează adîncimea de erodare (depunere) cu relația (14). În faza de refacere se calculează coeficientul θ, formulele (19) și (20) și ponderile $b_{n+1}^{(i)}$ după refacere, cu formulele (21) și (22). În continuare, se recalculează parametrul adimensional de antrenare C' și se verifică mărimea abaterii acestuia, încheindu-se procesul de iterare pentru momentul de timp T_{n+1} dacă abaterea este suficient de mică, atît pentru tubul de curent analizat, cît și pentru celelalte din întreg sectorul de studiu.

Tabelul 1

Hidrograful de viitură și cota la baraj

T	Q	Cota la baraj
ore	m³/s	mdM
2,50	90	506
2,50	90	506
1,00	345	506
1,00	345	506
1,00	345	506
1,00	345	506
1,00	345	506
1,00	425	506
1,00	425	506
1,00	425	506
1,00	425	506
1,00	425	506
1,00	355	506
1,00	355	506
1,00	355	506
1,00	355	506
1,00	355	506
2,50	265	506
2,50	265	506
2,50	195	506

Variațiile zonei de influență reprezintă în același timp variațiile patului albiei la momentul de timp analizat. Pentru noua configurație morfologică se reia, la momentul de timp T_{n+1}, algoritmul de calcul, alegînd pentru început, $\Delta T_{n+1} = \Delta T_n$ etc. Se obține astfel evoluția patului în timpul tranzitului undei de viitură.

Algoritmul de mai sus a fost aplicat la un caz concret, pentru următoarele valori ale mărimilor hidrodinamice și geomorfologice caracteristice :

— lungimea sectorului analizat $L = 1061$ m ;

— 8 profile ale secțiunilor transversale (în fig. 3 se prezintă trei profile de calcul) ;

— hidrograful de viitură și cota la barajul aval (tabelul 1) :

— adîncimea de influență $h = 0{,}5$ m ;

— curba granulometrică inițială (tabelul 2) :

— greutatea specifică a scheletului solid $\gamma_s = 2{,}65$ daN/dm³ ;

— hidrograful debitului solid afluent (tabelul 3)

— rugozitățile Manning, variabile în secțiunea transversală și de la un profil la altul, au fost alese în conformitate cu natura patului, variind în jurul valorii medii $\bar{n} = 0{,}04$.

Tabelul 2

Curba granulometrică inițială

d_i(mm)	0,01	0,05	0,10	0,50	1,00	2,00	5,00	10,00
$b^{(i)}$(%)	10,00	35,00	50,00	60,00	70,00	80,00	90,00	100,00

Tabelul 3

Hidrograful debitului solid afluent

T(ore)	2,5	2,5	1,6	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
$Q_{a,n}(t/s)$	0,46	0,46	4,46	4,46	4,46	4,46	4,46	6,25

Tabelul 3 (continuare)

T(ore)	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
$Q_{a,n}(t/s)$	6,25	6,25	6,25	6,25	7,10	7,10	7,10	7,10

Tabelul 3 (continuare)

T(ore)	1,0	2,5
$Q_{a,n}(t/s)$	7,10	6,11

Cu un program de calcul în limbaj FORTRAN IV, întocmit în conformitate cu schema de studiu prezentată, s-a obținut evoluția în timp a cotei patului împreună cu forma suprafeței libere și modificarea structurii granulometrice a sedimentului de fund.

În figura 3 sînt reprezentate trei secțiuni analizate, atît în forma inițială, cît și după trecerea undei de viitură ($T = 22{,}5$ *h*). În figurile 4, 5 și 6 se indică variațiile curbelor granulometrice în cele trei profile, pe fiecare tub de curent considerat.

Se constată o slabă tendință de colmatare a cozii lacului datorită aportului de debit solid din bieful amonte și o ușoară tendință medie de erodare în zona centrală a lacului, în timp ce în vecinătatea barajului, datorită măririi relative a secțiunii vii, tendința de colmatare este mai accentuată, mergînd pînă la formarea de insule. Modificările curbelor granulometrice în cele trei profile prezentate confirmă tendința de colmatare evidențiată în figura 3.

Analizînd, de exemplu, diametrul d_{70} (diametrul unei site prin care poate trece circa 70% din masa unei probe) se constată o deplasare de la valori relativ mari (1 mm în profilul 2) la mărimi mai reduse (de exemplu, 0,07 mm în tuburile de curent II și V din același profil). Pentru unele tuburi de curent, corespunzînd zonelor de erodare, ponderea granulelor fine în pat se micșorează, evoluînd spre pavare.

Primită la redacție la 13 iulie 1983

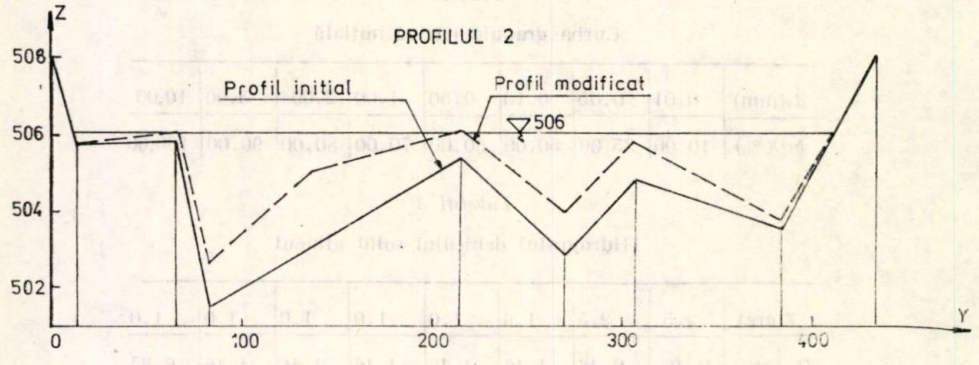


Fig. 3 a

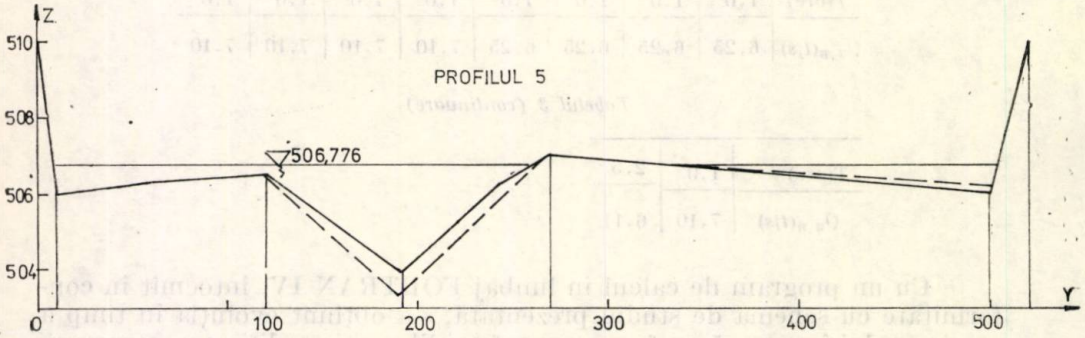


Fig. 3 b

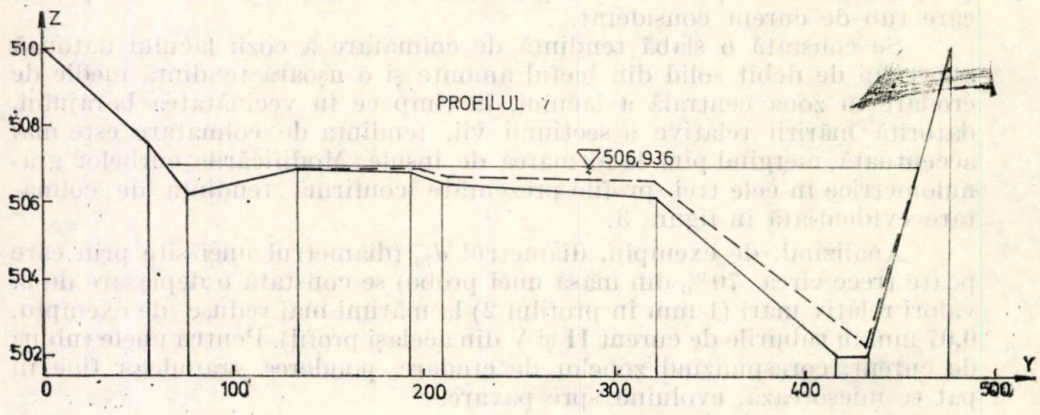


Fig. 3 c

PROFILUL 2
CURBELE GRANULOMETRICE PE TUBURI
DE CURENT

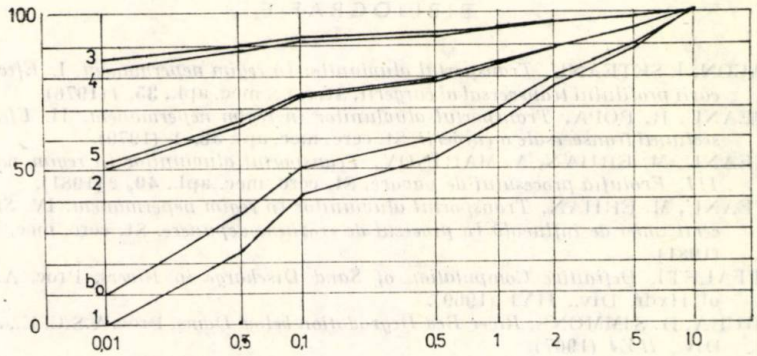


Fig. 4

PROFILUL 5
CURBELE GRANULOMETRICE PE TUBURI
DE CURENT

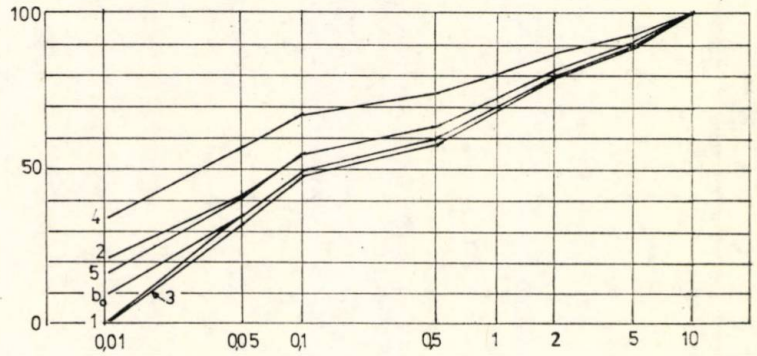


Fig. 5

PROFILUL 7
CURBELE GRANULOMETRICE PE TUBURI
DE CURENT

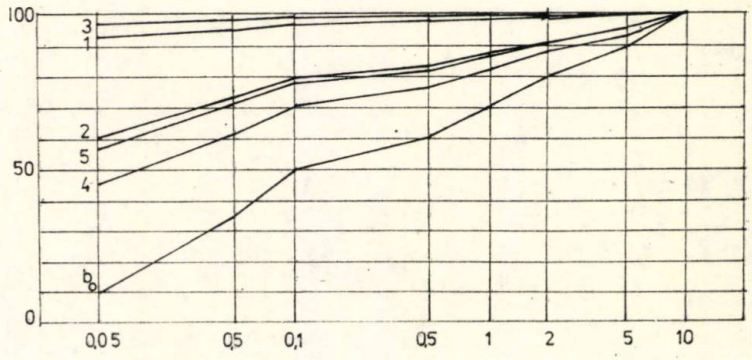


Fig. 6

BIBLIOGRAFIE

1. A. DIACON, I. SETEANU, *Transportul aluviunilor în regim nepermanent. I. Efectul modificării profilului transversal al curgerii*, St. cerc. mec. apl., **35**, *1* (1976).
2. I. SETEANU, R. POPA, *Transportul aluviunilor în regim nepermanent. II. Efectul formei secțiunii transversale a curgerii*, St. cerc. mec. apl. **38**, 1 (1979).
3. I. SETEANU, M. ERHAN, A. MARINOV, *Transportul aluviunilor în regim nepermanent. III. Evoluția procesului de pavare*, St. cerc. mec. apl., **40**, *2* (1981).
4. I. SETEANU, M. ERHAN, *Transportul aluviunilor în regim nepermanent. IV. Studiul refacerii zonei de influență în procesul de eroziune-depunere*, St. cerc. mec. apl., **40**, *4* (1981).
5. F. TOFFALETI, *Definitive Computation of Sand Discharge in Rivers*, Proc. A.S.C.E., J. of Hydr. Div., HY1 (1969).
6. S. KOMURA, D. SIMMONS, *River Bed Degradation below Dams*, Proc. A.S.C. E., J. of Hydr. Div., *HY4* (1967).
7. W. H. GRAF, *Hydraulics of Sediment Transport*, Mc Graw Hill Inc., New York (1971).

SCURGERILE GAZELOR PRIN MEDIILE POROASE SUPERFICIALE

de AL. D. STAN, FL. MINESCU

Institutul de petrol și gaze Ploiești

În tehnica distribuției gazelor sînt situații cînd apar defecte ale conductelor prin care se scurg însemnate cantități de gaze. De cele mai multe ori, scurgerea gazelor este unidimensională efectuîndu-se în lungul zonelor cu permeabilitate mare. Proprietățile fizice ale mediilor poroase superficiale sînt mult mai variate decît ale acestora înțelese în mod clasic. Această varietate mai mare a mediilor poroase superficiale se datorește faptului că sînt tasări și umidități diferite determinate de traficul rutier, lucrările agricole și precipitațiile căzute pe solul vegetal. Există și o variație sezonieră a acestor parametri. Toate aceste considerente fac ca studiul scurgerii gazelor prin mediile poroase superficiale să fie de mare interes practic.

1. ECUAȚIA DE MIȘCARE A GAZELOR

Scurgerea nestaționară a unui gaz printr-un mediu poros este problema cea mai generală a aspectului studiat.

Punctul de plecare îl constituie ecuația de continuitate

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = -m\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{1}$$

în care m este porozitatea, ρ masa specifică a gazului, iar v viteza în lungul axei x ce este suprapusă peste direcția de mișcare a gazului. Dacă se admite legea de filtrare a lui Darcy în care viteza v se poate scrie sub forma

$$v = -\frac{k_g}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{2}$$

rezultă relația

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{k_g}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = m\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{3}$$

μ fiind viscozitatea dinamică a gazului, iar k_g permeabilitatea absolută a acestuia.

Folosind legea gazelor reale sub forma

$$z = \frac{p}{p_0}\cdot\frac{\rho_0}{\rho}, \tag{4}$$

ecuația (3) se scrie

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_g}{\mu}\frac{p}{z}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = m\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{z}\right). \tag{5}$$

În domeniul presiunilor relativ mici (sub 15—20 bar) se poate scrie între factorul z și presiunea redusă p_r o relație liniară. Prin presiunea redusă se înțelege raportul dintre presiunea gazului și presiunea critică a acestuia. Presiunea critică a metanului se consideră 46,2 bar.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 6, 198, P. 547—558

Dependența dintre z și presiunea redusă p_r poate fi scrisă sub forma [11]:

$$z = 0{,}345 + 0{,}00196\,T_r + (0{,}655 - 0{,}375\,T_r)\left(1 - \frac{p}{46{,}2}\right), \tag{6}$$

în care T_r este temperatura redusă definită în mod analog cu presiunea redusă.

Referitor la permeabilitatea absolută k_g, se cunoaște din literatură [4, 5, 6] că pentru gaze la presiuni joase acest parametru este mai mare, decît pentru lichide. Notînd cu k_l și k_g permeabilitățile pentru lichid și gaz, se poate scrie relația

$$k_g = k_l\left(1 + \frac{b}{p}\right), \tag{7}$$

b fiind coeficientul lui Klinkenberg. Valorile acestui coeficient depind de natura mediului poros, de presiune. În literatură sînt prezentate unele valori ale acestui coeficient pentru mediile poroase clasice.

În lucrarea [6] acest coeficient se exprimă ca funcție de k_l sub forma

$$b = 0{,}75\,k_l^{-0{,}39}, \tag{8}$$

coeficientul b fiind exprimat în bari, iar k_l în m D.

Se constată că la valori mici ale lui k_l coeficientul b are valori mari și pentru permeabilități mari același coeficient este mai mic.

Condițiile la limită și inițiale ale ecuației (5) sînt

$$\text{la } x = 0, \qquad p = p_c, \tag{9}$$

$$\text{la } x = L, \qquad p = 1, \tag{9'}$$

$$\text{la } t = 0, \qquad p = 1,$$

unde se observă că la suprafața solului vegetal s-a admis o presiune egală cu aproximativ 1 bar, p_c fiind presiunea din conductă și este exprimată în aceleași unități de măsură.

Se pot introduce variabile adimensionale definite prin relațiile

$$\bar{x} = x/L,\ \bar{p} = p/p_c\ ,\ a = \frac{k_l}{\mu_c}\cdot\frac{p_c}{m};\ \bar{t} = \frac{a}{L^2}\,t,$$

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_c},\ \bar{b} = \frac{b}{p_c}, \tag{10}$$

μ_c fiind viscozitatea gazului corespunzătoare presiunii p_c, iar L lungimea pe care are loc scurgerea gazelor. Cu aceste variabile, ecuația (5) devine

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p+b}{z\mu}\,\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{z}\right), \tag{11}$$

unde, pentru simplificarea scrierii, s-a omis indicele de barare la toate variabilele.

Asupra membrului drept al ecuației anterioare se pot efectua unele calcule

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{z}\right)=\frac{1}{z}\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial t},$$

iar ultima derivată din această egalitate se pune sub forma

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial t}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}p}=\frac{\partial p}{\partial t}(0{,}655-0{,}001963\cdot T_r)\left(-\frac{p_c}{46{,}2}\right),$$

cu acestea, dacă se introduc și notațiile

$$A(p)=\frac{p+b}{z\mu}\quad\text{și}\quad B(p)=\frac{p\cdot p_c}{46{,}2}(0{,}655-0{,}001963\cdot T_r)\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z},$$

ecuația (11) se scrie

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[A(p)\frac{\partial p}{\partial x}\right]=B(p)\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{12}$$

Coeficienții $A(p)$ și $B(p)$ sînt funcții de presiune și, evident, de temperatură. Avînd în vedere că pe distanțe mici ale mediului poros variația temperaturii este neînsemnată, se face ipoteza că acești parametri depind numai de presiune. Se poate admite și o variație a celor doi parametri în raport cu temperatura. Acest calcul nu prezintă dificultăți.

2. UNELE SOLUȚII EXISTENTE ALE ECUAȚIEI DE MIȘCARE A GAZELOR

Pentru mediile poroase „clasice" *) au fost preocupări în rezolvarea ecuației de mișcare a gazelor [4, 8].

Tot pentru scurgerea izotermă, în lucrarea [8] s-a admis transformarea

$$\int_0^p\frac{\mathrm{d}p}{\mu} \tag{13}$$

și pentru viscozitate s-a considerat tot o variație liniară cu presiunea. Datorită faptului că fenomenul de scurgere s-a presupus că are loc la presiuni mari, presiunea atmosferică s-a luat egală cu zero, eroarea ce se introduce fiind fără însemnătate. În aceeași lucrare s-a introdus și o altă transformare

$$\int_{p_1}^p\frac{p}{z}\mathrm{d}p, \tag{14}$$

*) Înțelegem prin medii poroase „clasice" rocile colectoare de hidrocarburi fluide.

care a avut scopul de a liniariza ecuația de mișcare. Ultima transformare a fost introdusă mai tîrziu și de către autorii lucrării [4] tot în scopul liniarizării ecuației de mișcare. Pentru o generalitate mai mare a calculelor, rezolvarea numerică a integralei (14) s-a efectuat în funcție de parametrii reduși (presiune și temperatură).

3. SOLUȚIA NUMERICĂ A ECUAȚIEI (12)

Ecuația (12) este neliniară, coeficienții $A(p)$ și $B(p)$ depind de temperatură și de presiune. Considerînd că scurgerea este izotermă, cei doi coeficienți vor depinde numai de presiune.

De exemplu, în figurile 1 și 2 se prezintă variația coeficienților $A(p)$ și $B(p)$ în funcție de presiune pentru temperatura de 273 K. Această temperatură este întîlnită în perioada rece a anului la nivelul mediului poros prin care se scurg gazele ieșite prin defectele conductelor.

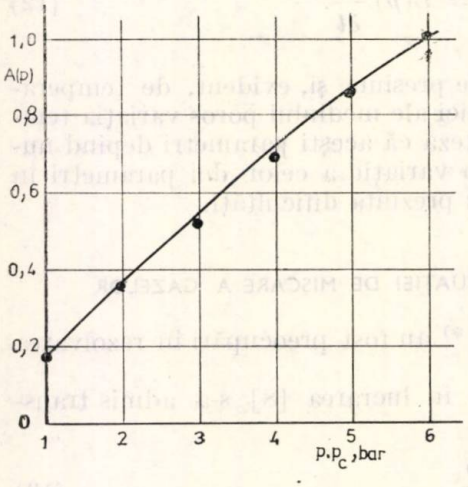


Fig. 1

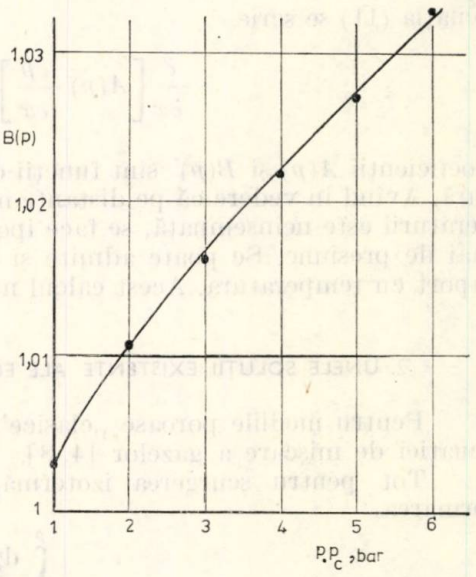


Fig. 2

La calculul coeficientului $B(p)$ s-a considerat că presiunea p_c este egală cu presiunea pentru care s-a estimat acest coeficient, iar la determinarea lui $A(p)$ s-a admis $b = 0$. Se observă din variația celor doi parametri că ambii cresc în raport cu presiunea. Atît $A(p)$, cît și $B(p)$ sînt pozitivi și, din acest motiv, se poate aplica schema cu diferențe finite [7] asociată ecuației (12),

$$B(p_m^n)\,(p_m^{n+1} - p_m^{n-1}) = 2r[A(p^n_{m+\frac{1}{2}})\,(p_{m+1}^n - p_m^n) - A(p^n_{m-\frac{1}{2}})(p_m^n - p_{m-1}^n)], \tag{15}$$

unde $r = k/h^2$, variabila x și t fiind definite de indicii m și n prin relațiile

$$x = mh, \; t = nk.$$

Dacă se admite înlocuirea propusă de Du-Fort-Frankel și anume $\frac{1}{2}(p_m^{n+1} + p_m^{n-1})$ în loc de p_m^n, ecuația (15) devine

$$[B(p_m^n) + r(\alpha^+ + \alpha^-)]\, p_m^{n+1} = 2r(\alpha^+ p_{m+1}^n + \alpha^- p_{m-1}^n) + [B(p_m^n) - r(\alpha^+ + \alpha^-)]p_m^{n-1}, \tag{16}$$

unde s-au notat

$$\alpha^+ = A\left(\frac{p_{m+1}^n + p_m^n}{2}\right) \quad \text{și} \quad \alpha^- = A\left(\frac{p_m^n + p_{m-1}^n}{2}\right),$$

iar coeficienții $A(p^n_{m+\frac{1}{2}})$ și $A(p^n_{m-\frac{1}{2}})$ au fost înlocuiți de α^+ și, respectiv, α^-. Pentru a studia stabilitatea schemei cu diferențe (16) asociată ecuației (12) este util de efectuat o ipoteză simplificatoare, și anume:

$$\alpha^+ = \alpha^- = \alpha. \tag{17}$$

Cu această ipoteză, admițînd condiția von Neumann de stabilitate, se ajunge la relația

$$\zeta^2[B(p_m^n) + 2r\alpha] - 4r\alpha\zeta\cos\beta h - [B(p_m^n) - 2r\alpha] = 0, \tag{18}$$

ζ fiind parametrul de stabilitate, iar β pentru variabila spațială. Se deduc ușor soluțiile ζ_i $(i = 1, 2)$

$$\zeta_i = \frac{2r\alpha\cos\beta h \pm [B^2(p_m^n) - 4r^2\alpha^2\sin^2\beta h]^{1/2}}{B(p_m^n) + 2r\alpha}. \tag{19}$$

Se constată că pentru $\beta h \to 0$, $|\zeta_i| \leqslant 1$, ceea ce dovedește că schema cu diferențe (16) este necondiționat stabilă în sensul criteriului de stabilitate von Neumann.

În ceea ce privește eroarea locală de trunchiere $\mathcal{O}$, admițînd tot ipoteza simplificatoare (17) și avînd în vedere dezvoltările în serie Taylor ale mărimilor p_m^{n+1}, p_m^{n-1}, p_{m+1}^n, p_{m-1}^n ca și în lucrările [7, 9], se găsește relația:

$$\mathcal{O} = 2B(p_m^n)k\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_m^n - 2\alpha r h^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)_m^n + 2\alpha r\left[k^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right)_m^n + \frac{h^4}{12}\left(\frac{\partial^4 p}{\partial x^4}\right)_m^n\right]. \tag{20}$$

Suma primilor doi termeni este nulă avînd în vedere ecuaţia (12) şi, din acest motiv, eroarea locală de trunchiere capătă forma

$$\mathcal{O} = 2\alpha r(k^2 + h^4). \tag{21}$$

Se observă cu uşurinţă că pentru o anumită valoare constantă a lui r eroarea locală de trunchiere devine neglijabilă la valori mici ale lui k şi h

$$\lim_{k,h\to 0} \mathcal{O} = 0. \tag{22}$$

Avînd în vedere trnsformările (10), condiţiile (9) şi (9′) au, pentru $p_c = 6$ bar, valorile

$$\text{la } x = 0, \quad p = 1, \tag{23}$$

$$\text{la } x = 1, \quad p = 1/6 = 0{,}1666,$$

$$\text{la } t = 0 \quad p = 0{,}1666. \tag{23'}$$

Dacă se împarte întreaga lungime a mediului poros în cinci tronsoane $h = 0{,}2$ şi pentru $r = 1$ rezultă că pasul pentru variabila t va fi $k = 0{,}04$. Cu valoarea admisă pentru r, ecuaţia (16) se mai scrie:

$$p_m^{n+1} = \frac{2(\alpha^+ p_{m+1}^n + \alpha^- p_{m-1}^n) + [B(p_m^n) - (\alpha^+ + \alpha^-)]p_m^{n-1}}{B(p_m^n) + (\alpha^+ + \alpha^-)}. \tag{24}$$

Pentru a calcula presiunea corespunzătoare momentului $n + 1$ am admis valorile presiunii la momentele $n - 1$, şi n ca fiind egale cu acelea prezentate în tabelul 1. În acelaşi tabel se dau valorile presiunii în nodurile reţelei spaţiale alese pentru primii patru paşi de timp.

Tabelul 1

$m = 0$	1	2	3	4	5
1	0,1666	0,1666	0,1666	0,1666	0,1666
1	0,1666	0,1666	0,1666	0,1666	0,1666
1	0,7409	0,1666	0,1666	0,1666	0,1666
1	0,7832	0,5036	0,1666	0,1666	0,1666
1	0,7977	0,5730	0,3242	0,1666	0,1666
1	0,8177	0,7241	0,3916	0,2253	0,1666

Pentru a pune calitativ în evidenţă contribuţia pe care o are fiecare parametru (permeabilitatea k_g, viscozitatea μ, porozitatea m) asupra mişcării gazelor se poate scrie ecuaţia (12) sub forma

$$a\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial t}, \tag{25}$$

unde prin a s-a notat

$$a = \frac{\rho}{\mu} \frac{k_g}{m} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}. \tag{26}$$

Soluţia ecuaţiei (25) se poate pune sub forma [1]

$$p(x, t) = E_1 + E_2 \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{at}}. \tag{27}$$

Constantele de integrare E_1 şi E_2, avînd în vedere condiţiile (9) şi (9') au valorile

$$E_1 = p_c; \; E_2 = -\frac{p_c - p_0}{\operatorname{erf} \dfrac{L}{2\sqrt{at}}},$$

ceea ce înseamnă că presiunea variază conform relaţiei

$$p(x, t) = p_c - \frac{p_c - p_0}{\operatorname{erf} \dfrac{L}{2\sqrt{at}}} \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{at}}. \tag{28}$$

Cu erf(α) s-a notat funcţia erorilor definită de relaţia

$$\operatorname{erf}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-\xi^2} d\xi.$$

În tabelul 2 se prezintă în funcţie de x şi parametrul $(a \cdot t)$ egal cu 0,045548 m^2; 0,45548 m^2 şi 4,5548 m^2 valorile raportului $p(x, t)/p_c$.

Parametrul a = 0,045548 m^2/s definit de relaţia (26) corespunde unor valori medii ale gazului metan la presiunea de 1,5 bar o permeabilitate a solului egală cu 1 Darcy şi o porozitate egală cu 0,30. Toţi aceşti parametri s-au considerat constanţi pentru a studia calitativ contribuţia parametrului a la distribuţia presiunii în mediul poros a cărei lungime s-a ales L=1 m. Datele prezentate în tabelul menţionat au rezultat admiţînd presiunea atmosferică p_0 egală cu 1 bar, iar p_c a fost considerată 6 bar

Tabelul 2

$\frac{x}{L}$ / $a \cdot t$	0	0,25	0,50	0,75	1
0,045548	1	0,4962	0,2493	0,1825	0,1666
0,455480	1	0,7656	0,4726	0,3437	0,1666
4,554800	1	0,8000	0,6000	0,3667	0,1666

Se constată că la creşterea parametruui $(a \cdot t)$ presiunea în acelaşi punct creşte, ceea ce înseamnă că la valori constante ale timpului pentru permeabilităţi mari ale mediului poros creşterea presiunii este mai rapidă faţă de mediile mai puţin permeabile. Se observă, de asemenea, că în timp presiunea dintr-un punct al mediului poros creşte.

4. MIŞCAREA STAŢIONARĂ PRIN MEDIUL POROS

În situaţia unei mişcări staţionare, ecuaţia (12) capătă forma :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[A(p)\frac{\partial p}{\partial x}\right] = 0. \tag{29}$$

Se poate introduce pentru temperatura de 273 K factorul de abatere definit de relaţia (6) precum şi viscozitatea dinamică μ tot sub forma unei ecuaţii, scrisă în [10] pentru datele experimentale din [3].

În urma primei integrări se obţine

$$\frac{p}{(1 - 0{,}002598\,p)(15{,}9005 + 1{,}2633p)} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = C_1. \tag{30}$$

După cea de-a doua integrare, pe baza condiţiilor la limită (23), se găsesc constantele de integrare C_1 şi C_2, relaţia existentă între presiunea adimensională p şi lungimea x va fi

$$\ln(0{,}9264 + 0{,}0736\,p)^{-13{,}0119} \cdot (1{,}0026 - 0{,}0026\,p)^{0{,}8183} = 0{,}8263 \cdot x. \tag{31}$$

Această ecuaţie se poate rezolva numeric pentru diverse valori ale lui x. În figura 3 se prezintă valorile presiunii p în funcţie de x. Tot pe acelaşi grafic se redau valorile presiunii obţinute din relaţia

$$p^2 = 1 - 0{,}972244 \cdot x, \tag{32}$$

are se obţine considerînd că mişcarea gazelor nu este influenţată de viscozitatea şi de factorul de abatere al acestora.

Se observă din variaţia celor două funcţii în raport cu lungimea x că presiunea calculată din relaţia (31) este mai mică decît aceea calculată în mod clasic pentru un mediu poros omogen, mişcarea fiind rectilinie [2, 10].

Rezultatul obţinut sè datoreşte faptului că s-a ţinut seama atît de factorul de abatere al gazelor, cît şi de viscozitatea acestora. Pe acelaşi grafic s-a calculat pentru ambele legi de variaţie a presiunii derivate $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. Calculul s-a efectuat grafic alegînd pasul pentru variabila x egal cu 0,1. Valorile derivatei sînt D_1 pentru distribuţia presiunii calculată cu relaţia (31) şi D_2 pentru aceea calculată cu ecuaţia (32). Se constată că în apro-

pierea conductei $D_1 > D_2$, ceea ce înseamnă că în acest loc viteza de filtrare a gazelor calculată cu ajutorul ecuației (31) este mai mare decît dacă s-ar calcula cu relația (32) și către suprafața solului se întîmplă situația inversă $D_1 < D_2$ ceea ce presupune și o inversare a vitezelor de filtrare calculate cu cele două relații.

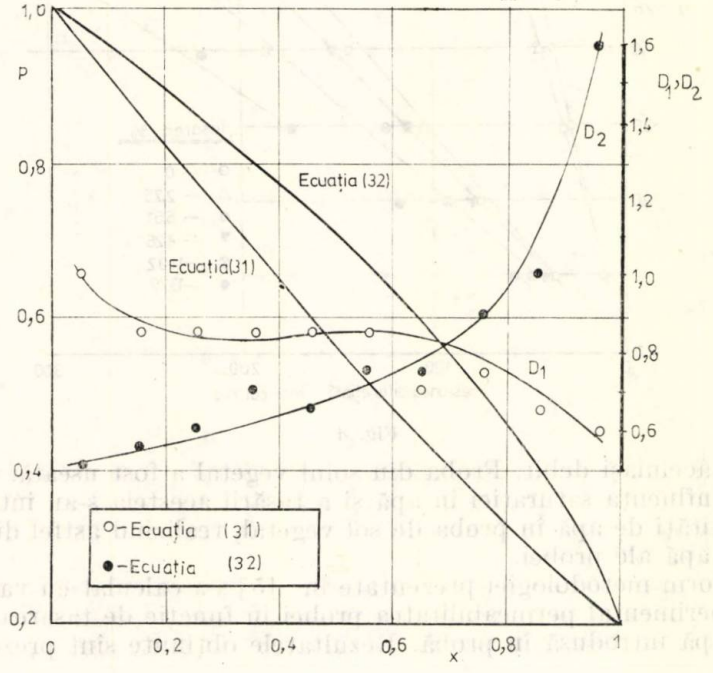


Fig. 2.3

Valoarea medie pe întreaga lungime a mediului poros este egală cu 0,795 dacă se utilizează relația (31) și 0,80 pentru ecuația (32). Aceste valori medii arată că pe întreaga lungime a mediului poros, dacă se aplică relația utilizată în mod curent în literatura de specialitate, eroarea introdusă nu este prea mare.

5. REZULTATE DIN ȘANTIER ȘI LABORATOR

În scopul determinării influenței pe care o au unii parametri asupra mișcării gazelor prin solul vegetal s-au efectuat unele experimente în laborator. Astfel, într-o celulă permeametrică specială s-a introdus sol vegetal și s-au circulat gaze.

Un parametru important al solului, puțin studiat în literatură, este tasarea acestuia. Tasarea unei probe s-a definit prin relația

$$T = 100\ \Delta l/l, \quad \%,$$

unde l a fost lungimea inițială a probei, iar Δl lungimea cu care s-a redus proba. Această reducere a lungimii s-a realizat prin micșorarea controlată a lungimii celulei permeametrice.

În figura 4 se redau valorile debitului de gaze în funcție de căderea de presiune înregistrată și diverse tasări ale probei. Se observă că pe măsură ce a crescut tasarea probei s-a mărit și căderea de presiune necesară pentru

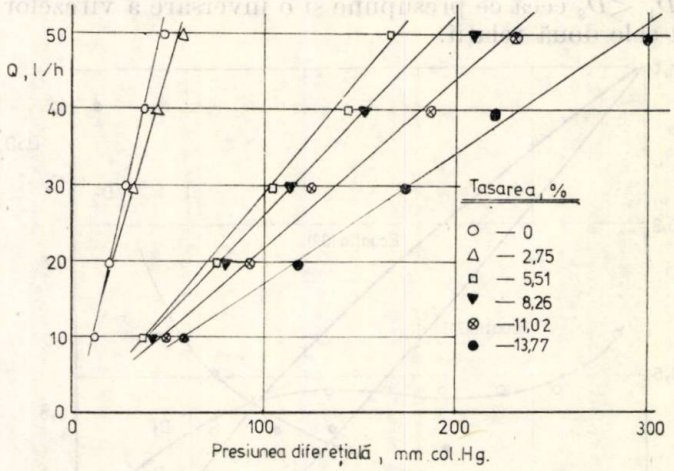


Fig. 4

scurgerea aceluiași debit. Proba din solul vegetal a fost uscată. Pentru a studia și influența saturației în apă și a tasării acesteia s-au introdus diverse cantități de apă în proba de sol vegetal, realizînd astfel diverse saturații în apă ale probei.

Conform metodologiei prezentate în [5] s-a calculat cu valorile obținute experimental permeabilitatea probei în funcție de tasarea și cantitatea de apă introdusă în probă. Rezultatele obținute sînt prezentate în figura 5.

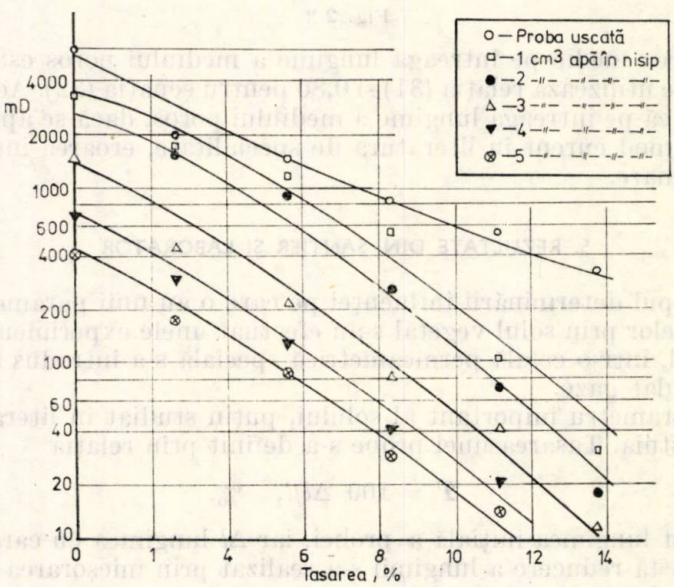


Fig. 5

În șantier s-a efectuat pe o conductă de 3″ un orificiu de 6 mm. Această conductă a fost racordată la rețeaua de distribuție cu gaze măsurînd cu ajutorul unui contor volumetric debitul care a intrat în conductă Q_1, iar debitul care a ieșit din conductă Q_2 a fost înregistrat la un alt contor. Deasupra orificiului executat, într-o conductă de 10″, s-a introdus nisip cu granulația omogenă.

Debitul care a ieșit prin orificiul practicat s-a calculat cu relația

$$Q = Q_1 - Q_2. \tag{33}$$

Cele două debite Q_1 și Q_2 s-au măsurat în situația că nisipul a fost uscat și la diferite saturații în apă. Proba de nisip a fost și tasată prin bătăi la suprafața coloanei de nisip.

Tasarea probei, calculată cu relația (32), a fost de aproximativ 16,33%, deoarece coloana de nisip a scăzut de la lungimea de 98 cm la 82 cm.

Și la rezultatele din șantier a rezultat faptul că la proba tasată raportul dintre debitul de gaze filtrat prin nisip Q și acela ieșit din dispozitivul realizat Q_2 este mai mic decît același raport la proba netasată. Tot raportul menționat se reduce ușor pe măsură ce saturația în apă a crescut. Rezultatele obținute sînt prezentate în figura 6.

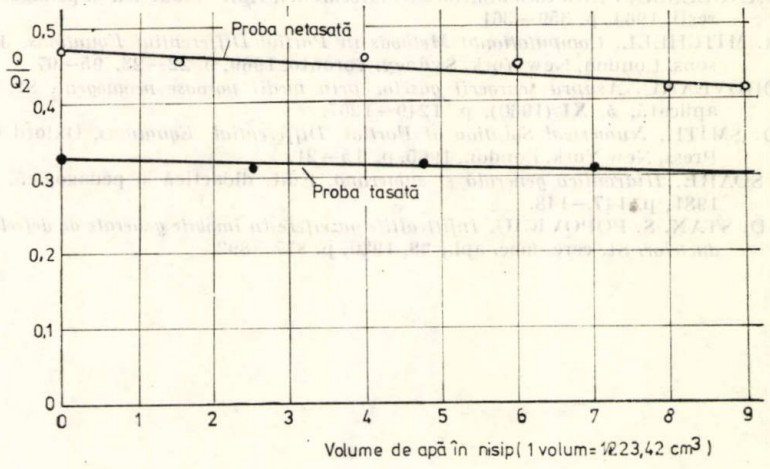


Fig. 6.

6. CONCLUZII

Mișcarea gazelor prin mediile poroase superficiale este frecvent întîlnită în tehnica distribuției gazelor naturale. Mediile poroase superficiale sînt cu variații mai mari în ceea ce privește saturația în apă și permeabilitatea acestora. Datorită tasărilor diferite și permeabilităților sînt destul de neuniforme. Din rezultatele din laborator și din tehnica de șantier s-a constatat că pe măsură ce se mărește tasarea unui mediu poros superficial

permeabilitatea acestuia se reduce. Datorită presiunilor reduse la care are loc scurgerea în mediile poroase superficiale efectul Klinkenberg să fie suficient de mare.

Integrarea numerică a ecuației de mișcare, ținînd seama de toți parametrii mediului poros și ai gazelor s-a efectuat în lucrare conform metodelor clasice existente în literatură.

Primită la redacție la 10 februarie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. H.S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Oxford University Press, 1959, p. 51—53.
2. I. CREȚU, *Hidraulică generală și subterană*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1971, p. 352—355.
3. M. H. GONZALES, R. F. BUKACEK, A. L. LEE, *The Viscosity of Methane*, Soc. Pet. Eng. Jour,. March 1967, p. 75—79.
4. R. AL. HUSSAINY, H. J. RAMEY-JR., P. B. CRAWFORD, *The Flow of real trases*, Through Porous Media, Jour. Pet. Tech., May 1966, p. 624—636.
5. S. C. JONES, *A rapid Accurate Unsteady — state Klinkenberg Permeameter*, Soc. Pet. Eng. Jour., October 1972.
6. G. MANOLESCU, *Fizica zăcămintelor de hidrocarburi*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1964, p. 359—361.
7. A. R. MITCHELL, *Computational Methods in Partial Differential Equations*, John Wiley sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1969, p. 22—23, 95—97.
8. T. OROVEANU, *Asupra scurgerii gazelor prin medii poroase neomogene*, St. cerc. mec. aplicată, *5*, **XI** (1960), p. 1249—1267.
9. G. D. SMITH, *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Oxford University Press, New York, London, 1965, p. 15—21.
10. AL. SOARE, *Hidraulica generală și subterană*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1981, p. 147—148.
11. AL. D. STAN, S. POPOVICIU, *Infiltrațiile gazeifere în imobile generate de defecțiunile conductelor*, St. cerc. mec. apl., **39**, 1980, p. 877—893.

LEGI DE MIȘCARE REALIZABILE DE MECANISMUL PATRULATER ARTICULAT

de IULIAN POPESCU

Universitatea din Craiova

Se analizează posibilitățile de a se cunoaște legile de mișcare realizabile de manivela și balansierul patrulaterului articulat. Pe baza unui program de calculator, se prezintă o serie de mecanisme din domeniul uzual, utilizabile direct la proiectare. Se fac unele considerații privind sinteza geometrică.

1. INTRODUCERE

Un mare număr de mecanisme se construiesc în scopul realizării unei legi de mișcare a elementului final condus, impunîndu-se și legea de mișcare a elementului conducător.

Sinteza mecanismelor studiază această problemă pentru mecanismele uzuale, stabilind numărul maxim de condiții ce se pot impune pentru fiecare mecanism.

Astfel, în cazul mecanismului patrulater articulat, se pot impune cinci poziții ale balansierului pentru cinci poziții ale manivelei.

În realitate însă, mecanismele realizează mult mai multe poziții decît cele studiate la sinteză, însă nu există încă o metodă de calcul pentru a găsi aceste mecanisme, care de fapt există.

Pornindu-se de la această constatare, în continuare se încearcă o nouă variantă de rezolvare, bazată pe studierea legilor realizate de fiecare mecanism. Se analizează mecanismul patrulater articulat, urmînd ca în alte lucrări să se studieze alte mecanisme și să se compare legile realizabile.

2. RELAȚII DE CALCUL

Folosindu-se metodele analizei mecanismelor, se consideră mecanismul din figura 1, pentru care se adoptă sistemul de axe x, y. Se scriu proiecțiile pe axe ale laturilor, considerate ca vectori :

$$\begin{aligned} a\cos(F+F_0)+c\cos M &= h+d\cos(E+E_0);\\ a\sin(F+F_0)+c\sin M &= d\sin(E+E_0). \end{aligned} \tag{1}$$

Se împart ambele ecuații cu latura a, și se elimină unghiul M, rezultînd :

$$\begin{aligned} y^2+z^2+1-x^2+2yz\cos(E+E_0)-2y\cos(F+F_0)-2z\cos(E+\\ +E_0)\cos(F+F_0)-2z\sin(E+E_0)\sin(F+F_0)=0, \end{aligned} \tag{2}$$

unde s-au folosit notaţiile:

$$a=1\,;\ x=\frac{c}{a}\,;\ y=\frac{h}{a}\,;\ z=\frac{d}{a}\,.$$

Se poate exprima unghiul E:

$$E=-E_0+\arccos\left[\frac{-A_1A_3+\sqrt{A_1^2A_3^2-(A_1^2+A_2^2)(A_3^2-A_2^2)}}{A_1^2+A_2^2}\right], \tag{3}$$

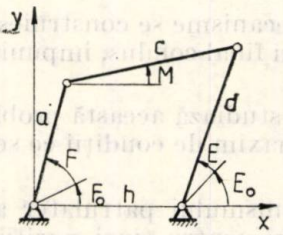


Fig. 1

unde

$$A_1=-2z\cos(F+F_0)+2yz,$$
$$A_2=2z\sin(F+F_0),$$
$$A_3=y^2+z^2-2y\cos(F+F_0)-x^2.$$

3. DISCUŢII ASUPRA RELAŢIILOR

Pentru ca mecanismul să existe, deci să rezulte valori pentru E, trebuie ca valoarea din paranteza relaţiei (3) să fie $\leqslant 1$, iar expresia de sub radical să fie $\geqslant 0$, adică:

$$A_1^2\geqslant A_3^2-A_2^2\,; \tag{4}$$

$$\pm\sqrt{A_1^2A_3^2-(A_1^2+A_2^2)(A_3^2-A_2^2)}\ \leqslant A_1^2+A_2^2+A_1A_3. \tag{5}$$

Din (5), cu notaţiile:

$$A=A_2^2(A_1^2-A_3^2+A_2^2),$$
$$B=A_1^2+A_2^2+A_1A_3,$$

rezultă următoarele inegalităţi:

$$A\geqslant 0\,;$$

$$\sqrt{A}\leqslant B, \text{ adică } A\leqslant B^2 \text{ dacă } B>0\,; \tag{6}$$

$A \geqslant B^2$ dacă $|B| > |\sqrt{A}|$ şi $B < 0$; $A \leqslant B^2$ dacă $|B| < |\sqrt{A}|$ şi $B < 0$;

$-\sqrt{A} \leqslant B$, adică $A \geqslant B^2$ dacă $B < 0$;

$A \geqslant B^2$ dacă $B > 0$ şi $|-\sqrt{A}| > |B|$; $A \leqslant B^2$ dacă $B > 0$ şi $|-\sqrt{A}| < |B|$.

Pe baza acestor inegalităţi, rezultă condiţii limită pentru parametrii ce definesc mecanismul.

Alte condiţii rezultă dacă $A = 0$ şi deci

$$-A_1A_3 \leqslant A_1^2 + A_2^2,$$

şi cum $A_2^2 \neq 0$, se obţine

$$A_3(A_3 + A_1) \geqslant 0,$$

deci

$A_3 > 0$ şi $A_3 + A_1 > 0$ sau $A_3 < 0$ şi $A_3 + A_1 < 0$, adică

$A_3 > 0$ şi $A_1 > 0$ sau $|A_3| > |A_1|$ dacă $A_1 < 0$, respectiv

$A_3 < 0$ şi $A_1 < 0$ sau $|A_3| > |A_1|$ dacă $A_1 > 0$, la care se mai pot adăuga relaţii pentru varianta de egalitate.

Din toate aceste inegalităţi, rezultă expresii de forma: $x \geqslant f_1$; $y \geqslant f_2$; $z \geqslant f_3$, unde f_1, f_2, f_3 sînt funcţii de unghiurile F şi E.

Se pot pune şi alte condiţii, de exemplu ca elementul a să execute rotaţii complete, caz în care rezultă alte limitări ale unor parametri ce definesc mecanismul.

Se mai adaugă şi condiţii de nenegativitate: $x > 0$; $y > 0$; $z > 0$, precum şi condiţiile Grashof.

Toate aceste relaţii sînt utile ca restricţii la optimizarea mecanismelor.

4. POSIBILITĂŢILE PATRULATERULUI

Din (3) se constată o dependenţă neliniară între E şi F. Într-o altă lucrare [1], se studiază statistic legea dată de (3), găsindu-se o bună aproximare a acesteia pentru multe mecanisme, printr-o regresie geometrică: $E = c_0 F^{c_1}$.

În scopul cunoaşterii posibilităţilor patrulaterului articulat, privind legile realizabile, s-a plecat de la figura 1 şi de la relaţia (3) şi s-au ciclat mărimile x, y, z în domenii apreciate ca uzuale, limitîndu-se lungimile elementelor pe baza considerentelor de precizie.

Fiind vorba de analiza unor mecanisme existente, sistemul de axe se adoptă convenabil, deci $F_0 = E_0 = 0$.

Pe baza unui program de calculator, s-au obţinut valorile lui E pentru valorile lui F, ciclate între 0 şi 360°, cu pasul de 10°.

În program s-au introdus instrucţiuni de salt pentru cazurile cînd inegalităţile (4) şi (5) nu erau satisfăcute, deci pentru valorile parametrilor la care nu există asemenea mecanisme.

Tabelul 1

Cod	x	y	z	Cod	x	y	z	Cod	x	y	z
1	0,5	0,5	0,5	53	2,5	0,5	2,5	91	0,5	3,5	3,5
2	1,5	0,5	0,5	54	3,5	0,5	2,5	92	1,5	3,5	3,5
6	0,5	1,5	0,5	56	0,5	1,5	2,5	93	2,5	3,5	3,5
7	1,5	1,5	0,5	57	1,5	1,5	2,5	94	3,5	3,5	3,5
8	2,5	1,5	0,5	58	2,5	1,5	2,5	95	4,5	3,5	3,5
12	1,5	2,5	0,5	59	3,5	1,5	2,5	96	0,5	4,5	3,5
13	2,5	2,5	0,5	60	4,5	1,5	2,5	97	1,5	4,5	3,5
14	3,5	2,5	0,5	61	0,5	2,5	2,5	98	2,5	4,5	3,5
18	2,5	3,5	0,5	62	1,5	2,5	2,5	99	3,5	4,5	3,5
19	3,5	3,5	0,5	63	2,5	2,5	2,5	100	4,5	4,5	3,5
20	4,5	3,5	0,5	64	3,5	2,5	2,5	104	3,5	0,5	4,5
24	3,5	4,5	0,5	65	4,5	2,5	2,5	105	4,5	0,5	4,5
25	4,5	4,5	0,5	66	0,5	3,5	2,5	108	2,5	1,5	4,5
26	0,5	0,5	1,5	67	1,5	3,5	2,5	109	3,5	1,5	4,5
27	1,5	0,5	1,5	68	2,5	3,5	2,5	110	4,5	1,5	4,5
28	2,5	0,5	1,5	69	3,5	3,5	2,5	112	1,5	2,5	4,5
31	0,5	1,5	1,5	70	4,5	3,5	2,5	113	2,5	2,5	4,5
32	1,5	1,5	1,5	72	1,5	4,5	2,5	114	3,5	2,5	4,5
33	2,5	1,5	1,5	73	2,5	4,5	2,5	115	4,5	2,5	4,5
34	3,5	1,5	1,5	74	3,5	4,5	2,5	116	0,5	3,5	4,5
36	0,5	2,5	1,5	75	4,5	4,5	2,5	117	1,5	3,5	4,5
37	1,5	2,5	1,5	78	2,5	0,5	3,5	118	2,5	3,5	4,5
38	2,5	2,5	1,5	79	3,5	0,5	3,5	119	3,5	3,5	4,5
39	3,5	2,5	1,5	80	4,5	0,5	3,5	120	4,5	3,5	4,5
40	4,5	2,5	1,5	82	1,5	1,5	3,5	121	0,5	4,5	4,5
42	1,5	3,5	1,5	83	2,5	1,5	3,5	122	1,5	4,5	4,5
43	2,5	3,5	1,5	84	3,5	1,5	3,5	123	2,5	4,5	4,5
44	3,5	3,5	1,5	85	4,5	1,5	3,5	124	3,5	4,5	4,5
45	4,5	3,5	1,5	86	0,5	2,5	3,5	125	4,5	4,5	4,5
48	2,5	4,5	1,5	87	1,5	2,5	3,5	126	2,0	2,0	2,0
49	3,5	4,5	1,5	88	2,5	2,5	3,5	127	3,0	3,0	3,0
50	4,5	4,5	1,5	89	3,5	2,5	3,5	129	5,0	5,0	5,0
52	1,5	0,5	2,5	90	4,5	2,5	3,5				

Datele obținute au fost reprezentate grafic sub forma curbelor $E(F)$, curbe codificate în tabelul 1, unde se indică și parametrii ce definesc fiecare mecanism.

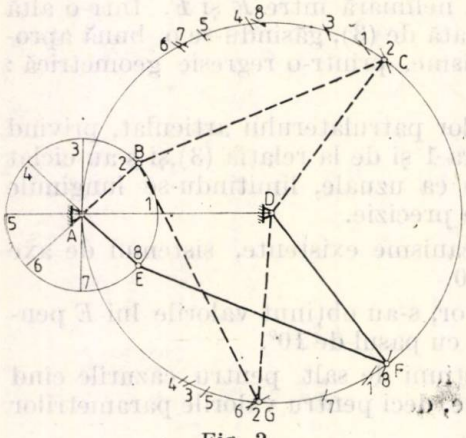


Fig. 2

Studiindu-se rezultatele obținute, s-a constatat că pentru varianta cu plus din fața radicalului din (3), rezultă curbe pentru care E nu depășește 180°. Astfel, de exemplu, pentru mecanismul $ABCD$ cu codul 64, cu $a = 20$; $c = 70$; $d = 50$; $h = 50$, reprezentat în figura 2, rezultă curba din figura 3 *b*, care nu depășește valoarea de 180° pentru unghiul E.

Un alt mecanism $ABCD$, cu aceleași date, este reprezentat tot în figura 2, pentru care legea de

mișcare este dată în figura 3 *a*. Se constată că în acest caz valorile lui *E* sînt cuprinse între 180° și 360°.

Se mai constată că printr-o rotație cu 180° în sens trigonometric, curba din figura 3 *b* se suprapune peste curba din figura 3 *a*.

Se poate deci preciza că pentru toate mecanismele din tabelul 1 și din figurile următoare există alte mecanisme, cu aceleași dimensiuni , ce generează legi reprezentate prin curbe decalate și rotite față de cele din desene. Prin această constatare, se dublează numărul legilor de mișcare realizabile de mecanismele patrulatere analizate.

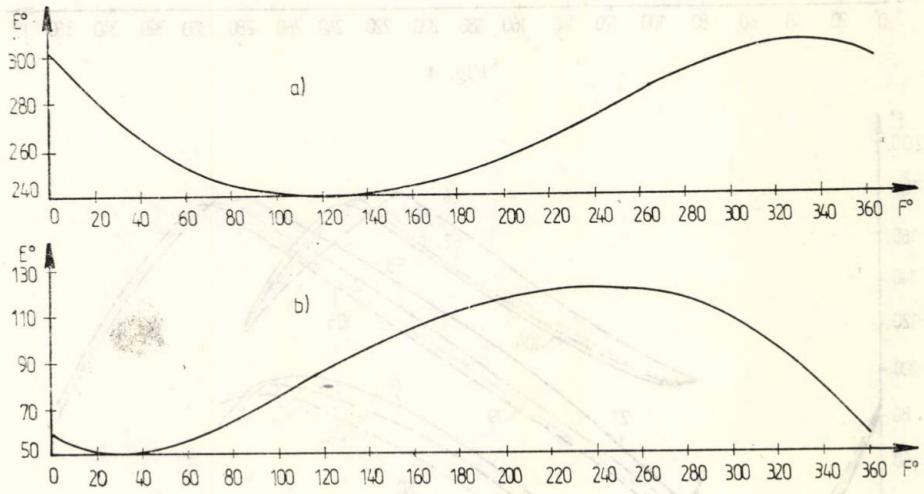


Fig. 3

În figura 2 este reprezentat și mecanismul *AEFD*, simetric cu *ABCD*, realizînd o lege de mișcare simetrică în raport cu abscisa de 180° față de legea realizată de *ABCD*.

O altă constatare rezultată din figura 2 este că dacă mecanismele *ABCD* și *AEFD* au elementele *AB* și *AE* rigidizate, atunci elementele *DC* și *DF* descriu mișcări care pentru unele subintervale sînt simetrice, iar pentru altele nu, însă aceste mișcări sînt de sens contrar. Se pot deci construi asemenea mecanisme care să asigure oscilații de apropiere sau de îndepărtare. Ele se pot folosi, de exemplu, la unii roboți industriali, pentru apucarea și eliberarea unor piese, precum și la sisteme de cupe de excavatoare, tractoare, transportoare, sau la jucării, la dispozitive pentru mașini-unelte etc. În aceleași scopuri se poate folosi și mecanismul *ABCDGB*.

Referitor la acest ultim mecanism, se remarcă faptul că cele două diade *BCD* și *BGD* au mișcări independente una de alta, ele nefiind legate decît prin cuplele extreme, cu mișcări primite din afara lor, adică de la elementul conducător și de la bază.

În continuare (fig. 4—10) se prezintă legile de mișcare realizabile de mecanismele patrulatere articulate din domeniile uzuale, conform codificării din tabelul 1. Din motive de spațiu, curbele s-au prezentat grupate, fără a se respecta ordinea din tabelul 1.

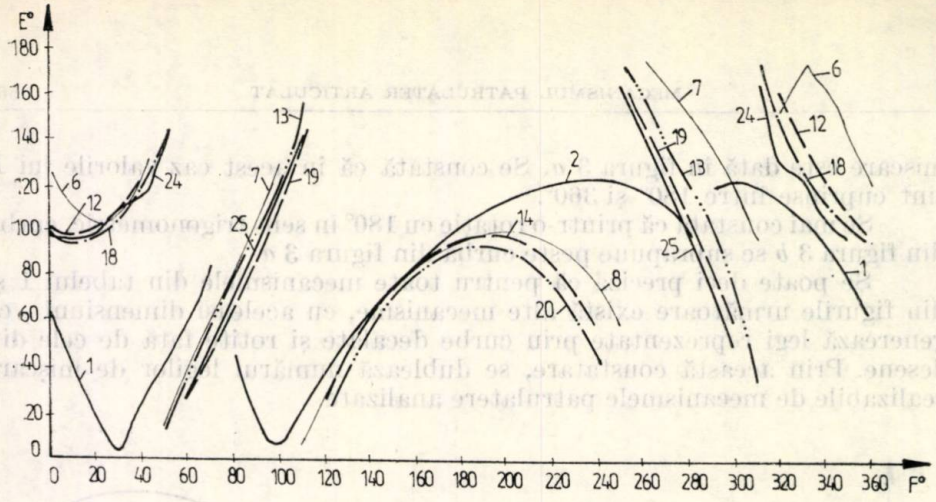


Fig. 4

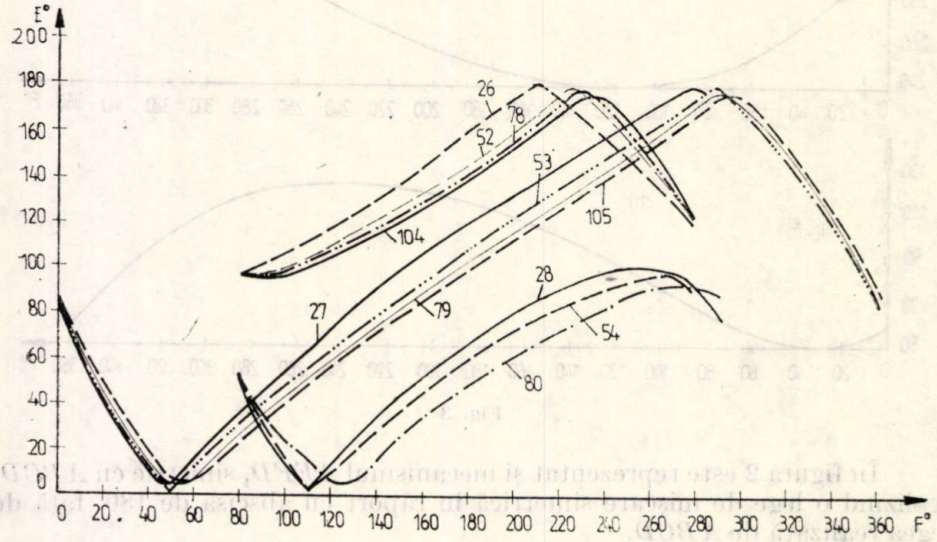


Fig. 5

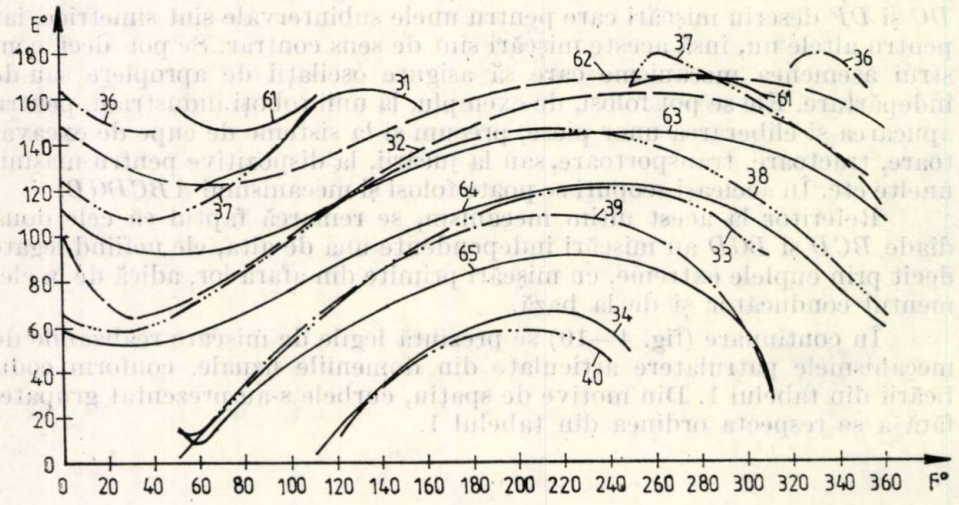


Fig. 6

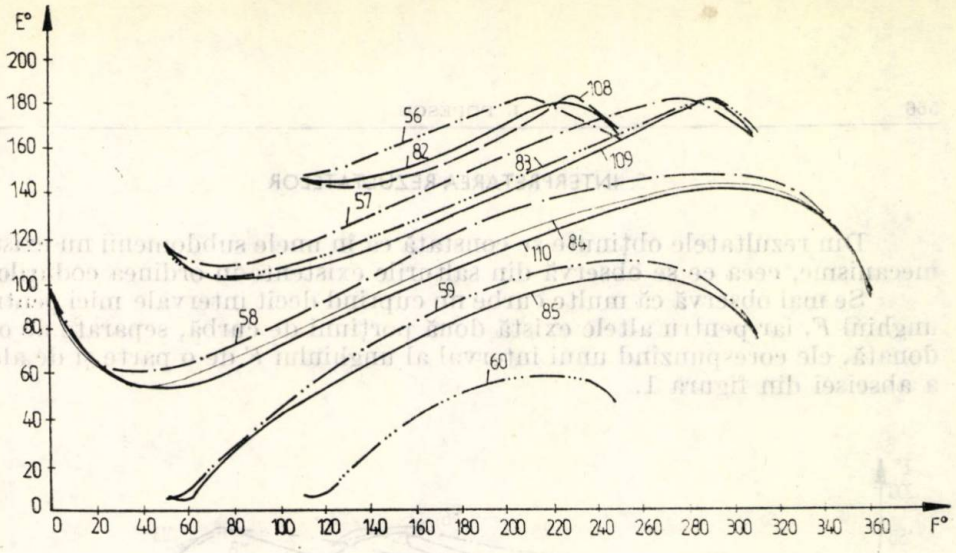

E°
F°
108
56
82
83
109
57
110
84
59
85
58
60

Fig. 7

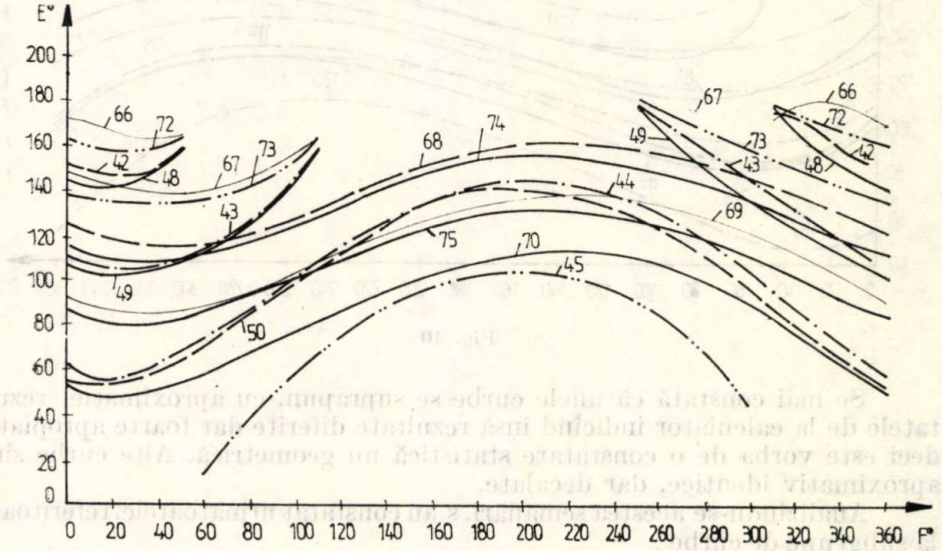
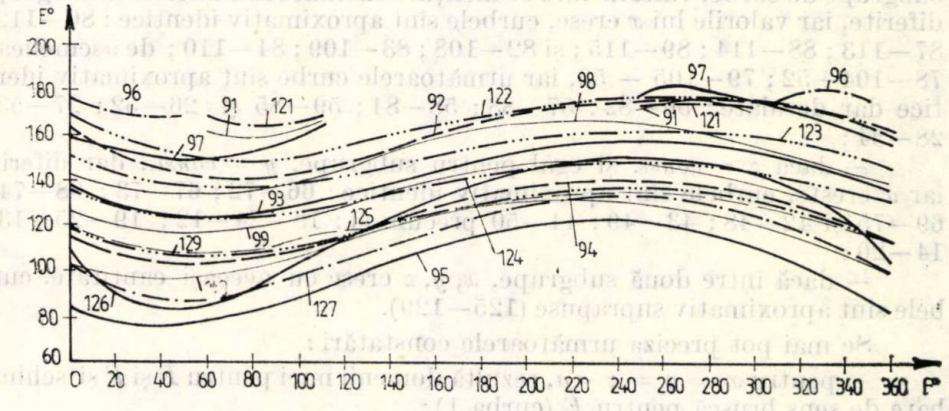

E°
F°
66
72
42
48
67
73
68
74
49
67
66
72
73
43
42
48
43
44
69
75
70
45
49
50

Fig. 8


E°
F°
96
91
121
97
92
122
98
97
96
91
121
123
93
125
129
99
124
94
95
126
127

5. INTERPRETAREA REZULTATELOR

Din rezultatele obținute se constată că în unele subdomenii nu există mecanisme, ceea ce se observă din salturile existente în ordinea codurilor.

Se mai observă că multe curbe nu cuprind decît intervale mici pentru unghiul F, iar pentru altele există două porțiuni de curbă, separate de ordonată, ele corespunzînd unui interval al unghiului F de o parte și de alta a abscisei din figura 1.

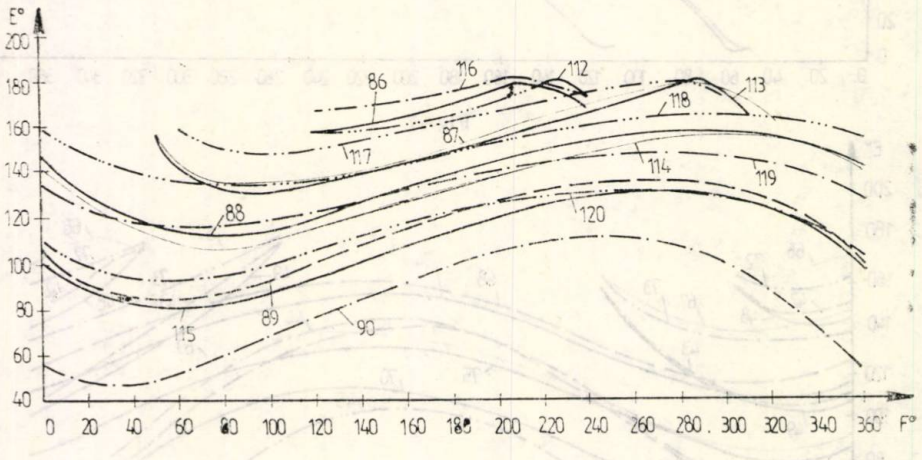


Fig. 10

Se mai constată că unele curbe se suprapun, cu aproximație, rezultatele de la calculator indicînd însă rezultate diferite dar foarte apropiate, deci este vorba de o constatare statistică nu geometrică. Alte curbe sînt aproximativ identice, dar decalate.

Analizîndu-se acestea semănări, s-au constatat următoarele, referitoare la subgrupe de curbe :

— dacă valorile lui y se mențin identice și constante, pentru diferite subgrupe de curbe, valorile lui z se mențin constante sau diferite la subgrupe diferite, iar valorile lui x cresc, curbele sînt aproximativ identice : 86—112 ; 87—113 ; 88—114 ; 89—115 ; și 82—108 ; 83—109 ; 84—110 ; de asemenea : 78—104—52 ; 79—105 — 53, iar următoarele curbe sînt aproximativ identice dar decalate : 56—82 ; 57—83 ; 58—84 ; 59—85 și 26—52 ; 27—53 ; 28—54 ;

— dacă $z = const.$ și egal pentru subgrupe, $y = const.$, dar diferit, iar x crește, curbele sînt aproximativ identice : 66—72 ; 67—73 ; 68—74 ; 69—75 și 42—48 ; 43—49 ; 44—50 precum și : 18—24—12 ; 19—25—13 ; 14—20 ;

— dacă între două subgrupe, x, y, z cresc cu aceeași cantitate, curbele sînt aproximativ suprapuse (125—129).

Se mai pot preciza următoarele constatări :

— pentru $x = y = z < a$, rezultă domenii mici pentru E și F și schimbare de sens bruscă pentru E (curba 1) ;

— pentru $x = y = z > a$, rezultă rotație completă pentru manivelă, domeniu mic de variație pentru E, domeniu ce se micșorează prin creșterea lui x, y, z față de a (32 ; 63 ; 94 ; 125 ; 126 ; 127 ; 129) ;

— dacă $y = z < a$ și x crește de la $x < a$ la $x > a$, crește domeniul lui F (1 ; 2) ;

— dacă $x = z < a$, iar y crește, scad domeniile E, F (1 ; 6) ;

— dacă $x = y < a$, iar z crește, cresc F, E, curbele tinzînd spre linii segmentate (1 ; 26) ;

— dacă $y = z > a$, iar x crește, valorile lui E scad (31 ; 32 ; 33 ; 34) ;

— dacă $x = z > a$, iar y crește, valorile lui E cresc (27 ; 32 ; 37 ; 42) ;

— dacă $x = y > a$, iar z crește, F scade, E crește (27 ; 57) ;

— pentru mecanismul paralelogram articulat, rezultă legi liniare simetrice.

6. CONCLUZII

a) Legile de mișcare realizabile de mecanismul patrulater articulat, cu dimensiuni în domenii uzuale, se pot lua din figurile de mai sus.

b) În afara acestor legi, se mai realizează alte legi de către mecanismele indicate în figura 2.

c) La proiectare se reprezintă legea dorită și se caută cea mai apropiată din diagramele de mai sus, găsindu-se chiar mecanismul sau domeniul în care se găsește mecanismul căutat.

d) Inegalitățile și concluziile obținute pe baza diagramelor permit studii de sinteză geometrică, precum și determinarea unor restricții la optimizarea mecanismelor.

Primită la redacție la 6 noiembrie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. I. POPESCU, *Posibilități de folosire a metodelor statisticii matematice, la analiza și sinteza mecanismelor*, SYROM'81, vol. I — 2, paper 66, pp. 653 — 662.

2. I. POPESCU, *Metode de sinteză a mecanismului patrulater articulat pentru poziții asociate impuse*, SYROM'81, vol. I—1 paper 22, pp. 225—232.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL RIGIDITĂȚII, STABILITĂȚII ELASTICE ȘI VIBRAȚIILOR PLĂCILOR CIRCULARE

de MIRCEA GH. MUNTEANU, GRIGORE I. GOGU, GHEORGHE N. RADU

Universitatea din Brașov

Ipoteza micilor deplasări, care stă la baza calculelor de ordinul întîi, nu convine în toate cazurile întîlnite în practică, de multe ori fiind necesare calcule de ordinul doi. În această situație o stare plană de tensiune, care poate apare ca urmare a forțelor centrifuge, a unei distribuții neuniforme de temperatură etc., are o influență notabilă asupra comportării la încovoiere a plăcii. Este cazul pînzelor circulare, frezelor disc, discurilor de ambreiaj, discuri de turbină etc. Se pot modifica rigiditatea plăcii la încovoiere, frecvențele proprii sau poate apare chiar fenomenul de pierdere a stabilității elastice (bifurcare). Aceste aspecte sînt studiate în lucrare atît analitic, cît și cu ajutorul metodei elementelor finite, folosind un tip de element finit propus de autori și descris în lucrare. Rezultatele numerice sînt date sub formă de diagrame și comparate cu cele din literatura de specialitate obținute prin metode analitice și mai ales, experimentale. Se constată o foarte bună concordanță.

1. INTRODUCERE

Discurile circulare sînt larg răspîndite în construcția de mașini : freze disc, pînze circulare, discuri de ambreiaj, discuri de turbină etc. În general, grosimea discurilor este mică în raport cu diametrul, astfel încît ele pot fi considerate plăci plane. După cum se știe, solicitarea plăcilor plane se poate împărți în două : solicitarea dată de forțele cuprinse în planul lor, așa numita solicitare de membrană, și solicitarea la încovoiere de către forțe perpendiculare pe planul lor. Ca urmare a adoptării ipotezei lui Kirchhoff, ipoteza normalelor drepte, tensiunile date de solicitarea de membrană sînt constante pe grosimea plăcii, iar cele rezultate în urma încovoierii au o variație liniară, fiind nule în dreptul planului median. Dacă materialul este liniar, adică este respectată legea lui Hooke, și dacă, în plus, se poate adopta ipoteza micilor deplasări, atunci cele două solicitări se pot studia separat, ele neinfluențîndu-se reciproc : solicitarea de membrană se studiază cu ajutorul teoriei elasticității în plan (starea plană de tensiune), iar încovoierea plăcilor cu ajutorul teoriei bazate pe ipoteza lui Kirchhoff. Există o analogie între cele două probleme, dată de asemănarea ecuațiilor ce le descriu ; solicitarea de membrană satisface relația :

$$\Delta^2 F = 0, \tag{1}$$

în care F este funcția de tensiune, iar încovoierea plăcilor este descrisă de ecuația

$$\Delta^2 w = \frac{p}{D}, \tag{2}$$

în care w este deplasarea măsurată perpendicular pe planul plăcii, p este forța distribuită normal la suprafața plăcii, iar $D = Eh^3/12\,(1 - \nu^2)$, reprezintă modulul de rigiditate la încovoiere al plăcii. Cu E s-a notat modulul

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 6, 1983 P. 568–592

de elasticitate longitudinal al materialului, ν reprezintă coeficientul lui Poisson, iar h este grosimea plăcii.

De multe ori în practică, tensiunile de membrană pot avea un efect considerabil asupra încovoierii plăcii, şi neglijarea lor ar duce la erori însemnate. Pentru a ţine cont de acest aspect trebuie făcute calcule de ordinul doi. În practică, tensiunile de membrană pot apare ca urmare a unei încălziri neuniforme a discului, a forţelor de inerţie, a unei pretensionări sau chiar datorită unor forţe exterioare, cum ar fi forţele de aşchiere din cazul frezelor sau a pînzelor circulare. Efectul lor constă, de exemplu, în modificarea rigidităţii plăcilor ; de asemenea, se modifică valorile frecvenţelor proprii, ceea ce poate duce la fenomene de rezonanţă la alte turaţii decît la cele determinate dintr-un calcul de ordinul întîi. În sfîrşit, se poate ajunge chiar la apariţia fenomenelor de pierdere a stabilităţii elastice.

Lucrarea de faţă îşi propune examinarea unor aspecte legate de influenţa tensiunilor de membrană asupra comportării la încovoiere a discurilor circulare.

2. ÎNCOVOIEREA PLĂCILOR CIRCULARE

Pentru început se va examina pe scurt încovoierea plăcilor circulare dată de sarcini transversale nesimetrice, în absenţa tensiunilor de membrană. Notaţiile folosite rezultă din figura 1. Ecuaţia (2) în coordonate polare se scrie :

$$\left(\frac{\partial}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)^2 w=\frac{p}{D}. \tag{2'}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (2) este [1] :

$$w=w_0+w_1=Q_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}[Q_n(r)\cos n\theta+Q'(r)\sin n\theta]+w_1, \tag{3}$$

în care

$$Q_0(r)=A_0+B_0r^2+C_0\ln r+D_0r^2\ln r,$$

$$Q_1(r)=A_1r+B_1r^3+C_1r^{-1}+D_1r\ln r,$$

$$Q_n(r)=A_nr^n+B_nr^{-n}+C_nr^{n+2}+D_nr^{-n+2}, \qquad n\geqslant 2,$$

$$Q_1'(r)=A_1'r+B_1'r^3+C_1'r^{-1}+D_1'r\ln r,$$

$$Q_n'(r)=A_n'r^n+B_n'r^{-n}+C_n'r^{n+2}+D_n'r^{-n+2}, \qquad n\geqslant 2.$$

Constantele $A_n, B_n, C_n, D_n, A_n', B_n', C_n', D_n'$ se determină din condiţiile pe contur. În relaţia (3) cu w_0 s-a notat soluţia ecuaţiei biarmonice omogene, iar cu w_1 o soluţie particulară a ecuaţiei (2). În practică cel mai întîlnit caz de încovoiere este încărcarea cu o forţă concentrată aplicată pe conturul

exterior, conturul interior fiind cel mai des încastrat, astfel încît ecuația (2) devine omogenă, iar $w_1 = 0$. În acest caz, dacă se consideră originea unghiului θ în dreptul razei corespunzătoare punctului de aplicație al forței concentrate, problema este simetrică și din relația generală (3) dispar termenii în sin $n\theta$. Condițiile pe contur sînt :

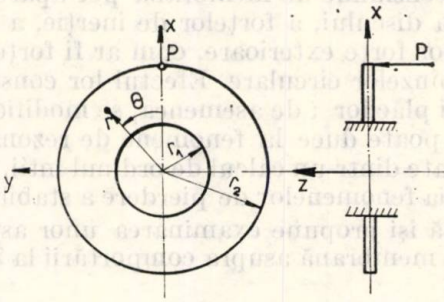


Fig. 1

$$r = r_1 ; \begin{cases} w = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial r} = 0 \end{cases} \quad ; \; r = r_2 \begin{cases} M_r = 0 \\ T_r - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} = t. \end{cases} \tag{4}$$

Se reamintesc relațiile :

$$\begin{Bmatrix} M_r \\ M_\theta \\ M_{r\theta} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathfrak{X}_r \\ \mathfrak{X}_\theta \\ \mathfrak{X}_{r\theta} \end{Bmatrix} \text{ sau } \{M\} = [D]\,\{\mathfrak{X}\}, \tag{5}$$

în care {M} este vectorul momentelor încovoietoare și de torsiune, iar $\{\mathfrak{X}\}$ este vectorul curburii și a torsiunii :

$$\mathfrak{X}_r = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2},$$

$$\mathfrak{X}_\theta = -\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{r \partial r},$$

$$\mathfrak{X}_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right).$$

Relația (5) este transpunerea legii lui Hooke la teoria plăcilor plane subțiri. De asemenea, se știe, din ecuațiile de echilibru, că

$$T_r = \frac{M_\theta - M_r}{r} - \frac{\partial M_r}{\partial r} - \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} = -D\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w). \tag{6}$$

În relaţiile (4) cu t s-a notat descompunerea în serie Fourier a forţei concentrate :

$$t = \frac{P}{\pi r_2}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\,\theta\right). \tag{7}$$

Înlocuind soluţia generală (3) în relaţiile (5) şi (6) şi apoi în condiţiile pe contur (4) rezultă un sistem liniar infinit avînd ca necunoscute constantele A_n, B_n, C_n şi D_n, problema fiind astfel rezolvată. Rezolvarea sistemului nu pune probleme deosebite, necunoscute fiind decuplate patru cîte patru, deci sistemul se reduce de fapt la un număr infinit de sisteme cu patru ecuaţii de patru necunoscute. În cazul plăcii circulare încastrate pe conturul interior se obţine [8] :

$$\begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{Bmatrix} = [H_n]^{-1}\,\{f_n\}\cdot\psi,$$

în care

$$H_0 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1^2 & \ln\rho_1 & \rho_1^2\ln\rho_1 \\ 0 & 2\rho_1 & 1/\rho_1 & \rho_1(2\ln\rho_1+1) \\ 0 & 2(1+\nu) & \nu-1 & \nu+3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_1^3 & 1/\rho_1 & \rho_1\ln\rho_1 \\ 1 & 3\rho_1^2 & -1/\rho_1^2 & \ln\rho_1+1 \\ 0 & 2(3+\nu) & 2(1-\nu) & 1+\nu \\ 0 & 2(3+\nu) & 2(1-\nu) & \nu-3 \end{bmatrix},$$

$H_n =$

$$\begin{bmatrix} \rho_1^n & \rho_1^{-n} & \rho_1^{n+2} & \rho_1^{-n+2} \\ n\rho_1^{n-1} & -n\rho_1^{-n-1} & (n+2)\rho_1^{n+1} & -(n-2)\rho_1^{-n+1} \\ n(n-1)(1-\nu) & n(n+1)(1-\nu) & (n+1)[n+2-\nu(n-2)] & (n-1)[n-2-\nu(n+2)] \\ n^2(n-1)(1-\nu) & -n^2(n+1)(1-\nu) & n(n+1)[n(1-\nu)-4] & -n(n-1)[n(1-\nu)+4] \end{bmatrix}, \quad n \geqslant 2,$$

$$\{f_0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2\pi \end{Bmatrix}; \quad \{f_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/\pi \end{Bmatrix}; \quad \{f_n\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\pi \end{Bmatrix}, \; n \geqslant 2,$$

iar ρ este raza adimensională : $\rho = r/r_2$. Constanta ψ are valoarea

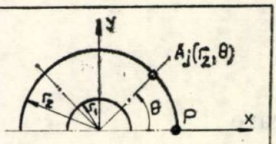
$$\psi = \frac{Pr_2^2}{D}.$$

Prin limitarea seriei (3) la un număr finit de termeni rezultă o bună aproximaţie, procedeul fiind suficient de convergent. Pentru calculul cu trei zecimale exacte sînt suficienţi primii 10 termeni ai seriei (3). Soluţia se obţine sub forma :

$$w_{(r,\theta)} = \frac{P \cdot r_2^2}{D} \sum_{n=0}^{\infty} q(r) \cos n\theta, \tag{8}$$

în care funcţiile $q(r)$ provin din funcţiile $Q(r)$, dar sînt adimensionale. Relaţia (8) indică faptul că la aceeaşi forţă deplasarea variază proporţional cu raza exterioară la pătrat şi invers proporţional cu cubul grosimii, desigur păstrîndu-se constant raportul r_1/r_2. Soluţia obţinută cu metoda analitică expusă s-a comparat cu rezultatele date de metoda elementelor finite. S-a constatat o foarte bună concordanţă, aşa cum reiese şi din tabelul 1 în care s-au dat deplasările sub forţă, obţinute prin cele două metode. Pentru metoda elementelor finite s-a utilizat programul SAP IV, [4].

Punctul $A_j(r,\theta)$	Deplasarea, $w(r,\theta)$, [mm]		
	$w(r,\theta)=\frac{Pr_2^2}{D}\sum_{n=0}^{\infty} q(r)\cos n\theta$		MEF
	$n=10$	$n=20$	
$A_0(r_2, 0^\circ)$	0,3052	0,30921	0,30723
$A_1(r_2, 45^\circ)$	$0,7935 \cdot 10^{-1}$	$0,7845 \cdot 10^{-1}$	$0,7866 \cdot 10^{-1}$
$A_3(r_2, 90^\circ)$	$-0,1230 \cdot 10^{-1}$	$-0,1298 \cdot 10^{-1}$	$-0,1201 \cdot 10^{-1}$
$A_4(r_2, 135^\circ)$	$-0,6094 \cdot 10^{-2}$	$-0,5838 \cdot 10^{-2}$	$-0,5691 \cdot 10^{-2}$
$A_5(r_2, 180^\circ)$	$0,1241 \cdot 10^{-3}$	$0,6165 \cdot 10^{-3}$	$0,4711 \cdot 10^{-3}$



P = 100 N
r_1 = 60 mm
r_2 = 160 mm
h = 1,6 mm

Obs. : eroarea este de acelaşi ordin de mărime cu deplasarea

Punerea altor condiţii pe contur se poate face fără dificultate. De exemplu, în cazul în care conturul interior este rezemat, rezultă

$$r = r_1; \begin{cases} w = 0 \\ M_r = 0 \end{cases},$$

mersul calculului fiind acelaşi [1], [2].

În practică, o caracteristică importantă, în funcţie de care se face alegerea sculelor aşchietoare, de exemplu, este rigiditatea statică a discurilor, definită ca raportul dintre forţa concentrată şi deplasarea sub forţă. Ea se obţine uşor din relaţia (8) punînd $\theta = 0$ şi $r = r_2$:

$$w_P = \frac{Pr_2^2}{D} \cdot \eta,$$

în care $\eta = \sum_{n=0}^{\infty} q(r_2)$. Rigiditatea statică k are expresia

$$k = \frac{D}{\eta r_2^2}. \tag{9}$$

În cazul plăcilor inelare încastrate pe conturul interior, autorii au făcut calculele cu ajutorul calculatorului electronic, variaţia coeficientului adimensional η fiind trasată în figura 2.

3. ÎNCOVOIEREA PLĂCILOR ÎN PREZENŢA TENSIUNILOR DE MEMBRANĂ

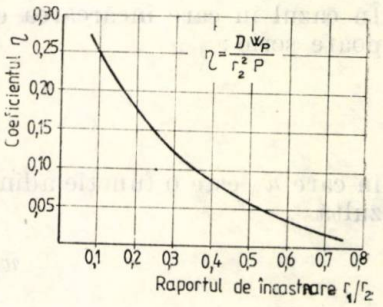


Fig. 2

În cazul în care efectul tensiunilor de membrană asupra încărcării plăcilor nu se poate neglija, deplasarea transversală trebuie să satisfacă ecuaţia [2], [3]:

$$\mathfrak{L}(w) = D\Delta^2 w - p - h\left(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right.$$

$$+ \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} - X \frac{\partial w}{\partial x} - \tag{10}$$

$$\left. - Y \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0,$$

sau în coordonate polare:

$$\mathfrak{L}(w) = D\Delta^2 w - p - h\left[\sigma_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma_\theta \left(\frac{\partial w}{r\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\tau_{r\theta} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) - R\frac{\partial w}{\partial r} - \Theta \frac{\partial w}{r\partial \theta}\right] = 0. \tag{10'}$$

Relaţiile (10) şi (10′) se pot pune sub forma:

$$\mathfrak{L}(w) = D\Delta^2 w - p + \frac{h}{D}\mathcal{G}(w).$$

În faţa operatorului $G(w)$ s-a scos coeficientul $\frac{h}{D}$, astfel încît $\mathcal{G}(w)$ nu mai depinde de grosimea plăcii. În relaţiile de mai sus σ_x, σ_y, τ_{xy} şi σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ sînt tensiunile de membrană raportate la un reper cartezian, respectiv la un reper polar, iar X, Y şi R, Θ sînt forţele masice pe unitatea de volum, acţionînd în planul plăcii. Dacă starea plană de tensiune $\{\sigma\}$ nu se modifică în timp şi este independentă de încărcarea plăcii, atunci ecuaţia (10) este liniară în deplasare şi derivatele sale şi ca urmare comportarea plăcii la încovoiere este de asemenea liniară. Spre deosebire însă de ecuaţia (2), rezolvarea analitică a ecuaţiei (10) prezintă dificultăţi mari. De cele mai multe ori, în practică interesează obţinerea unor rezultate aproximative. În continuare, se propune o astfel de metodă aproximativă, cu rezultate bune în cazul în care efectul tensiunilor de membrană asupra încovoierii

este relativ mic, dar nu neglijabil, caz frecvent în practică. Se presupune că este cunoscută soluția ecuației (2) și fie această soluție

$$w = w_0.$$

În cazul în care încărcarea este constituită dintr-o forță concentrată se poate scrie:

$$w_0 = \frac{Pr_2^2}{D}\,\bar{w}_0,$$

în care $\bar{w}_0$ este o funcție adimensională; din comparație cu relația (8) rezultă

$$\bar{w}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} q(r)\cos n\theta.$$

Se mai presupune că în cazul prezenței unei stări inițiale plane de tensiune, alura deplasării (11) nu se schimbă, adică în acest caz deplasarea are forma:

$$w = \beta w_0, \tag{11}$$

în care β este o constantă. Evident, funcția (11) nu satisface ecuația (10), dar se pune condiția minimizării erorii, prin aplicarea metodei lui Galerkin. Trebuie deci să existe relația:

$$\int \beta w_0\, \mathfrak{L}(\beta w_0)\, dA = 0, \tag{12}$$

integrala extinzîndu-se asupra întregii suprafețe a plăcii. Întrucît w_0 satisface ecuația (2), rezultă

$$\mathfrak{L}(\beta w_0) = (\beta - 1)p - \beta h\left[\sigma_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma_\theta\left(\frac{\partial w}{r\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial\theta^2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\tau_{r\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right) - R\frac{\partial w}{\partial r} - \Theta\frac{\partial w}{r\partial\theta}\right] = (\beta - 1)p + \beta\frac{h}{D}\,\mathfrak{G}(w_0).$$

Prin înlocuirea în (12), rezultă

$$\beta = \frac{1}{1 + \alpha'\dfrac{h}{D}}, \tag{13}$$

cu notația

$$\alpha' = \frac{\displaystyle\int_A w_0 \cdot \mathfrak{G}(w_0)\, dA}{\displaystyle\int_A w_0 p\, dA}. \tag{14}$$

Coeficientul α' poate fi pozitiv sau negativ, depinzînd de semnele tensiunilor de membrană. Din considerente de similitudine se poate scrie

$$\alpha' = r_2^2 \alpha$$

şi deci

$$\beta = \frac{1}{1 + \alpha \dfrac{hr_2^2}{D}}. \tag{13'}$$

Coeficientul α nu depinde nici de dimensiunile plăcii, nici de încărcarea exterioară de încovoiere, ci numai de tensiunile de membrană.

Numitorul expresiei (14) reprezintă dublul lucrului mecanic produs de încărcarea exterioară pe deplasările w_0. În cazul în care aceasta este compusă numai dintr-o forţă concentrată (fig. 1), numitorul are forma $P\, w_p$, w_p fiind deplasarea sub forţa care se poate citi din diagrama din figura 2 pentru discul circular încastrat pe conturul interior.

Tot la expresiile (13) şi (14) se ajunge dacă se aplică teorema de extrem a energiei potenţiale totale. Energia potenţială totală are forma [2], [3]:

$$\pi(w) = -\int_A pw \, dA + \frac{1}{2}\int_A \{\mathfrak{K}\}^T [D] \cdot \{\mathfrak{K}\} \, dA + \frac{h}{2}\int_A \{w'\}^T [\sigma] \{w'\} \, dA, \tag{15}$$

în care

$$\{w'\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial r} \\ \\ \dfrac{\partial w}{r \partial \theta} \end{Bmatrix} \text{ şi } [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{bmatrix},$$

celelalte notaţii fiind cunoscute. Relaţia (15) se mai scrie:

$$\pi = V(w) + U_1(w) + U_2(w), \tag{15'}$$

notînd cu V potenţialul încărcării exterioare şi cu U_1 şi U_2 cei doi termeni ai energiei de deformaţie, energia de deformaţie datorită încovoierii, respectiv lucrul mecanic dat de tensiunile de membrană pe deformaţiile de încovoiere. Înlocuind în (15') relaţia (11), obţinem:

$$\pi(\beta w_0) = \beta V(w_0) + \beta^2 U_1(w_0) + \beta^2 U_2(w_0)$$

şi punînd

$$\frac{\partial \pi}{\partial \beta} = 0,$$

rezultă

$$\beta = \frac{-V(w_0)}{2[U_1(w_0) + U_2(w_0)]}.$$

Dacă se ţine seama de teorema lui Clapeyron :

$$U_1(w_0) = \frac{1}{2} V(w_0),$$

se obţine

$$\beta = \frac{1}{1 + \dfrac{U_2(w_0)}{U_1(w_0)}}. \tag{16}$$

La deducerea relaţiei (16) s-a aplicat de fapt metoda Rayleigh-Ritz. Echivalenţa relaţiilor (16) şi (13) rezultă imediat dacă se observă că

$$\mathcal{G}(w) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sigma_r \frac{\partial w}{\partial r} + \tau_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(r\tau_{r\theta}\frac{\partial w}{\partial r} + \sigma_\theta \frac{\partial w}{\partial \theta}\right),$$

în care s-a ţinut cont de ecuaţiile de echilibru :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + R = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta} + \Theta = 0.$$

Integrînd prin părţi relaţia $\int w_0 \mathcal{G}(w_0) \mathrm{d}A$, termen cu termen, în care $\mathcal{G}(w_0)$ s-a introdus ca mai sus, rezultă

$$\int w_0\, \mathcal{G}(w_0)\, \mathrm{d}A = \int \{w_0'\}[\sigma]\{w_0'\}\, \mathrm{d}A = U_2(w_0).$$

Expresia $U_2(w_0)$ reprezintă lucrul mecanic dat de tensiunile de membrană în cursul încovoierii, considerînd că deplasările de încovoiere sînt $w = w_0(r, \theta)$. Calculul lui $U_2(w_0)$ nu ridică probleme deosebite, integrala lui U_2 putîndu-se deduce numeric, de exemplu prin metoda diferenţelor finite.

Metoda expusă este aplicabilă plăcilor de orice formă. În continuare ea va fi exemplificată numai pe discuri circulare. Pentru început se va studia un exemplu simplu din lucrarea [2], o placă circulară fără gaură cen-

trală, încastrată pe contur, încărcată cu o forţă uniform distribuită p, perpendicular pe planul ei, şi concomitent supusă la o compresiune biaxială uniformă $\sigma_r = \sigma_\theta = -\sigma$ în planul median. Această compresiune se realizează printr-o presiune radială uniform repartizată pe conturul exterior. Particularizarea ecuaţiei (10′) pentru cazul axial simetric conduce la :

$$\frac{D}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)\right]\right\} - p - h\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right) = 0, \qquad (17)$$

cu soluţia

$$w = \frac{pa^4\left[J_0\left(\frac{sr}{a}\right) - J_0(s)\right]}{2S^3 J_1(S)\, D} - \frac{pa^2(a^2 - r^2)}{4\, S^2 D},$$

în care

$$S^2 = \frac{\sigma h a^2}{D},$$

iar J_0 şi J_1 sînt funcţiile Bessel de speţa întîi de ordinul zero, respectiv unu, a fiind raza plăcii. Deplasările devin infinite pentru rădăcinile lui $J_1(S)$. Cea mai mică dintre soluţii, care prezintă interes practic, este $S = 3{,}83171$, de unde rezultă tensiunea critică de flambaj (bifurcare) :

$$\sigma_{cr} = \frac{14{,}682D}{a^2 h}.$$

Se poate arăta că dacă $\sigma << \sigma_{cr}$, atunci se poate scrie aproximativ

$$w = \frac{w_0}{1 - \frac{\sigma}{\sigma_{cr}}} = \frac{w_0}{1 - \frac{\sigma a^2 h}{14{,}682 \cdot D}}.$$

Dacă se aplică metoda aproximativă expusă, se obţine, ştiind că $w_0 = \frac{p}{64\, D}(a^2 - r^2)^2$,

$$U_1(w_0) = \frac{1}{2}\int_A q\, w_0\, \mathrm{d}A = \frac{\pi p^2 a^6}{384 D},$$

$$U_2(w_0) = \frac{h}{2}\int_A \sigma\left(\frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}r}\right)^2 \mathrm{d}A = \frac{\pi h \sigma\, q^2\, a^8}{6144\, D^2}.$$

Prin aplicarea relației (16) se obține

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\sigma a^2 h}{16D}},$$

expresie foarte apropiată de cea exactă. De remarcat că se obține cu o eroare de circa 8% și valoarea forței minime de flambaj.

Dacă se reia calculul și pentru placa simplu rezemată pe contur, pentru care

$$w_0 = \frac{p}{64D}(a^2 - r^2)\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}a^2 - r^2\right),$$

se obține

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\sigma a^2 h}{4{,}2D}},$$

adică $\sigma_{cr} = \frac{4{,}2D}{a^2 h}$, valoare ce coincide cu cea exactă [2].

Se va studia în continuare o placă inelară, încastrată pe conturul interior, în mișcare de rotație, asupra căreia acționează o forță concentrată perpendicular pe planul plăcii (fig. 1). A cest caz este de mare interes în practică. Tensiunile de membrană datorită forțelor centrifuge au expresia [9]:

$$\sigma_r = \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^3}{8}[c_1 - c_2 r^{-2} - (3+\nu)r^2],$$

$$\sigma_\theta = \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8}[c_1 + c_2 r^{-2} - (1+3\nu)r^2],$$

cu

$$c_1 = (1+\nu)\frac{(1-\nu)r_1^4 + (3+\nu)r_2^4}{r_1^2(1+\nu) + r_1^2(1-\nu)},$$

$$c_2 = r_1^2 r_2^2(1-\nu)\frac{r_1^2(1+\nu) - r_2^2(3+\nu)}{r_2^2(1+\nu) + r_1^2(1-\nu)}.$$

Calculul lui $U_1(w_0)$, din expresia (16) nu prezintă dificultăți

$$U_1 = \frac{1}{2} P \cdot w_p = \frac{P^2}{2k},$$

k fiind rigiditatea statică dată de relaţia (9). La calculul lui $U_2(w_0)$ s-a aplicat metoda diferenţelor finite, utilizîndu-se soluţia w_0 a ecuaţiei (2) sub forma (3). Metoda s-a dovedit rapid convergentă : pentru reţeaua de diferenţe finite s-au luat 12 intervale pe circumferinţă (calculele s-au făcut pentru o jumătate din disc din motive de simetrie) şi 8 pe rază. Seria (3) s-a limitat la primii 8 termeni. Programul de calculator a fost scris în limbajul BASIC — 2, pentru un calculator WANG 2200 MVP. El a fost conceput cît mai general pentru a permite calculul energiei U_2 pentru orice distribuţie a tensiunilor de membrană. Pentru discurile în mişcare de rotaţie se obţine :

$$\beta = \frac{1}{1 + \alpha_1 \dfrac{r_2^4 \omega^2}{Eh^2}}, \tag{18}$$

deoarece tensiunile de membrană depind de pătratul razei discului.

Variaţia coeficientului α_1 este dată în figura 3. După cum rezultă din relaţia (18), coeficientul β este subunitar şi deci, cum era de aşteptat, deplasările datorită încovoierii scad. Se poate defini o rigidit ate dinamică k_d, analog cu rigiditatea statică

$$k_d = \frac{P}{\beta w_p} = k\left(1 + \alpha_1 \frac{r_2^4 \omega^2}{Eh^2}\right).$$

Creşterea rigidităţii este

$$\xi = \frac{k_d - k}{k} = \frac{U_2(w_0)}{U_1(w_0)} = \alpha_1 \frac{r_2^4 \omega^2}{Eh^2}. \tag{19}$$

Se remarcă faptul că raza exterioară a discului intervine la puterea a patra, ceea ce face ca, menţinînd turaţia constantă, rigiditatea dinamică să aibe o creştere pronunţată cu mărimea razei.

Pentru o verificare suplimentară a metodei expuse s-au făcut calcule şi cu ajutorul metodei elementelor finite. Programul utilizat (SAP IV, [4]) poate executa numai calcule de ordinul întîi. Calculele de ordinul doi s-au simulat în mai multe etape astfel :

— Pentru început discul s-a considerat în repaus ; s-a obţinut deci, cu aproximaţia datorată metodei, soluţia $w = w_0(r, \theta)$ prin deplasările nodale furnizate de program ;

— În a doua etapă s-au modificat coordonatele nodurilor :

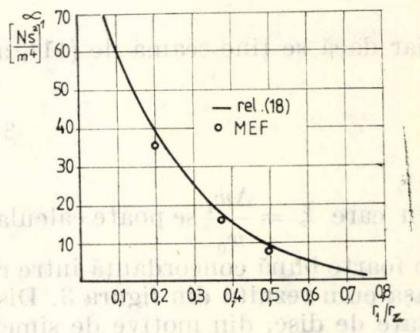


Fig. 3

$$z_{1i} = z_0 + w_0(r_i, \theta_i) ; \; i = 1 \ldots N,$$

N fiind numărul de noduri ale discretizării, iar $z_0 = \text{const.}$ (placa fiind plană) coordonatele inițiale ale nodurilor; s-a îndepărtat forța P, introducînd în schimb o viteză unghiulară ω, rezultă deplasările nodale:

$$w = \Delta w_1(r, \theta),$$

care se scad din deplasările inițiale w_0. Dar nu acestea sînt deplasările corecte deoarece ele sînt date de momentele încovoietoare cu brațul egal cu deplasarea inițială $w_0(r, \theta)$.

Rezultă că în realitate scăderea deplasării este mai mică, prin urmare în etapa următoare se modifică din nou coordonatele nodurilor:

$$z_{2i} = z_{1i} - \Delta w_1(r_i, \theta_i), \; i = 1 \ldots N.$$

Metoda iterativă poate continua, după etapa $n + 1$, obținîndu-se

$$z_{ni} = z_{1i} - \Delta w_{n-1}(r_i, \theta_i), \; i = 1 \ldots N.$$

Metoda este rapid convergentă, calculele putîndu-se opri cînd

$$\Delta w_n(r_i, \theta_i) = \Delta w_{n-1}(r_i, \theta_i).$$

În realitate sînt suficiente doar primele două etape, deoarece ca urmare a liniarității ecuației (10) s-a presupus $\omega = \text{const.}$, se poate scrie:

$$\xi = \frac{\Delta w_1}{w_0} = \frac{\Delta w_j}{w_0 - \Delta w_{j-1}},$$

j fiind un indice care desemnează numărul etapei de calcul. Într-o etapă oarecare se poate scrie, deci,

$$\Delta w_j = \xi(w_0 - \Delta w_{j-1}),$$

iar dacă se ține seama de (11), adică $w_0 - \Delta w_{j-1} = \beta \cdot w_0$, se obține

$$\beta = \frac{1}{1 + \xi},$$

în care $\xi = \dfrac{\Delta w_1}{w_0}$ se poate calcula după primele două etape. S-a constatat o foarte bună concordanță între rezultatele obținute prin cele două metode așa cum rezultă din figura 3. Discretizarea discului (s-a luat numai jumătate de disc, din motive de simetrie) a conținut 66 noduri și 50 elemente finite patrulatere, rezultînd un sistem de 300 ecuații cu lățimea semibenzii 42. Modificarea coordonatelor nodale de la o etapă la alta s-a făcut cu ajutorul unui program de calculator separat, ținînd cont de faptul că toate datele necesare se găsesc pe fișiere, [4].

În cazul unei pînze circulare, cu $r_2 = 16$ cm, $r_1 = 6$ cm, $h = 0{,}16$ cm, care se roteşte cu 3000 rot/min, rezultă

$$\xi = 17 \frac{0{,}16^4 \cdot 314{,}16^2}{2{,}1 \cdot 10^9 \cdot 0{,}0016^2} \approx 0{,}205, \text{ iar } \beta = 0{,}830,$$

adică rigiditatea creşte cu circa 20%. Dacă turaţia este de 4000 rot/min, rezultă $\xi = 0{,}364$ şi $\beta = 0{,}733$, creşterea rigidităţii fiind de 36%.

Calculele se pot reface uşor pentru studiul influenţei distribuţiei neuniforme de temperatură asupra rigidităţii discului. Se va considera o distribuţie axial-simetrică de temperatură. Analog cu relaţia (18) se poate scrie

$$\beta = \frac{1}{1 + \alpha_2 \dfrac{r_2^2 \Delta t}{h^2}},$$

în care Δt este diferenţa dintre temperatura conturului exterior şi temperatura conturului interior.

Pentru sculele aşchietoare în formă de disc se consideră că temperatura variază după legea [11]:

$$t = t_1 \left(\frac{r}{r_2}\right)^{\gamma},$$

t_1 reprezentînd temperatura conturului exterior. Exponentul γ s-a luat 3,1 [11]

Acestei variaţii a temperaturii îi corespund tensiunile (contur interior încastrat) [9]:

$$\sigma_r = E\alpha_t \left[k_1 \left(\frac{r}{r_2}\right)^{-2} + k_2 \left(\frac{r}{r_2}\right)^{\gamma} + k_4\right],$$

$$\sigma_\theta = E\alpha_t \left[-k_1 \left(\frac{r}{r_2}\right)^{-2} + k_3 \left(\frac{r}{r_2}\right)^{\gamma} + k_4\right],$$

$$k_1 = -\frac{r_1}{1+\nu} \frac{k_5(1+\nu) - k_6 r_1}{r_2^2(1+\nu) + r_1^2(1-\nu)}; \quad k_2 = -\frac{t_1}{2+\gamma}; \quad k_3 = -t_1 \frac{1+\gamma}{2+\gamma},$$

$$k_4 = \frac{1}{1-\nu} \frac{k_5 r_1(1-\nu) + k_6 r_2^2}{r_2^2(1+\nu) + r_1^2(1-\nu)}; \quad k_5 =$$

$$= -\frac{(1+\nu)\, t_1\, r_1^{1+\gamma}}{r_2^{\gamma}(2+\gamma)}; \quad k_6 = \frac{(1-\nu)t_1}{2+\gamma},$$

α_t fiind coeficientul de dilatare termică liniară.

Deoarece tensiunile depind de E și nu depind de dimensiunile discului, din expresia (19) dispare modulul de elasticitate longitudinal, iar r_2 intervine la puterea a doua.

S-a ajuns la concluzia că dacă diferența de temperatură este mai mică decît temperatura critică de flambaj (a se vedea capitolul 4), influența ei asupra rigidității este neglijabilă.

Prin metoda expusă se pot lua în considerare și alte tipuri de tensiuni de membrană (de exemplu tensiuni produse la pretensionare). Deoarece U_2 depinde liniar de tensiunile de membrană se poate scrie :

$$w = \frac{1}{1 + \Sigma \xi_i} w_0 ,$$

în care ξ_i ține cont de fiecare tip de tensiune de membrană.

4. STUDIUL STABILITĂȚII ȘI A VIBRAȚIILOR DE ÎNCOVOIERE ALE PLĂCILOR CIRCULARE PRIN METODA ELEMENTELOR FINITE

După cum se știe, această metodă, apărută și dezvoltată odată cu calculatoarele electronice, este extrem de eficientă, permițînd obținerea de rezultate numerice suficient de precise în probleme pentru care metodele analitice sînt complicate sau chiar imposibile. Punctul central al metodei îl constituie determinarea matricei de rigiditate pentru fiecare tip de element plecînd de la așa-numita funcție de interpolare, care leagă în mod unic deplasările unui punct oarecare din interiorul elementului de deplasările nodale. În cazul încovoierii plăcilor se scrie :

$$w(r, \theta) = (N(r,\theta)) \cdot \{w_e\}, \tag{20}$$

$(N(r, \theta))$ fiind matricea linie a funcției de interpolare, iar $\{w_e\}$ este vectorul deplasărilor nodale ale elementului care cuprinde pentru fiecare nod deplasarea w și cele două rotiri $\frac{\partial w}{\partial r}$ și $\frac{\partial w}{r \partial \theta}$. Introducînd relația (20) în expresia energiei potențiale totale (15), pentru un element finit rezultă

$$\pi_e = - \{R_e\}^T \{w_e\} + \frac{1}{2} \{w_e\}^T ([k] + [k_G]) \{w_e\}, \tag{21}$$

în care s-au făcut notațiile :

$$[k] = \int_{A_e} [B]^T [D] [B] \, dA, \tag{22}$$

$$[k_G] = h \int_{A_e} [C]^T [D] [C] \, dA, \tag{23}$$

iar cu $\{R_e\}$ s-au notat eforturile nodale ce rezultă din interacţiunea cu celelalte elemente finite. A_e este suprafaţa elementului finit.

Matricele $[B]$ şi $[C]$ intervin în egalităţile:

$$\{\mathfrak{X}\} = [B]\{w_e\} \text{ şi } \{w'\} = [C]\{w_e\} \tag{24}$$

deci

$$[B] = \begin{bmatrix} \left(-\frac{\partial^2 N}{\partial r^2}\right) \\ \left(-\frac{\partial^2 N}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial N}{r \partial r}\right) \\ \left(-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial N}{\partial \theta}\right)\right) \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N}{\partial r}\right) \\ \left(\frac{\partial N}{r \partial \theta}\right) \end{bmatrix}.$$

Deoarece legătura dintre deplasări nodale şi eforturi nodale trebuie să fie unică (cu excepţia mişcărilor de corp rigid), se va pune condiţia ca deplasările nodale să minimizeze expresia (21):

$$\frac{\partial \pi_e}{\partial \{w_e\}} = 0. \tag{25}$$

Dacă se presupune că solicitarea de membrană este independentă de încovoiere, se obţine

$$([k] + [k_G]) \cdot \{w_e\} = \{R_e\}, \tag{26}$$

$[k]$ fiind matricea de rigiditate, iar $[k_G]$ matricea de rigiditate geometrică ce ţine cont de efectele de ordinul doi. Asamblarea matricelor de rigiditate ale elementelor se face după procedeul obişnuit, obţinîndu-se pentru toată structura:

$$([k] + [k_G]) \cdot \{w\} = \{P\}, \tag{27}$$

$\{P\}$ fiind vectorul încărcării nodale. Rezolvarea sistemului liniar după punerea condiţiilor pe contur, conduce la aflarea deplasărilor şi a tensiunilor de încovoiere pentru diferite stări de tensiune de membrană. Tensiunile de membrană pot duce la scăderea rigidităţii plăcii şi chiar la pierderea stabilităţii elastice (bifurcare). Valorile critice ale stării de membrană se află rezolvînd problema de valori proprii:

$$([k] + \lambda[k_G])\{w\} = 0, \tag{28}$$

sau

$$\det([k] + \lambda[k_G]) = 0,$$

λ fiind un factor de proporţionalitate al încărcării.

Foarte importantă în practică este determinarea frecvenţelor şi a modurilor proprii de vibraţie a discurilor pentru determinarea turaţiilor critice. Acestea se află rezolvînd tot o problemă de valori proprii:

$$([k] + [k_G] - \omega^2[m]) \cdot \{w\} = 0, \tag{29}$$

în care $[m]$ este matricea maselor. Matricea $[m]$ se determină din considerente energetice; pentru un element energia cinetică se poate scrie:

$$E_e = \frac{1}{2} \int_{m_e} \dot{w}^2 \, \mathrm{d}m = \frac{1}{2} \{\dot{w}_e\}^T \left(\int_{m_e} (N)^T (N) \, \mathrm{d}m \right) \{\dot{w}_e\},$$

de unde

$$[m_e] = \int_{m_e} (N)^T (N) \, \mathrm{d}m, \tag{30}$$

cu m_e notîndu-se masa unui element. S-a considerat aceeaşi funcţie de interpolare pentru viteze ca şi pentru deplasări. Asamblarea matricelor $[m_e]$ se face ca şi asamblarea matricelor de rigiditate. Relaţia (29) permite şi studiul influenţei unei stări plane iniţiale de tensiune asupra frecvenţelor şi modurilor proprii de vibraţii. La relaţia (29) se ajunge aplicînd principiul lui Hamilton pe o perioadă, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, în absenţa încărcării exterioare; se obţine:

$$J = \int_0^T [E_c - (U_1 + U_2)] \, \mathrm{d}t = \frac{T}{4} [\{w_a\}^T (w^2[m] - [k] - [k_G]) \{w_a\}],$$

deoarece $\{w\} = \{w_a\} \sin\omega t$; în final punîndu-se condiţia

$$\frac{\partial J}{\partial \{w_a\}} = 0.$$

În cele ce urmează se prezintă un element finit specializat, semianalitic, utilizat în studiul discurilor circulare şi care permite rezolvarea problemelor enunţate. Principalul avantaj al elementului finit prezentat îl constituie numărul extrem de redus de elemente finite necesare la discretizare.

La rezolvarea problemelor de valori proprii ale plăcilor circulare este suficientă studierea doar a unui sector circular cuprins între două diametre nodale consecutive, aşa cum rezultă din figura 4. Întrucît diametrele nodale sînt axe de antisimetrie, laturile corespunzătoare acestora se consideră articulate. Se va mai considera că pe circumferinţa unui cerc de rază curentă r, deplasarea w variază sinusoidal; ca urmare se poate elabora un element

finit unidimensional (fig. 5). Fiecare element are două noduri, fiecare nod introducînd două grade de libertate, deplasarea w de-a lungul axei z şi rotirea φ în planul zr, pozitivă în sensul rotirii axei r peste z pe drumul cel

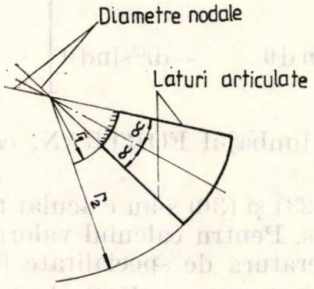


Fig. 4

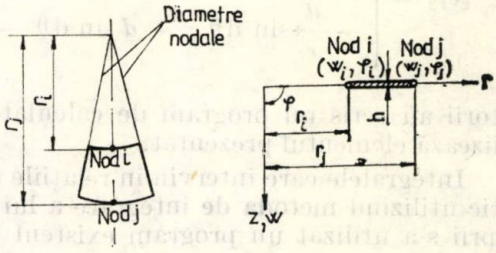


Fig. 5

mai scurt. Deplasarea w în interiorul unui element se alege de forma :

$$w = (c_1 + c_2 r + c_3 r^2 + c_4 r^3) \cos d\theta, \tag{31}$$

deci rotirea are expresia :

$$\varphi = \frac{dw}{dr} = (c_2 + 2c_3 r + 3c_4 r^2) \cos d\theta,$$

d fiind numărul de diametre nodale; unghiul θ variază între $-\alpha$ şi α, (fig. 4), unde $\alpha = \frac{\pi}{2d}$. Pentru deplasările nodale se poate scrie :

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ w_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 & r_1^3 \\ 0 & 1 & 2r_1 & 3r_1^2 \\ 1 & r_2 & r_2^2 & r_2^3 \\ 0 & 1 & 2r_2 & 3r_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} \text{ adică } \{w_e\} = [A] \cdot \{c\}. \tag{32}$$

Deci relaţia (31) se poate scrie :

$$w = (N) \{w_e\} = (1 r r^2 r^3) \ [A]^{-1} \{w_e\}. \tag{33}$$

Înlocuind relaţia (33) în relaţia (24) se obţine

$$[B] = [B_1] \cdot [A]^{-1},$$

cu

$$[B_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\cos d\theta & -6r\cos d\theta \\ \frac{d^2}{r^2}\cos d\theta & (d^2-1)\frac{1}{r}\cos d\theta & (d^2-2)\cos d\theta & (d-3)r\cos d\theta \\ -\frac{d}{r^2}\sin d\theta & 0 & d\sin d\theta & 2dr\sin d\theta \end{bmatrix},$$

iar $[c] = [c_1] \cdot [A]^{-1}$,
în care

$$[c_1] = \begin{bmatrix} 0 & \cos d\theta & 2r \cos d\theta & 3r^2 \cos d\theta \\ -\frac{d}{r} \sin d\theta & -d \sin d\theta & -dr \sin d\theta & -dr^2 \sin d\theta \end{bmatrix}.$$

Autorii au scris un program de calculator în limbajul FORTRAN, care utilizează elementul prezentat.

Integralele care intervin în relațiile (22), (23) și (30) s-au calculat numeric utilizînd metoda de integrare a lui Gauss. Pentru calculul valorilor proprii s-a utilizat un program existent în literatura de specialitate [6].

S-au studiat frecvențele și modurile proprii pentru plăcile inelare, cu diferite condiții pe contur, axial simetrice. Pentru verificarea rezultatelor, pentru cîteva cazuri a fost rulat și programul SAP. IV. Discul a fost împărțit în 160 elemente pe finite patrulatere : s-au luat 5 elemente pe rază și 32 elemente pe circumferință. A rezultat astfel un sistem de circa 800 elemente, lățimea semibenzii fiind de 165. Timpul de calculator necesar determinării primelor șase frecvențe proprii și moduri proprii a fost de 50 de minute. Trebuie remarcat și faptul că rezultatele au fost obținute în ordinea frecvențelor și nu în ordinea diametrelor nodale și a cercurilor nodale, ceea ce constituie un alt mare dezavantaj pe lîngă timpul mare de calculator. Pentru îmbunătățirea performanțelor, ulterior s-a luat în considerație numai o fișie cuprinsă între două diametre nodale consecutive. Numărul de elemente ale discretizării a depins de unghiul la centru al fișiei 2α : pentru $2\alpha = 180°$ (adică pentru un diametru nodal) s-au luat patru elemente pe rază și zece pe circumferință, iar pentru $2\alpha = 18°$ (adică pentru zece diametre nodale) s-au luat 20 elemente finite pe rază și șase pe circumferință. A rezultat un sistem de 200 pînă la 460 ecuații. Timpul de calculator a scăzut considerabil, la circa 10 minute pentru o rulare. S-au obținut în primul rînd frecvențele proprii corespunzătoare modurilor proprii fără nici un cerc nodal. S-au întîmpinat însă dificultăți la determinarea modurilor proprii cu mai multe cercuri nodale.

Programul scris de autori, pe baza elementului finit descris, s-a dovedit extrem de eficient, timpul de calculator scăzînd la circa 1,5 minute pentru o rulare care furnizează, pentru un anumit număr de diametre nodale, frecvențele proprii în ordinea cercurilor nodale. Placa s-a împărțit în zece elemente finite, rezultînd un sistem de 20 ecuații cu lățimea semibenzii de 4. Rezultatele obținute cu ajutorul programului scris de autori, așa cum rezultă și din figura 6, sînt în bună concordanță cu datele prezentate în lucrările [10], [11], în care valorile frecvențelor proprii au fost calculate cu ajutorul funcțiilor Bessel, respectiv prin metoda Ritz.

În figura 7 sînt date frecvențele proprii pentru discurile inelare încastrate pe conturul interior, prin mărimea adimensională k :

$$f = k \frac{h}{\pi D_2^2} \sqrt{\frac{E_g}{\gamma}}, \qquad (34)$$

în funcție de raportul r_1/r_2. În relația de mai sus, γ reprezintă greutatea specifică a materialului, iar D_2 diametrul exterior al discului.

În continuare s-a studiat influența turației discului asupra frecvențelor proprii. Întrucît rotirea discului duce la mărirea rigidității la încovoiere și frecvențele proprii vor crește cu turația. În figura 8 s-a reprezentat variația frecvențelor proprii cu turația discului pentru modurile proprii cu zero cercuri nodale și 0, 1, 2, 3 și 4 diametre nodale pentru un disc circular cu grosimea $h = 1{,}6$ mm, $r_2 = 160$ mm, încastrat la centru cu raportul de încastrare $r_1/r_2 = 0{,}5$. Această diagramă permite determinarea turațiilor critice prin intersecția curbelor din figura 8 cu dreptele :

$$f = d \cdot n,$$

în care d este numărul de diametre nodale, iar n este turația.

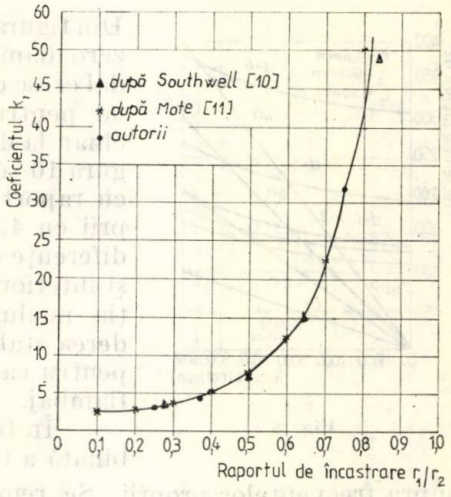


Fig. 6

Influența temperaturii asupra frecvențelor proprii ale discurilor circulare încastrate pe conturul interior este redată în figurile 9 și 10 S-a considerat că diferența de temperatură este distribuită axial-simetric

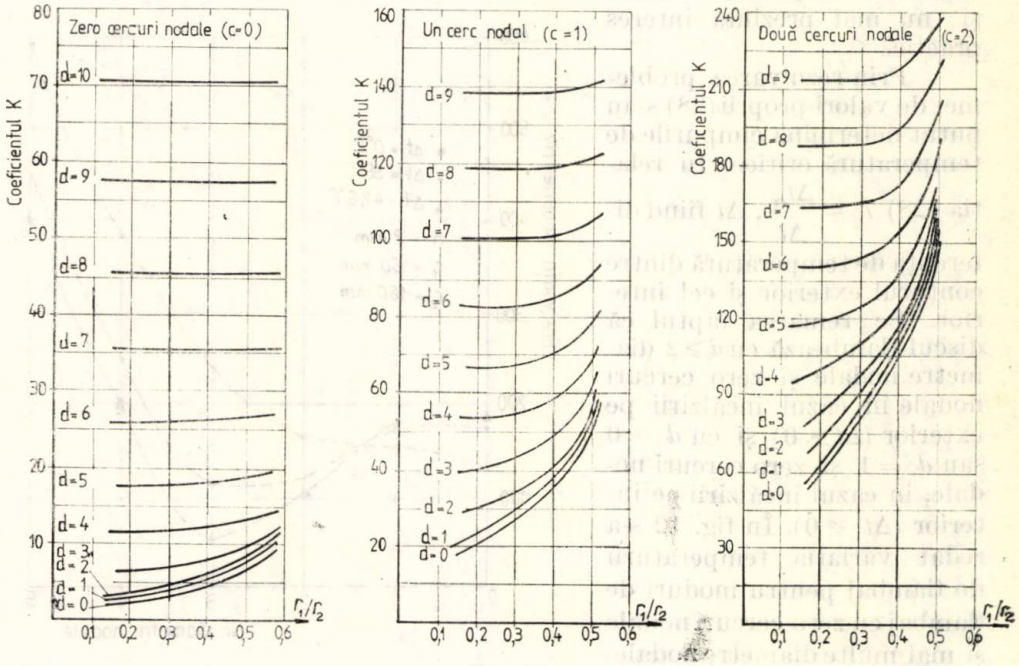


Fig. 7

iar pe rază variază după legea :

$$\Delta t = t_1\left[1 - \left(\frac{r}{r_2}\right)^{\gamma}\right].$$

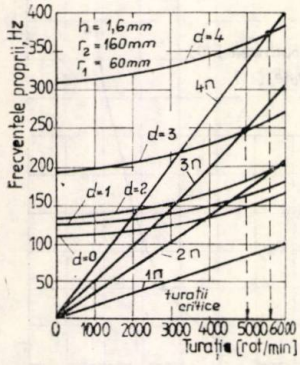


Fig. 8

Din figura 9 rezultă că frecvenţele proprii pentru zero diametre nodale şi pentru un diametru nodal cresc cu creşterea diferenţei de temperatură, iar pentru celelalte moduri scad, ajungindu-se chiar la dispariţia unor moduri proprii. Din figura 10 se observă că pentru discurile circulare cu raport de încastrare $r_1/r_2 = 0{,}5$ modurile proprii cu 4,3 şi 5 diametre nodale dispar pentru diferenţe de temperatură între conturul exterior şi interior, Δt, cuprinse înte 68 şi 85°C. Dispariţia modurilor proprii este în legătură cu pierderea stabilităţii elastice ; dispar acele moduri pentru care s-a atins temperatura critică de flambaj.

În figura 11 s-a examinat influenţa combinată a turaţiei şi a diferenţei de temperatură asupra frecvenţelor proprii. Se remarcă faptul că cele două tipuri de tensiuni de membrană au acţiune contradictorie.

În cele de mai sus s-au avut în vedere numai modurile proprii cu zero cercuri nodale ($c = 0$), deoarece frecvenţele proprii cresc foarte rapid cu numărul cercurilor nodale şi nu mai prezintă interes practic.

Prin rezolvarea problemei de valori proprii (28) s-au putut determina cîmpurile de temperatură critice. În relaţia (28) $\lambda = \dfrac{\Delta t_{cr}}{\Delta t}$, Δt fiind diferenţa de temperatură dintre conturul exterior şi cel interior. Se remarca faptul că discul flambează cu $d \geqslant 2$ diametre nodale şi zero cercuri nodale în cazul încălzirii pe exterior ($\Delta t > 0$) şi cu $d = 0$ sau $d = 1$ şi zero cercuri nodale, în cazul încălzirii pe interior ($\Delta t < 0$). În fig. 12 s-a redat variaţia temperaturii de flambaj pentru moduri de flambaj cu zero cercuri nodale şi mai multe diametre nodale. Interesează numai valoarea

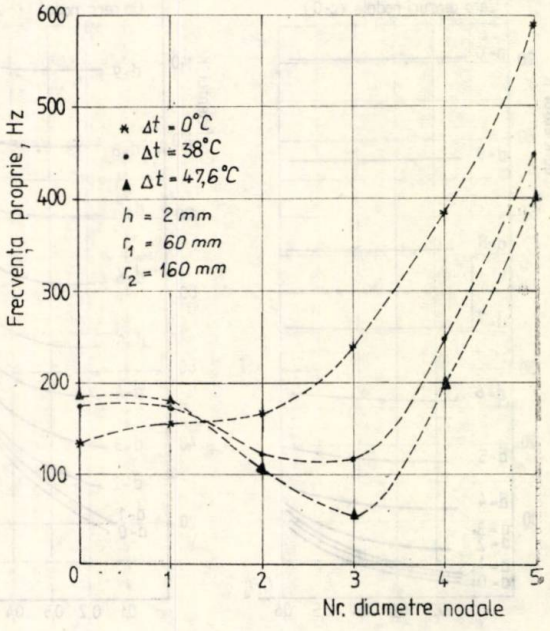


Fig. 9

cea mai mică a temperaturii; pentru zero diametre nodale şi un diametru nodal valorile proprii îşi schimbă brusc semnul şi cresc foarte mult în valoare absolută, cazuri lipsite de interes practic.

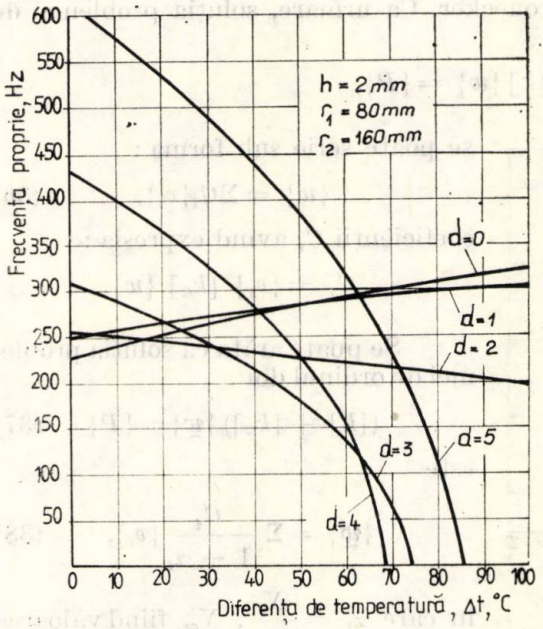


Fig. 10

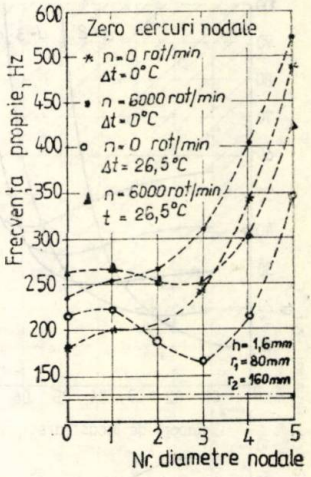


Fig. 11

În fig. 13 s-a reprezentat influenţa raportului de încastrare asupra temperaturii critice de flambaj în cazul încălzirii conturului exterior şi, respectiv, interior, al discului. În timpul funcţionării trebuie evitată zona haşurată. De remarcat faptul că turaţia discului duce la creşterea temperaturii critice de flambaj (fig. 11). Diagramele din figura 13 se pot folosi pentru orice dimensiuni ale discurilor, ţinînd cont de relaţia:

$$\Delta t_{cr} = \Delta t_{cr_0} \frac{\alpha_{t_0}}{\alpha_t} \left(\frac{h}{h_0}\right)^2 \left(\frac{r_{20}}{r_2}\right)^2, \qquad (35)$$

în care cu indicele zero s-au notat mărimile pentru care s-au trasat diagramele; s-a luat $\alpha_{t_0} = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ grd^{-1} corespunzător oţelului. Temperatura critică de flambaj nu depinde de valoarea lui E.

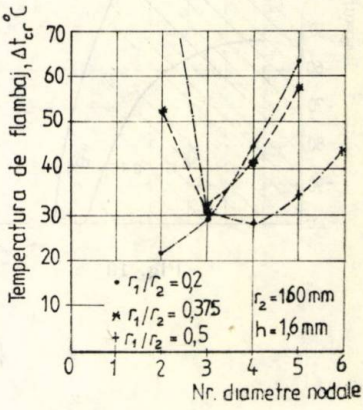


Fig. 12

Pentru o anumită lege de distribuţie a temperaturii pe disc, din rezolvarea problemei de valori proprii sub forma (28) se obţin vectorii proprii

$\{v_i\}$ care sînt ortogonali:

$$\{v_i\}^T[k_G]\{v_i\} = \delta_{ij},$$

în care δ_{ij} este simbolul lui Kronecker. Ca urmare, soluția problemei de ordinul întîi

$$[k]\{w\} = \{P\},$$

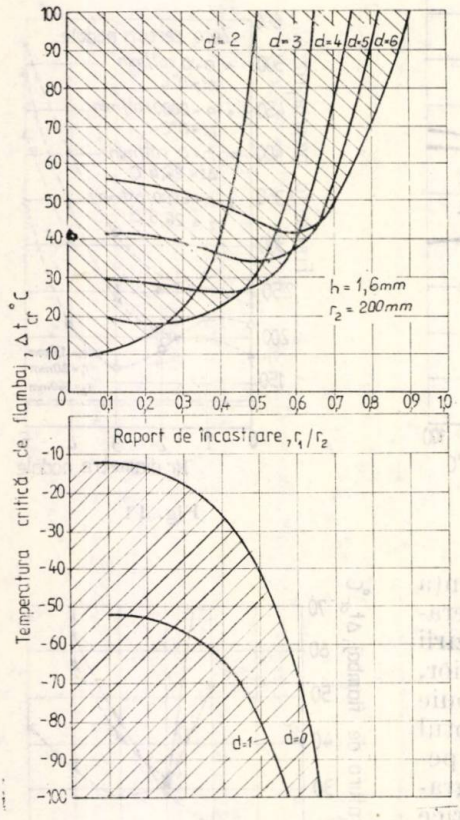


Fig. 13

se poate scrie sub forma:

$$\{w\} = \Sigma C_i\{v_i\}, \qquad (36)$$

coeficienții C_i avînd expresia:

$$C_i = \{v_i\}^T[k_G]\{w\}.$$

Se poate arăta că soluția problemei de ordinul doi

$$([k] + [k_G])\{\underset{\sim}{w}\} = \{P\} \qquad (37)$$

este

$$\{\underset{\sim}{w}\} = \Sigma \frac{C_i}{1 - \alpha_i}\{v_i\}, \qquad (38)$$

în care $\alpha_i = \dfrac{N}{N_{cr_i}}$, N_{cr_i} fiind valoarea critică corespunzătoare modului i, adică α_i este inversul valorii proprii λ_i din problema:

$$\det([k] - \lambda[k_G]) = 0.$$

Cu N_{cr} s-a notat starea de membrană critică de flambaj, iar cu N starea de membrană existentă în placă. Dacă prima valoare proprie λ_1 este mult mai mică decît celelalte și, de asemenea, coeficientul C_1 din relația (36) este preponderent, atunci se poate scrie:

$$\{\underset{\sim}{w}\} \simeq \frac{1}{1 - \alpha_1}\{w\},$$

ceea ce constituie o justificare a metodei prezentate în paragraful 3.

În cazul pierderii stabilității din cauza încălzirii neuniforme, așa după cum s-a văzut (fig. 13), primele v valori proprii au valori apropiate și semne diferite: pentru $d = 0$ și 1, discul flambează la încălzire pe conturul interior, pe cînd pentru $d \geqslant 2$, discul flambează la încălzire pe conturul exterior. Astfel primii termeni ai expresiei (38) se compensează reciproc,

ceea ce explică influența neglijabilă a temperaturii asupra rigidității discului, concluzie rezultată și din paragraful 3.

Rezolvarea problemei descrise de relația (37), cu ajutorul elementului finit prezentat în lucrare, va face obiectul unei alte lucrări.

5. CONCLUZII

Calcule de ordinul doi, ca cele prezentate în lucrare, sînt utile în practică, deoarece, așa cum s-a arătat, calculele de ordinul întîi nu permit studiul influenței tensiunilor de membrană asupra rigidității. Forțele de inerție, tensiunile termice etc. conduc la modificări importante în comportarea plăcilor circulare la solicitările de încovoiere, vibrații și stabilitate elastică.

Stabilirea influenței tensiunilor termice asupra stabilității și vibrațiilor discurilor circulare este deosebit de utilă în cazul pînzelor circulare, pentru determinarea valorilor optime ale parametrilor regimului de așchiere. Trebuie evitat lucrul în apropiere de turațiile critice și la astfel de regimuri care să conducă la diferențe de temperatură ce se pot apropia de cele critice. Studiul influenței turației asupra frecvențelor proprii a permis calculul vitezelor critice de rotație, valori influențate la rîndul lor de diferența de temperatură pe raza discului. Astfel, în cazul unui disc cu $h = 1{,}6$ mm, $r_1 = 60$ mm, $r_2 = 160$ mm, prima turație critică scade de aproximativ 1,5 ori în cazul unei diferențe de temperatură pe raza discului de 17,6°C, față de valoarea determinată inițial fără a lua în considerație efectul tensiunilor termice. În cazul pînzelor circulare, folosite la tăierea lemnului de exemplu, deformarea datorită pierderii stabilității elastice conduce la apariția arsurilor pe fețele pînzei înrăutățind condițiile de tăiere. Pentru evitarea acestui fenomen este necesară alegerea regimurilor de tăiere astfel încît diferențele de temperatură să nu depășească 20—40°C. În acest sens rezultatele obținute în prezenta lucrare sînt în bună concordanță cu datele experimentale prezentate în literatura de specialitate [7], [12], [13], [14].

Primită la redacție la 9 iunie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. S. D. PONOMARIOV și colab., *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. II, București, Edit. tehnică, 1963.
2. S. P. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Teoria plăcilor plane și curbe*, București, Edit. tehnică, 1968.
3. S. P. TIMOSHENKO, I. M. GERE, *Teoria stabilității elastice*, București, Edit. tehnică, 1967.
4. K-J. BATHE, E. WILSON, F. E. PETERSON, SAP IV, *A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems*, Berkely, California, University of California, 1973.
5. O. C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method in Engineering Science*, London McGraw-Hill, 1971.
6. K. K. GUPTA, *Solution of Eigenvalue Problems by Sturm Sequence Method*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, **4** (1972), p. 379—404.
7. E. V. FRIEBE, *Steifheit und Schwingungsverhalten von Kreissägeblätern für die Halsbearbeitung*, Dissertation, Technischen. Universität Cardo-Wilhelmina, Braunschweig, 1973.

8. Gr. GOGU, M. CIOBANU, *Rigiditatea la încovoiere a plăcilor circulare încastrate la centru*, Buletinul sesiunii științifice „Creativitatea în construcția, fabricarea și exploatarea automobilelor", Pitești, vol. I, 1981, p. 98—105.
9. Gr. GOGU, M. MUNTEANU, H. ADAMS, *Contribuții la studiul tensiunilor din pînzele circulare*, A IV-a Conferință republicană „Proiectarea, tehnologia și exploatarea sculelor așchietoare", Brașov, 1981.
10. R. V. SOUTHWELL, *On the Free Transverse Vibrations of a Uniform Circular Disc Clamped at its Centre;* and on the *Effects of Rotations*, Proceedings of Royal Society of London, Seria A, **101** (1922), p. 133—153.
11. C. D. MOTE Jr., *Free Vibration of Initially Stressed Circular Disks*, Transactions of the ASME, **87**, seria B, *2* (1965), p. 258—264.
12. C. D. MOTE Jr., S. HOLOYEN, *Confirmation of the Critical Speed Stability Theory for Symetrical Circular Saws*, Transactions of ASME, **97**, seria B, *3*(1975), p. 1112—1118.
13. V. DOGARU, *Așchierea lemnului și scule așchietoare*, București, Editura tehnică, 1977.
14. U. N. STAHIEV, F. V. LIJIN, *O nesuscei snosobnosti disca ploscih cruglih pil*, Lesnoi Jurnal, *1* (1972), p. 163—168.

EFECTELE ABATERILOR DE LA RECTILINITATEA GENERATOAREI ÎN CAZUL MANTALELOR RECIPIENTELOR CILINDRICE PRESURIZATE LA INTERIOR

de. A. PAVEL

Institutul de petrol și gaze Ploiești

Se studiază și se apreciază, cantitativ, efectele abaterilor — locale sau de ansamblu — de la rectilinitatea generatoarei pentru mantalele recipientelor cilindrice presurizate la interior. Efectele respective se consideră pentru alternativele : 1) abateri *de ansamblu* de tipul frîngerii sau îngenuncherii ; 2) abateri *locale* de tipul frîngerii sau îngenuncherii, dislocării, scofîlcirii simple, scofîlcirii cu burdușire în opoziție ș.a.

În practică, la nivelul lor valoric maxim, abaterile locale sau de ansamblu de la rectilinitatea generatoarei, în cazul mantalelor recipientelor cilindrice presurizate la interior, se numesc *săgeți*. Aceste abateri se pot datori execuției tehnologice neconforme, manipulării defectuoase la execuție, montare uzinală, încărcare-descărcare în condiții de transport, montare pe șantier, încercare-rodare etc., exploatării în regim de avarie (apariția scofîlciturilor, a frîngerilor sau îngenuncherilor ș.a.) și, de asemenea, acționării unor sarcini dinamice cu efecte imprevizibile sau greu de controlat (în condiții de seism, explozii, incendii, rezonanță, rapide și puternice încălziri sau răciri locale, impact mecanic etc.).

De regulă, normele, prescripțiile tehnice, codurile și regulamentele naționale sau internaționale privind instalațiile mecanice sub presiune (tab. 1) reglementează, însă fără o fundamentare teoretică riguroasă și explicită, numai unele dintre problemele referitoare la *abaterile de execuție* corespunzătoare planurilor longitudinale ale structurilor de tipul recipientelor cilindrice realizate prin sudare. Bunăoară, prescripțiile tehnice ISCIR C 4 stipulează următoarele :

a) abaterea maximă de la rectilinitate a generatoarei corpurilor cilindrice asamblate (în execuție sudată sau dintr-o bucată), față de generatoarea lor teoretică, nu va depăși 0,3% din lungimea totală a mantalei (fără funduri), dar maximum 75 mm pentru lungimi peste 25 m și nu mai mult de 15 mm pentru fiecare porțiune (zonă cilindrică) cu lungimea de 5 m ;

b) la virolele din table de aceeași grosime, distorsiunea locală (aplatisare sau vîrf), în preajma sudurilor cap la cap, longitudinale, nu va depăși $0{,}1\,s + 3$ mm (s fiind grosimea tablelor, în mm), însă, pentru $s > 20$ mm, distorsiunea respectivă nu va fi mai mare de 5 mm ; în cazurile cînd lungimea denivelării nu depășește un sfert din lungimea virolei (măsurată pe generatoare), dar cel mult 1 m, valoarea admisă a distorsiunii locale poate fi mărită cu 25% ;

c) abaterea maximă de la perpendicularitatea planului de capăt al virolei, față de generatoarea ei, va fi de 1 mm la fiecare metru de diametru, dar cel mult 3 mm pentru diametre mai mari de 3 m ;

d) pe suprafețele virolelor nu se admit urme de lovituri sau rizuri, suprapuneri, exfolieri, ondulații și urme de ciocan etc. dacă adîncimea lor depășește limitele abaterii negative la grosimea tablei.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 6, 1983, P. 593 — 608

Tabelul 1

Norme, prescripţii tehnice, coduri şi regulamente privind instalaţiile mecanice sub presiune

Ţara	Denumirea codului	Scopul	Înregistrat şi aprobat de	Putere legală
Australia	Standards Association of Australia Boiler Code, Pts. I — V	Cazane de abur şi recipiente sub presiune	Standards Association of Australia	Da
Austria	Dampfkessel Verordnung (DKV) RGBI nr. 83	Cazane de abur	Bundesministerium für Handel und Wiederaufbau	Da
	Werkstoff und Bauvorschriften (WBV) RGBI nr. 264	Recipiente sub presiune	—	—
Canada	C.S.A. Standard B 51 (include prescripţiile tehnice ASME Codes)	Cazane de abur şi recipiente sub presiune	Canadian Standards Association (A.S.M.E.)	Da
Elveţia	Regulations of the Swiss Association of Boiler Proprietors	Cazane de abur şi recipiente sub presiune	—	Da
Finlanda	Dimensioning, Materials and Welding of Steel Pressure Vessels	Cazane de abur şi recipiente sub presiune	—	Da
Franţa	SNCT nr. 1	Recipiente sub presiune	Syndicat Nat. de Chaudronnerie et Tolerie	Nu
	Réglementation des appareils à vapeur et à pression du gaz	Recipeinte sub presiune şi cazane de abur	Reglementări guvernamentale care nu constituie un cod de proiectare drastic	Da
R.D. Germană	Werkstoff- und Bauvorschriften für Dampfkessel und Druckgefässe	Cazane de abur şi recipiente sub presiune	Zentralinspektion der Technischen Überwachung	Da
R. F. Germania	Werkstoff und Bauvorschriften für Dampfkessel und Dampfkessel Bestimmungen	Cazane de abur	Technische Überwachungs Vereine	Da
	AD—Merkblätter	Recipiente sub presiune	Arbeitsgemeinschaft Druckbehälter	Da
	DIN 2413	Conducte	DIN	Da

Tabelul 1 (continuare)

India	Indian Boiler Regulations	Cazane de abur	Central Boilers Board	Da
Italia	Controllo della combustione e Apparecchi a Pressione	Cazane de abur şi recipiente sub presiune	A.N.C.C.	Da
	Lloyd's Rules	Cazane de abur, recipiente sub presiune şi conducte	Lloyd's Register of Shipping	Nu
	Rules of the Associated Offices Technical Committee (A.O.T.C.)	Cazane de abur şi recipiente sub presiune	A.O.T.C.	—
Marea Britanie	BS 1500, BS 1515	Recipiente sub presiune		Da
	BS 1113	Cazane de abur		Da
	BS 2663, BS 2971	Conducte		Da
	BS 806, BS 1306	Conducte (termoenergetice de forţă)	British Standards Institution (B.S.I.)	Da
	BS 1306, BS 3351	Conducte (de petrol)		Da
	BS 2654	Rezervoare cilindrice verticale, metalice		Da
	BS 3274	Aparate de schimb de căldură		Da
	BS 3915	Recipiente nucleare		Da
Noua Zeelandă	N.Z. Boiler Code	Cazane de abur	Marine Dept. N.Z.	Da
	N.Z.Pressure Vessel Code	Recipiente sub presiune	—	—
Olanda	Grundslagen waarop de beoordeling van de constructie en het material van stoomtoestelen, damptoestelen en druckhoudersberust	Cazane de abur şi recipiente sub presiune	Dienst voor het Stoomwezen	Da
R. S .România	Prescripţii tehnice pentru proiectarea, execuţia, instalarea, exploatarea, repararea şi verificarea recipientelor metalice stabile sub presiune, C 4	Recipiente sub presiune		Da
	Prescripţii tehnice C 5, C 12, C 14, C 21, C 24, C 25, C 26, C27	Recipiente sub presiune	Inspecţia pentru cazane, recipiente sub presiune şi instalaţii de ridicat (ISCIR)	Da
	Prescripţii tehnice C 1, C 10 C 18, C 30, C 31, C 32, C 38, C 29	Cazane de abur		Da
	Prescripţii tehnice C 36, C 37, CR 1, CR 2 CR 3, CR 10	Instalaţii mecanice sub presiune		Da
	Prescripţii tehnice C 2, C 3, C 5, C 19	Butelii		Da
	Prescripţii tehnice C 15, C 29	Conducte calde (termoenergetice		Da
	Prescripţii tehnice CR 4, CR 5, CR 6, CR 8, CR 20	Defectoscopie nedistructivă		Da

Tabelul 1 (continuare)

Țara	Denumirea codului	Scopul	Înregistrat și aprobat de	Putere legală
Suedia	Tryckkarlsnormer	Cazane de abur și recipiente sub presiune	P.V. Commission of Swedish Academy of Eng. Science	Nu
	Angpanneformer Pannsvetnormer	Cazane de abur (C. Weld. Code)	—	Da
S.U.A.	A.S.M.E. Codes	Cazane de abur, recipiente sub presiune și recipiente nucleare	American Society of Mechanical Engineers (A.S.M.E.)	Da (în toate statele S.U.A.)
	Tentative Structural Basis for Reaktor Pressure Vessels and Directly Associated Components	Recipiente nucleare	U.S. Bureau of Ships	Nu
	ASA — B 31.1.8	Conducte	A.S.M.E., A.S.A.	Da(în toate statele S.U.A.)
	A.P.I. — A.S.M.E. Code	Recipiente sub presiune	A.S.M.E., A.P.I.	Da
	TEMA-Tubular Heat Exchangers Manufacturers Association	Aparate de schimb de căldură	TEMA	Nu
	API 650	Rezervoare	A.P.I.	Da
U.R.S.S.	Vase și aparate din oțel, sudate. Condiții tehnice. OST 26 — 291 — 71	Aparatură tehnologică și rezervoare sferice	(C.A.E.R.)	Da
	Normi rasceta na procinost elementov reaktorov, parogheneratorov, sosudov i truboprovodov atomnih elektrostanții, opitnih i issledovatelskih iadernih reaktorov i ustanovok	Tehnologia nucleară	GKAE SSSR GOSKOMNADZOR SSSR	Da
Internațional	Anexa 1 — Regulament internațional privind transportul mărfurilor periculoase pe căile ferate (RID)	Cisterne CF	Convenția internațională privind transportul de mărfuri pe căile ferate (CIM)	Da

Eforturile suplimentare care apar în mantaua cilindrică a unui recipient sub presiune, datorită unor distorsiuni geometrice situate în planuri transversale, au fost studiate de Schmidt [13, 14], Pich [8, 9], Renert [10], Wagner [16], Mang [1] ș.a. [17]. În plus, Mang s-a referit și la efectul defavorabil al așezării oblice, din montare, a tronsonului superior al unui recipient cilindric presurizat la interior (fig. 1), pentru efortul unitar longitudinal (axial, meridian) menționînd următoarea formulă de calcul :

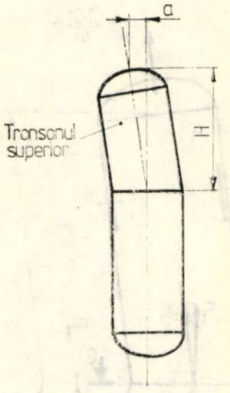


Fig. 1. — Schema de calcul privind efectul defavorabil al așezării oblice a unui tronson de recipient cilindric presurizat la interior.

$$\sigma_{m\,max} = k\sigma_m = \left(1 + \frac{Ha}{0{,}22\,D_i\sqrt{H^2 + a^2}}\right)\sigma_m, \qquad (1)$$

în care $\sigma_m = p\,D_i/4\varphi s$ reprezintă efortul unitar longitudinal nominal, în N/mm²; p — presiunea interioară (manometrică) de calcul, în N/mm²; D_i — diametrul interior de calcul al secțiunii transversale de rezistență, în mm; a, H — dimensiuni, în mm, determinate conform figurii 1; $k = k_m > 1$ — coeficientul (factorul) de *amplificare* a eforturilor unitare nominale σ_m, numit — impropriu — și factor (coeficient) de concentrare a eforturilor unitare nominale σ_m; s — grosimea de rezistență (de calcul) a peretelui, în mm; φ — coeficientul (minim) de rezistență al sudurilor.

Influența abaterilor dimensionale în principal din planurile transversale, în cazul aparatelor de tip coloană și al schimbătoarelor de căldură, din punctul de vedere al capacității de rezistență și performanțelor funcțional-tehnologice, s-a studiat în cadrul tezei de doctorat elaborate de profesorul Șt. Teodorescu [15]. Solicitările și deformațiile în corpurile cilindrice cu perete subțire, corespunzătoare condițiilor de execuție, transport și montare, au fost amplu analizate în teza de doctorat elaborată de ing. Z. Manolache [2] și în lucrările [3, 4, 11, 12]. Starea de eforturi unitare din mantaua geometric imperfectă, în mai multe planuri transversale, a unui rezervor cilindric vertical de mare capacitate, pentru gaze petroliere lichefiate, a fost fundamentată și examinată detaliat în lucrările [5, 6].

În continuare, se studiază și se apreciază, cantitativ, efectele abaterilor — locale sau de ansamblu —de la rectilinitatea generatoarei pentru mantalele recipientelor cilindrice presurizate la interior. Efectele respective se consideră pentru următoarele alternative : 1) abateri de ansamblu de tipul frîngerii sau îngenuncherii (**fig. 2**) și 2) abateri locale, zonale

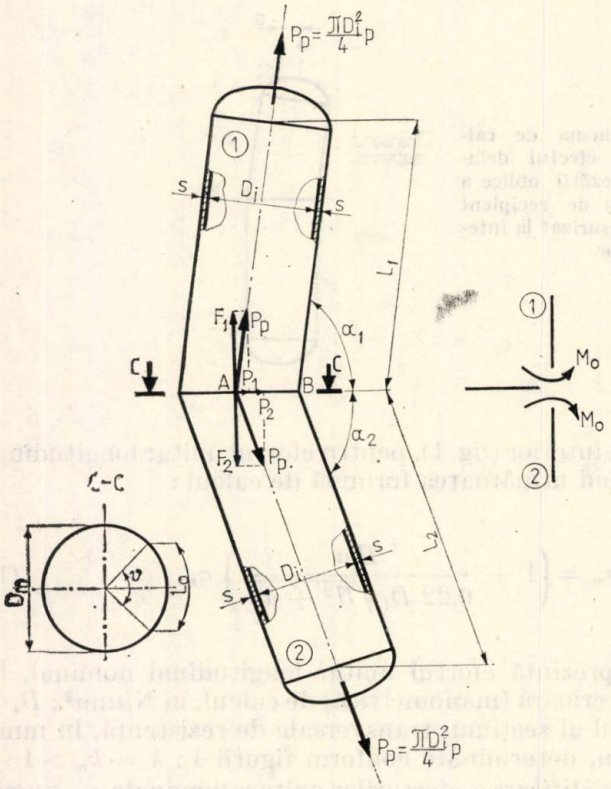


Fig. 2. — Mantaua cilindrică cu *abatere de ansamblu* de la rectilinitatea generatoarei, de tipul frîngerii sau îngenuncherii.

(inelare) sau cvasipunctuale, de tipul frîngerii sau îngenuncherii, dislocării, scofîlcirii simple, scofîlcirii cu burdușire în opoziție etc. (fig. 3 și 4).

1) **Abaterile de ansamblu.** Se presupune modelul fizic redat în figura 2 (cu $\alpha_1 \neq \alpha_2$) și se introduc următoarele noi mărimi și notații [7] :

$P_p = \pi D_i^2 p/4$ — forța de presiune, longitudinală, orientată în lungul axei de revoluție a tronsoanelor de manta nedistorsionate, în N ;

$P_1 = P_p \cos\alpha_1$ și $P_2 = P_p \cos\alpha_2$ — componentele orizontale, în punctul A, ale forțelor P_p, pentru tronsonul 1 și, respectiv, 2, în N ;

$F_1 = P_p \sin\alpha_1$ și $F_2 = P_p \sin\alpha_2$ — componentele verticale, de asemenea în punctul A, ale forțelor P_p pentru tronsoanele 1 și 2 în N ;

L_0 — lungimea inelară nominală, în planul transversal AB, a conturului distorsant, în mm; evident, pentru $D_i \to D_m$, $L_0 = 0{,}5\ D_m\vartheta \leqslant 0{,}5\ \pi D_m = 1{,}5708\ D_m$, D_m fiind diametrul mediu de calcul al secțiunii transversale de rezistență, în mm, iar ϑ fiind unghiul la centru, în rad, care întinde — în planul transversal — conturul distorsionat;

$p_0 = 2k_1(P_1 + P_2)/\pi b_0$ — așa-numita presiune de calcul pentru conturul distorsionat, în N/mm², aici $b_0\ D_m \sin(\vartheta/2) = 2L_0 \sin(\vartheta/2)/\vartheta \leqslant D_m$ fiind coarda care întinde conturul în discuție, în mm, iar $k_1 = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)}/\sqrt{0{,}5\ D_m\ s}$ fiind un factor de caracterizare, în care μ reprezintă coeficientul lui Poisson; pentru $\mu = 0{,}3$, corespunzător recipientelor din oțeluri, rezultă $k_1 = 1{,}8178/\sqrt{D_m\ s}$;

$M_0 = (2 - \mu)p_0/2k_1^2$ — momentul încovoietor de contur, în (N. mm)/mm;

$W = s^2/6$ — modulul de rezistență, corespunzător peretelui mantalei în teoria învelișurilor, în mm²;

$\sigma_t = pD_m/2\varphi s$ — efortul unitar inelar *nominal*, în N/mm²;

$\sigma_m = pD_m/4\varphi s = 0{,}5\sigma_t$ — efortul unitar longitudinal *nominal*, în N/mm²;

$\Delta F = F_1 - F_2 = P_p(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)$ — rezultanta componentelor verticale ale forțelor P_p, în punctul A, în N.

Într-un asemenea context, conform cu [7], momentul încovoietor (interior) *meridian* se determină cu următoarea formulă (pentru $\mu = 0{,}3$):

$$M_m = M_0 = \frac{0{,}30\ P_p(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)\sqrt{D_m\ s}}{b_0}, \tag{2}$$

iar momentul încovoietor (interior) *inelar* are expresia (tot pentru $\mu = 0{,}3$):

$$M_t = \mu M_m = \frac{0{,}09\ P_p(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)\sqrt{D_m\ s}}{b_0}, \tag{3}$$

ambele momente, M_m și M_t, exprimîndu-se în (N.mm)/mm.

În consecință, pentru eforturile unitare *maxime*, *inelare* $\sigma_{t\,max}$ și *meridiane* (longitudinale, axiale) $\sigma_{m\,max}$, se vor obține (în ipoteza $D_i \to D_m$) următoarele formule de calcul finale:

$$\sigma_{t\,max} = k_t\ \sigma_t, \tag{4}$$

$$\sigma_{m\,max} = k_m\ \sigma_m, \tag{5}$$

în care coeficienții (factorii) de amplificare k_t pentru eforturile unitare inelare și k_m pentru eforturile unitare meridiane (longitudinale, axiale) au expresiile (pentru $\mu = 0{,}3$):

$$k_t = 1 + \frac{0{,}8482\ \varphi D_m \sqrt{D_m/s}\,(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)}{b_0}, \tag{6}$$

$$k_m = 1 + \frac{5{,}6549\ \varphi D_m \sqrt{D_m/s}\,(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)}{b_0}. \tag{7}$$

În cazul particular cu $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, rezultă:

$$k_t = 1 + \frac{1{,}6965\ \varphi D_m \sqrt{D_m/s}\cos\alpha}{b_0}, \tag{8}$$

$$k_m = 1 + \frac{11{,}3097\ \varphi D_m \sqrt{D_m/s}\cos\alpha}{b_0}, \tag{9}$$

$$\Delta F = 0,$$

iar atunci cînd $\alpha_2 = \pi/2$ și $\alpha_1 < \pi/2$, se obține:

$$k_t = 1 + \frac{0{,}8482\ \varphi D_m \sqrt{D_m/s}\cos\alpha_1}{b_0}, \tag{10}$$

$$k_m = 1 + \frac{5{,}6549\ \varphi D_m \sqrt{D_m/s}\cos\alpha_1}{b_0}, \tag{11}$$

$$\Delta F < 0,$$

respectiv, cînd $\alpha_1 = \pi/2$ și $\alpha_2 < \pi/2$, corespunde:

$$k_t = 1 + \frac{0{,}8482\ \varphi D_m \sqrt{D_m/s}\cos\alpha_2}{b_0}, \tag{12}$$

$$k_m = 1 + \frac{5{,}6549\ \varphi D_m \sqrt{D_m/s}\cos\alpha_2}{b_0}, \tag{13}$$

$$\Delta F > 0.$$

Formulele generale (6) și (7) se mai pot scrie astfel (la numărător, ϑ în rad);

$$k_t = 1 + \frac{0{,}8482\,\varphi\sqrt{D_m/s}\,(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)}{\sin(\vartheta/2)} = \tag{6'}$$

$$= 1 + \frac{0{,}4241\,\varphi\vartheta D_m\sqrt{D_m/s}\,(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)}{L_0\sin(\vartheta/2)},$$

$$k_m = 1 + \frac{5{,}6549\,\varphi\sqrt{D_m/s}\,(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)}{\sin(\vartheta/2)} = \tag{7'}$$

$$= 1 + \frac{2{,}82745\,\varphi\vartheta D_m\sqrt{D_m/s}\,(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)}{L_0\sin(\vartheta/2)},$$

în cazurile particulare cînd $b_0 \to D_m$, respectiv $\vartheta \to \pi$, rezultînd:

$$k_t = 1 + 0{,}8482\,\varphi\sqrt{\frac{D_m}{s}}\,(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2), \tag{6''}$$

$$k_m = 1 + 5{,}6549\,\varphi\sqrt{\frac{D_m}{s}}\,(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2). \tag{7''}$$

De remarcat că, invariabil, se obține $k_m \gg k_t$, ceea ce nu poate surprinde, dacă se are în vedere natura efectelor studiate (încovoiere în planurile meridiane). De remarcat, totodată, că, în cazurile ideale cu $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = \pi/2$, cînd abaterile în discuție *lipsesc*, cum era și firesc, rezultă $k_t = k_m = 1{,}00$. Desigur, pentru $\alpha_{1,2} \to \pi/2$, va corespunde $k_{t,m} \to 1{,}00$.

Simpla comparație a formulelor (7), (9) sau mai ales (11) și (7'') cu formula (1) pune sub semnul îndoielii rigurozitatea expresiei coeficientului (factorului) de amplificare k, menționate de Mang [1].

2) **Abaterile locale.** Mai întîi, se studiază efectele abaterilor locale de tipul unor *frîngeri* sau *îngenuncheri*, cînd $L_0 \to 0{,}5\,\pi D_m$, în care scop se presupune modelul fizic redat în figura 3 (cu $\alpha_1 \neq \alpha_2$) și se introduc, în plus, următoarele noi mărimi și notații:

L_1 și L_2 — lungimile, măsurate pe direcția generatoarei, în același plan longitudinal (meridian), ale cîmpului abaterii locale de tipul frîngerii sau îngenuncherii, în mm;

$H_1 = L_1\sin\alpha_1$ și $H_2 = L_2\sin\alpha_2$ — înălțimile, măsurate în același plan longitudinal (meridian), ale cîmpului abaterii locale de tipul frîngerii sau îngenuncherii, în mm;

$M_1 = P_p L_1 \cos\alpha_1$ și $M_2 = P_p L_2 \cos\alpha_2$ — momentele încovoietoare (exterioare) corespunzătoare reducerii în punctul A a forțelor de presiune P_p (fig. 3 *a*), în N. mm.

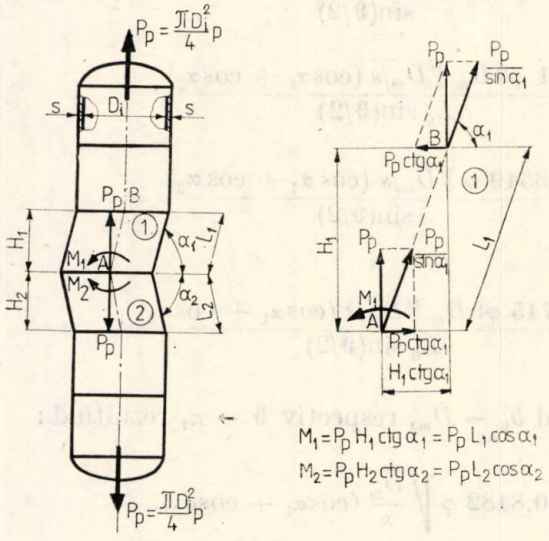


Fig. 3. — Mantaua cilindrică cu *abatere locală* de la rectilinitatea generatoarei, de tipul frîngerii sau îngenuncherii.

De această dată, așa-numita presiune de calcul pentru conturul distorsionat are următoarea expresie:

$$p_0 = \frac{2k_1(M_1 H_2 + M_2 H_1)}{\pi b_0 H_1 H_2} = \frac{2k_1 P_p}{\pi b_0} \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}, \tag{14}$$

iar pentru momentul încovoietor de contur M_0, în (N.mm)/mm, rezultă formula:

$$M_0 = \frac{(2 - \mu) P_p}{\pi b_0 k_1} \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}, \tag{15}$$

atunci cînd $\mu = 0{,}3$ obținîndu-se:

$$M_0 = P_p \frac{0{,}30\sqrt{D_m s}}{b_0} \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}. \tag{16}$$

În ipoteza $D_i \to D_m$, momentele încovoietoare (interioare) M_m și M_t vor fi (conform cu [7], pentru $\mu = 0{,}3$):

$$M_m = M_0 = \frac{0{,}23p D_m^2 \sqrt{D_m s}}{b_0} \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}. \tag{17}$$

$$M_t = \mu M_0 = \frac{0{,}07p D_m^2 \sqrt{D_m s}}{b_0} \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}. \tag{18}$$

Eforturile unitare maxime, *inelare* $\sigma_{t\,max}$ și *meridiane* (longitudinale, axiale) $\sigma_{m\,max}$, se vor determina cu formulele corespunzătoare (4) și (5), în care (pentru $\mu = 0{,}3$) :

$$k_t = 1 + \frac{0{,}8482\ \varphi D_m \sqrt{D_m/s}}{b_0} \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}, \tag{19}$$

$$k_m = 1 + \frac{5{,}6549\ \varphi D_m \sqrt{D_m/s}}{b_0} \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}. \tag{20}$$

În cazul particular cînd $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, evident, $L_1 = L_2 = L$, respectiv $H_1 = H_2 = H$ și rezultă :

$$k_t = 1 + \frac{1{,}6965\ \varphi D_m \sqrt{D_m/s}}{b_0 \operatorname{tg}\alpha}, \tag{21}$$

$$k_m = 1 + \frac{11{,}3097\ \varphi D_m \sqrt{D_m/s}}{b_0 \operatorname{tg}\alpha}. \tag{22}$$

Pentru alternativa nesimetrică cu $\alpha_2 = \pi/2$ și $\alpha_1 < \pi/2$, cînd $L_2 = H_2 = 0$ și $L_1 \neq 0$, respectiv $H_1 \neq 0$, se obține :

$$k_t = 1 + \frac{0{,}8482\ \varphi D_m \sqrt{D_m/s}}{b_0 \operatorname{tg}\alpha_1}, \tag{23}$$

$$k_m = 1 + \frac{5{,}6549\ \varphi D_m \sqrt{D_m/s}}{b_0 \operatorname{tg}\alpha_1}, \tag{24}$$

iar pentru alternativa nesimetrică cu $\alpha_1 = \pi/2$ și $\alpha_2 < \pi/2$, cînd $L_1 = H_1 = 0$ și $L_2 \neq 0$, respectiv $H_2 \neq 0$, rezultă :

$$k_t = 1 + \frac{0{,}8482\ \varphi D_m \sqrt{D_m/s}}{b_0 \operatorname{tg}\alpha_2}, \tag{25}$$

$$k_m = 1 + \frac{5{,}6549\ \varphi D_m \sqrt{D_m/s}}{b_0 \operatorname{tg}\alpha_2}. \tag{26}$$

Formulele generale (19) și (20) se mai pot scrie astfel (la numărător, ϑ în rad) :

$$k_t = 1 + \frac{0{,}8482\ \varphi \sqrt{D_m/s}}{\sin(\vartheta/2)} \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2} =$$

$$= 1 + \frac{0{,}4241\ \varphi\vartheta D_m \sqrt{D_m/s}}{L_0 \sin(\vartheta/2)} \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}, \tag{19'}$$

$$k_m = 1 + \frac{5{,}6549\ \varphi \sqrt{D_m/s}}{\sin(\vartheta/2)} \frac{(\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2} =$$

$$= 1 + \frac{2{,}82745\,\varphi\vartheta D_m \sqrt{D_m/s}}{L_0 \sin(\vartheta/2)} \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}, \tag{20'}$$

în cazurile particulare cînd $b_0 \to D_m$, respectiv $\vartheta \to \pi$, rezultînd:

$$k_t = 1 + 0{,}8482_{\epsilon}\varphi \sqrt{\frac{D_m}{s}} \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}, \tag{19''}$$

$$k_m = 1 + 5{,}6549\,\varphi \sqrt{\frac{D_m}{s}} \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}. \tag{20''}$$

De remarcat că, și în condițiile abaterilor locale de tipul îngenuncherii sau frîngerii, se obține $k_m \gg k_t$, ceea ce este în concordanță cu natura efectelor studiate (încovoiere în planurile meridiane). În cazurile ideale, cu $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = \pi/2$, cînd abaterile în cauză *lipsesc*, rezultă, invariabil și nesurprinzător, $k_t = k_m = 1{,}00$, pentru $\alpha_{1,2} \to \pi/2$ corespunzînd $k_{t,m} \to 1{,}00$.

Atunci cînd abaterile locale sînt de tipul unor *scofîlciri* (fig. 4) sau *dislocări* (*fără rupere*), presiunea de calcul p_0 se determină cu următoarea formulă:

$$p_0 = \frac{2P_p}{b_0} \frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{L_1 \sin\alpha_1 + L_2 \sin\alpha_2}, \tag{27}$$

pentru momentul încovoietor de contur M_0, în (N.mm)/mm, rezultînd expresia:

$$M_0 = \frac{(2-\mu)\,P_p}{b_0 k_1^2} \frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{L_1 \sin\alpha_1 + L_2 \sin\alpha_2}, \tag{28}$$

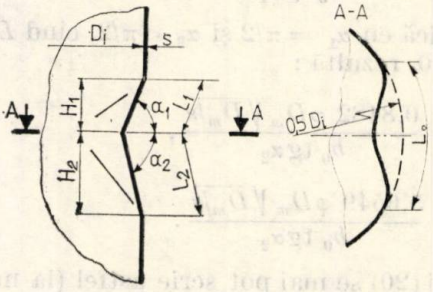


Fig. 4. — Modelul *abaterii locale*, de la rectilinitatea generatoarei unei mantale cilindrice, de tipul scofîlcirii.

respectiv (pentru $\mu = 0{,}3$):

$$M_0 = P_p \frac{0{,}5145\, D_m s}{b_0} \frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{L_1 \sin\alpha_1 + L_2 \sin\alpha_2}. \tag{29}$$

Conform cu [7], în ipoteza $D_i \to D_m$ și $\mu = 0{,}3$, momentele încovoietoare (interioare) M_m și M_t vor fi:

$$M_m = M_0 = \frac{0{,}404\, pD_m^3 s}{b_0} \frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{L_1 \sin\alpha_1 + L_2 \sin\alpha_2}, \tag{30}$$

$$M_t = \mu M_0 = \frac{0{,}121\, pD_m^3 s}{b_0} \frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{L_1 \sin\alpha_1 + L_2 \sin\alpha_2}, \tag{31}$$

eforturile unitare corespunzătoare *maxime, inelare* $\sigma_{t\,max}$ și *meridiane* (longitudinale, axiale) $\sigma_{m\,max}$, determinîndu-se cu formulele respective (4) și (5), în care

$$k_t = 1 + \frac{1{,}452\,\varphi D_m^2}{b_0}\,\frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{L_1 \sin\alpha_1 + L_2 \sin\alpha_2}, \tag{32}$$

$$k_m = 1 + \frac{9{,}696\,\varphi D_m^2}{b_0}\,\frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{L_1 \sin\alpha_1 + L_2 \sin\alpha_2}. \tag{33}$$

În cazurile particulare cu $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, ceea ce, evident, înseamnă $L_1 = L_2 = L$ și, deci, $H_1 = H_2 = H$ (fig. 4), se obține:

$$k_t = 1 + \frac{1{,}452\,\varphi D_m^2}{b_0 L \operatorname{tg}\alpha} = 1 + \frac{1{,}452\,\varphi D_m^2 \cos\alpha}{b_0 H}, \tag{34}$$

$$k_m = 1 + \frac{9{,}696\,\varphi D_m^2}{b_0 L \operatorname{tg}\alpha} = 1 + \frac{9{,}696\,\varphi D_m^2 \cos\alpha}{b_0 H}. \tag{35}$$

Cu ocazia efectuării unor studii sumare de orientare și evaluare, în condițiile șantierului de montare, a efectelor unor abateri locale de tipul frîngerii cu $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ și $H_1 = H_2 = H$, apărute pe mantaua unui aparat de tip coloană, a fost obținută următoarea formulă *aproximativă*:

$$k_t = 1 + \frac{3\pi\mu\, HD_m \cos\alpha}{sL_0} = 1 + \frac{2{,}827\, HD_m \cos\alpha}{sL_0}, \tag{36}$$

a cărei structură este comparabilă cu cea a formulei *exacte* (21).

APLICAȚII NUMERICE

1. Pentru un aparat de tip coloană, care prezintă o abatere *de ansamblu* de tipul celei schematizate în figura 2 (îngenunchere), se cunosc următoarele date: $D_m = 6\,000$ mm; $s = 25$ mm; $\varphi = 0{,}9$; $\vartheta = 90° = \pi/2 = 1{,}571$ rad; $H = 20\,000$ mm (fig. 1). Să se determine coeficienții (factorii) de amplificare k_t și k_m pentru cazul cînd $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, în următoarele alternative: $\alpha = 88{,}0°$; $88{,}5°$; $89{,}0°$; $89{,}5°$ și $89{,}9°$.

Rezolvare. Pentru: $b_0 = D_m \sin(\vartheta/2) = 6\,000 \sin(90/2) = 4242{,}64$ mm, întrucît $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, coeficienții (factorii) de amplificare k_t și k_m se determină cu formulele (8) și, respectiv, (9), valorile numerice corespunzătoare fiind centralizate în tabelul 2.

Pentru orientare și comparație, într-o a doua alternativă, se admite $\vartheta = 180° = \pi = 3{,}142$ rad, valorile respective ale mărimilor k_t și k_m, determinate cu aceleași formule (8) și (9), respectiv (6″) și (7″), de asemenea fiind centralizate în tabelul 2.

2. În condițiile aplicației precedente, să se determine coeficienții (factorii) de amplificare k_t, k_m și k (formula 1) pentru cazul cînd $\alpha_2 = \pi/2$ și, succesiv, $\alpha_1 = 88{,}0°$; $88{,}5°$; $89{,}0°$; $89{,}5°$ și $89{,}9°$.

Rezolvare. Întrucît $\alpha_2 = \pi/2$ și $\alpha_1 < \pi/2$, coeficienții (factorii) de amplificare k_t și k_m, calculați cu formulele (10) și, respectiv, (11), au valorile centralizate în tabelul 3, atît pentru $\vartheta = \pi/2$, cît și pentru $\vartheta = \pi$. Coeficientul (factorul) de amplificare k s-a determinat cu formula (1).

Din datele tabelelor 2 și 3 se constată că valorile k sînt comparabile numai cu valorile k_t și aceasta numai în cazurile cu $\alpha_2 \to 90°$, ceea ce confirmă incorectitudinea formulei (1), conform căreia $k \to k_m$.

Tabelul 2

Aplicația numerică nr. 1

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, în grd	$90° - \alpha$, în grd	a, în mm	Coeficienții (factorii) de amplificare		
			k_t	k_m	k
$\vartheta = 90° = \pi/2 = 1{,}571$ rad					
88,0	2,0	698,42	2,167	8,783	1,529
88,5	1,5	523,72	1,876	6,838	1,397
89,0	1,0	349,10	1,584	4,892	1,264
89,5	0,5	174,54	1,292	2,946	1,132
89,9	0,1	34,91	1,058	1,389	1,026
$\vartheta = 180° = \pi = 3{,}142$ rad					
88,0	2,0	698,42	1,825	6,503	1,529
88,5	1,5	523,72	1,619	5,128	1,397
89,0	1,0	349,10	1,413	3,752	1,264
89,5	0,5	174,54	1,306	2,376	1,132
89,9	0,1	34,91	1,041	1,275	1,026

Notă. Mărimea k s-a determinat cu formula (1).

Tabelul 3

Aplicația numerică nr. 2

α_1, în grd	$90° - \alpha_1$ în grd	a, în mm	Coeficienții (factorii) de amlificare		
			k_t	k_m	k
$\vartheta = 90° = \pi/2 = 1{,}571$ rad					
88,0	2,0	698,42	1,584	4,891	1,529
88,5	1,5	523,72	1,438	3,919	1,397
89,0	1,0	349,10	1,292	2,946	1,264
89,5	0,5	174,54	1,146	1,973	1,132
89,9	0,1	34,91	1,029	1,195	1,026
$\vartheta = 180° = \pi = 3{,}142$ rad					
88,0	2,0	698,42	1,413	3,752	1,529
88,5	1,5	523,72	1,310	3,064	1,397
89,0	1,0	349,10	1,206	2,375	1,264
89,5	0,5	174,54	1,103	1,688	1,132
89,9	0,1	34,91	1,021	1,138	1,026

3. Pentru un recipient cilindric sub presiune, care prezintă o abatere *locală* de tipul celei schematizate în figura 4 (scofilcire), se cunosc următoarele date : $D_m = 2\,800$ mm ; $s = 20$ mm ; $\varphi = 1{,}00$; $\vartheta = 90° = \pi/2 = 1{,}571$ rad. Să se determine coeficienții (factorii) de

amplificare k_t și k_m pentru cazul cînd $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ și $H_1 = H_2 = H = 1\,000$ mm, în următoarele alternative : $\alpha = 80{,}0°$; $85{,}0°$; $87{,}0°$; $88{,}0°$; $88{,}5°$; $89{,}0°$; $89{,}5°$ și $89{,}9°$.

Rezolvare. De această dată, întrucît : $b_0 = D_m \sin(\vartheta/2) = 2\,800 \sin(90/2) = 1979{,}90$ mm și $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, coeficienții (factorii) de amplificare k_t și k_m se determină cu formulele (34) și, respectiv, (35), valorile numerice corespunzătoare fiind centralizate în tabelul 4. Pentru orientare și comparație, în tabelul 4 sînt date, de asemenea, valorile numerice k_t obținute cu formula aproximativă (36) pentru

$$L_0 = 0{,}5\, D_m \vartheta = 0{,}5 \cdot 2800 \cdot (\pi/2) = 2\,199{,}11 \text{ mm}.$$

Tabelul 4

Aplicația numerică nr. 3

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, în grd	$H_1 = H_2 = H$, în mm	Coeficienții (factorii) de amplificare		
		k_t	k_m	k_t*
80,0	1 000	1,998	7,667	32,252
85,0	1 000	1,501	4,346	16,686
87,0	1 000	1,301	3,009	10,419
88,0	1 000	1,201	2,340	7,281
88,5	1 000	1,151	2,005	5,711
89,0	1 000	1,100	1,670	4,141
89,5	1 000	1,050	1,335	2,571
89,9	1 000	1,010	1,067	1,314

* Calculat cu formula aproximativă (36).

De remarcat că, pentru condițiile aplicației numerice date (*scofilcire locală*), datele tabelului 4 *nu stimulează* utilizarea practică a formulei aproximative (36).

4. Considerîndu-se datele aplicației numerice precedente și presupunîndu-se că abaterea *locală* este de tipul unei *frîngeri*, să se determine coeficienții (factorii) de amplificare k_t și k_m corespunzători.

Rezolvare. Pentru această alternativă, coeficienții (factorii) de amplificare k_t și k_m se determină cu formulele (21) și, respectiv, (22), valorile numerice obținute fiind centralizate în tabelul 5. Pentru orientare și comparație, în tabelul 5 sînt date, de asemenea, valorile numerice k_t obținute cu formula aproximativă (36).

Tabelul 5

Aplicația numerică nr. 4

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, în grd	$H_1 = H_2 = H$, în mm	Coeficienții (factorii) de amplificare		
		k_t	k_m	k_t*
80,0	1 000	6,006	34,369	32,252
85,0	1 000	3,484	17,557	16,686
87,0	1 000	2,488	10,918	10,419
88,0	1 000	1,991	7,609	7,281
88,5	1 000	1,743	5,956	5,711
89,0	1 000	1,496	4,303	4,141
89,5	1 000	1,248	2,652	2,571
89,9	1 000	1,050	1,330	1,314

* Calculat cu formula aproximativă (36).

De remarcat că, pentru condițiile aplicației numerice de față (*frîngere locală*), datele tabelului 5 *stimulează* utilizarea practică a formulei aproximative (36), deși aceasta furnizează rezultate numerice ușor subevaluate (cu circa 1 ... 7% pentru $\alpha \leqslant 80°$).

BIBLIOGRAFIE

1. I. MANG, *Eforturi suplimentare ce apar în mantaua cilindrică a unui recipient sub presiune datorită unor deformații*, Buletin de informare în tehnica supravegherii instalațiilor mecanice sub presiune și de ridicat (BIT ISCIR), *4*, p. 235—244 (1973).
2. Z. MANOLACHE, *Solicitări și deformații la execuția, transportul și montajul utilajelor chimice de gabarit mare*, Teză dr. ing., București, Institutul politehnic, 1979.
3. Z. MANOLACHE, *Solicitări produse în utilajele cilindrice de gabarit mare, cu perete subțire, în timpul transportului rutier, I*, Revista de chimie, **30**, *2*, p. 181—186 (1979).
4. Z. MANOLACHE, R. TURTURICĂ, *Solicitări produse în utilajele cilindrice de gabarit mare, cu perete subțire, în timpul transportului rutier. II*, Revista de Chimie, **31**, *11* p. 1106—1110 (1980).
5. A. PAVEL, L. RIZEA, C. MATEESCU, *Starea de eforturi unitare din mantaua geometric imperfectă a rezervorului cilindric vertical de 22 000 m³ pentru GPL (aragaz)*. Lucrare prezentată la simpozionul „Realizări de seamă ale creației și gîndirii tehnice românești, în cincinalul revoluției tehnico-științifice", București, C.C.P.T.F., 2 decembrie 1977.
6. A. PAVEL, L. RIZEA, C. MATEESCU, *Rezervorul cilindric vertical de 22 000 m³ pentru GPL (aragaz)*. Construcții, *7*, p. 35—41 (1979).
7. A. PAVEL, *Elemente de inginerie mecanică (pentru petrochimie)*, București Edit. didactică și pedagogică, 1981.
8. R. PICH, *Betrachtungen über die durch den inneren Überdruck in dünnwandigen Hohlzylindern mit unrundem Querschnitt hervorgerufenen Biegespannungen*, Mitt. der VGB, Dec., *93*, p. 408—416 (1964).
9. R. PICH, *Berechnung der elastischen Biegespannungen in unrunden Kesseltrommeln*, Konstruktion, **17**, *7*, p. 264—268 (1965).
10. M. RENERT, *Calculul și construcția utilajului chimic. Vol. 1*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1971.
11. M. RENERT, Z. MANOLACHE, *Solicitări și deformații în cilindrul cu perete subțire, în condiții de execuție, transport și montaj*, Construcția de mașini, **26**, *4*, p. 218—221 (1974).
12. M., RENERT, *Asupra condițiilor tehnice de execuție a utilajelor tehnologice chimice tipizate*, Revista de Chimie, **26**, *12*, p. 1029 — 1033 (1975).
13. K. SCHMIDT, *Zur Spannungsberechnung unrunder Rohre unter Innendruck*, VDI—Z., **98**, *4*, p. 161—164 (1956).
14. K. SCHMIDT, *Beaspruchung unrunder Druckbehälter*, VDI—Z., **102**, *1*, p. 11—15 (1960).
15. ȘT. TEODORESCU, *Contribuții la studiul influenței abaterilor dimensionale în cazul aparatelor de tip coloană și schimbătoarelor de căldură tubulare din punctul de vedere al capacității de rezistență și performanțelor funcțional-tehnologice*, Teză dr. ing., Ploiești, Institutul de petrol, 1973.
16. H. WAGNER, *Einfache Spannungsberechnung unrunder Rohre unter Innendruck*, VDI—Z., **98**, *20*, p. 1053—1054 (1956).
17. H. WÖLFEL, *Einfluss der Vorverformung auf die Spannungen in einer Kreiszylinderschale unter Innendruck*, Stahlbau, **36**, *4*, p. 113—122 (1967).

O METODĂ DE REZOLVARE A GRINZILOR CU ZĂBRELE STATIC NEDETERMINATE*

de CORINA SOARE

Institutul de construcții București

Sînt studiate grinzile cu zăbrele cu tălpi paralele și diagonale încrucișate, utilizînd metoda eforturilor. Prin introducerea ecuațiilor cu diferențe se obține o soluție analitică pentru determinarea eforturilor în bare. Un exemplu de calcul ilustrează aplicarea metodei propuse.

Dintre grinzile cu zăbrele plane static nedeterminate interior, grinzile cu tălpi paralele și diagonale încrucișate se bucură de o răspîndire largă, datorită simetriei conformării lor. O modalitate de calcul obișnuită constă în rezolvarea prin metoda eforturilor, alegînd ca necunoscute eforturile în diagonalele ascendente (în sensul de parcurgere de la stînga spre dreapta), cu luarea în considerare a simetriei față de mijlocul deschiderii.

În cazul stabilirii ecuațiilor cu diferențe este preferabilă obținerea unei singure legi de variație pentru fiecare dintre eforturile care intervin. De aceea, abstracție făcînd de considerentele de simetrie, vom alege ca necunoscute static nedeterminate eforturile în toate diagonalele ascendente. După obținerea rezultatelor finale, examinarea simetriei stării de eforturi va fi un control al corectitudinii calculului.

Vom introduce următoarele notații (fig. 1)

— numerotarea nodurilor, $0, 1, 2, 3, \ldots, m-1, m, m+1, \ldots, p-1, p$,

— lungimea unui panou, l,

— înălțimea grinzii, h,

— lungimea diagonalelor, $l_d = \dfrac{h}{\sin\alpha} = \dfrac{l}{\cos\alpha} = \sqrt{l^2 + h^2}$,

— înclinarea diagonalelor față de tălpi, α,

— eforturi în sistemul de bază (aferente nodului curent m), S_m, I_m D_m, V_m,

— eforturi în sistemul de bază datorite lui $X_m = 1$, $\bar{S}_m, \bar{I}_m, \bar{D}_m, \bar{V}_m$

— aria secțiunii transversale a barelor tălpii superioare, A_s,

— aria secțiunii transversale a barelor tălpii inferioare A_i,

* Text revăzut al comunicării cu același titlu prezentate și premiate la a XVI-a Conferință Națională a Cercurilor Științifice Studențești, Iași, 11—13 martie 1983.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 42, NR. 6, 1983, P. 609 — 618

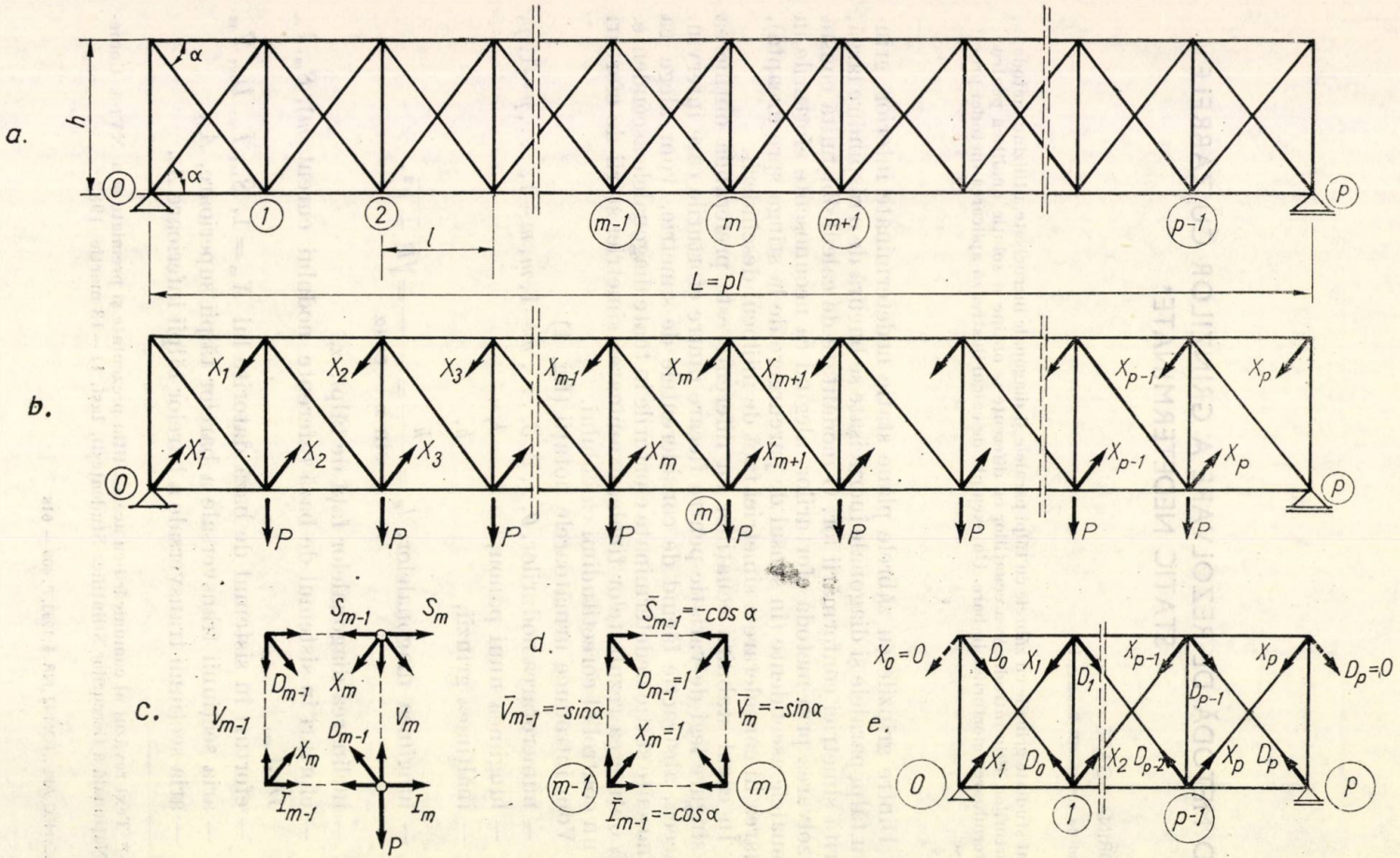


Fig. 1. — Grinda cu zăbrele cu diagonale încrucișate : *a*) geome a grinzii ; *b*) sistemul de bază și necunoscutele static nedeterminate ; *c*) eforturile în barele panoului $m - 1$, m ; *d*) eforturile în barele sistemului de bază produse de $X_m = 1$; *e*) exprimarea condițiilor la limită.

— aria secţiunii transversale a diagonalelor, A_d,

— aria secţiunii transversale a montanţilor, A_v.

Pentru scrierea sistemului de ecuaţii canonice în metoda eforturilor se observă că influenţa unei necunoscute $X_m = 1$ se întinde doar în panoul respectiv (fig. 1*d*). Eforturile barelor din panoul $m - 1$, m rezultă

$$\bar{S}_m = \bar{I}_m = -\cos\alpha, \quad \bar{D}_m = X_m = +1, \quad \bar{V}_{m-1} = \bar{V}_m = -\sin\alpha. \tag{1}$$

Cu aceste rezultate, ecuaţia canonică corespunzătoare deschiderile $m - m$ şi m, $m + 1$ se scrie

$$X_{m-1}\delta_{m,m-1} + X_m\delta_{m,m} + X_{m+1}\delta_{m,m+1} + \Delta_{m,0} = 0, \tag{2}$$

în care coeficienţii au expresiile

$$\delta_{m,m-1} = \delta_{m,m+1} = \frac{h\sin^2\alpha}{EA_v},$$

$$\delta_{m,m} = \frac{l\cos^2\alpha}{EA_s} + \frac{l\cos^2\alpha}{EA_i} + \frac{2h\sin^2\alpha}{EA_v} + \frac{2l_d}{EA_d}. \tag{3}$$

Termenul liber se obţine cu ajutorul expresiei generale

$$\Delta_{m,0} = \sum \frac{N_k\bar{N}_k l_k}{EA_k} \tag{4}$$

unde semnul $\sum$ se referă la toate barele grinzii cu zăbrele cu diagonale descendente (reprezentînd sistemul de bază),

N_k — eforturile produse de încărcarea exterioară în sistemul de bază,

$\bar{N}_k$ — eforturile produse de încărcarea $X_m = 1$ în sistemul de bază,

k precizează o anumită bară de lungime l_k, aria secţiunii transversale A_k şi eforturi N_k, respectiv $\bar{N}_k$.

Expresia lui N_k poate fi determinată prin mijloacele obişnuite ale Staticii construcţiilor sau, pentru încărcări regulate, cu ajutorul unor relaţii de recurenţă.

Cu expresiile (3) ecuaţia (2) se scrie

$$\frac{h\sin^2\alpha}{EA_v}X_{m-1} + \left(\frac{l\cos^2\alpha}{EA_s} + \frac{l\cos^2\alpha}{EA_i} + \frac{2h\sin^2\alpha}{EA_v} + \frac{2l_d}{EA_d}\right)X_m + \frac{h\sin^2\alpha}{EA_v}X_{m+1} + \Delta_{m,0} = 0.$$

Împărţind cu coeficientul lui X_{m-1} şi ţinînd seama că

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{l}, \quad l_d = \frac{h}{\sin\alpha},$$

ecuația precedentă se scrie

$$X_{m-1} + 2\left(1 + \frac{A_v \operatorname{cotg}^3\alpha}{2A_s} + \frac{A_v \operatorname{cotg}^3\alpha}{2A_i} + \frac{A_v}{A_d \sin^3\alpha}\right) X_m + X_{m+1} =$$

$$= -\frac{EA_v}{h \sin^2\alpha}\,\Delta_{m,0}. \tag{5}$$

Observînd că coeficientul lui X_m este constant, putem nota

$$\lambda = \frac{A_v \operatorname{cotg}^3\alpha}{2A_s} + \frac{A_v \operatorname{cotg}^3\alpha}{2A_i} + \frac{A_v}{A_d \sin^3\alpha}; \tag{6}$$

de asemenea, pentru încărcări regulate, termenul liber poate fi privit ca un polinom în m, fie $f(m)$. A tunci ecuația se scrie sub forma mai simplă.

$$X_{m-1} + 2(1 + \lambda)X_m + X_{m+1} = -\frac{EA_v}{h \sin^2\alpha}\,\Delta_{m,0}. \tag{7}$$

Ecuația caracteristică pentru determinarea soluției complementare rezultă

$$\beta^2 + 2(1 + \lambda)\,\beta + 1 = 0$$

și are rădăcinile

$$\beta_1,\ \beta_2 = -(1 + \lambda) + \sqrt{\lambda(\lambda + 2)}. \tag{8}$$

Valorile lui β_1 și β_2 pentru $\lambda \in (0{,}5\,;\ 3{,}5)$ sînt trecute în tabelul 1.

Pentru precizarea unei soluții particulare vom admite că grinda cu zăbrele este încărcată cu sarcini verticale P = const. aplicate în toate nodurile tălpii inferioare (fig. 1*b*).

Pentru eforturile în sistemul de bază (fig. 1*b*) pot fi stabilite destul de ușor următoarele relații:

$$\begin{aligned}
S_{mb} &= -\frac{1}{2} P \operatorname{cotg}\alpha (m + 1)\,(p - 1 - m) && (m = 0,1,2,\ \ldots,\ p-1),\\
I_{mb} &= +\frac{1}{2} P \operatorname{cotg}\alpha m (p - m) && (m = 0,1,2,\ \ldots,\ p-1),\\
D_{mb} &= \frac{P}{\sin\alpha}\left(\frac{p-1}{2} - m\right) && (m = 0,1,2,\ \ldots,\ p-1),\\
V_{mb} &= -P\left(\frac{p-1}{2} - m\right) && (m = 0,1,2,\ \ldots,\ p-1,\ p).
\end{aligned} \tag{9}$$

Tabelul 1

λ	β_1	β_2	λ	β_1	β_2
0,25	−0,5	−2,0	2,00	−0,171573	−5,828427
0,50	−0,381966	−2,618034	2,25	−0,157671	−6,342329
0,75	−0,313859	−3,186141	2,50	−0,145898	−6,854102
1,00	−0,267949	−3,732051	2,75	−0,135792	−7,364208
1,25	−0,234436	−4,265564	3,00	−0,127017	−7,872983
1,50	−0,208712	−4,791288	3,25	−0,119322	−8,380678
1,75	−0,188262	−5,311738	3,50	−0,112518	−8,887482

Tabelul 2

$m =$	$-0,00369254\ m^2$	$+0,6656181\ m$	$+1,1144778$	$-1,114478(-0,2025063)^m$	$+0,0261755\times10^{-6}(-4,9381187)^m$	X_m/P
1	−0,00369254	+0,6656181	+1,1144778	+0,2256887	−0,000000129	+2,002092
2	−0,01477	+1,3312362	+1,1144778	−0,0457033	+0,000000638	+2,385241
3	−0,0332325	+1,9968543	+1,1144778	+0,00925522	−0,000003152	+3,087352
4	−0,05908	+2,6624724	+1,1144778	−0,00187424	+0,000015565	+3,716012
5	−0,0923125	+3,3280905	+1,1144778	+0,000379545	−0,000076860	+4,350558
6	−0,13293	+3,9937086	+1,1144778	−0,00007686	+0,000379545	+4,975559
7	−0,1809325	+4,6593267	+1,1144778	+0,000015565	−0,001874240	+5,591013
8	−0,23632	+5,3249448	+1,1144778	−0,000003152	+0,00925522	+6,212355
9	−0,2990925	+5,9905629	+1,1144778	+0,000000638	−0,0457033	+6,760245
10	−0,369254	+6,6561810	+1,1144778	−0,000000129	+0,2256887	+7,627094

Se verifică uşor că între cele patru eforturi subsistă relaţiile cunoscute

$$I_{mb} = -S_{m-1,b},\ V_{mb} = -D_{mb}\sin\alpha.$$

Putem acum să precizăm termenul liber din ecuaţia cu diferenţe (7). Termenul liber $\Delta_{m,0}$ dat de (4) se scrie

$$\Delta_{m,0} = \frac{S_{m-1,b}\bar{S}_{m-1}l}{EA_s} + \frac{I_{m-1,b}\bar{I}_{m-1}l}{EA_i} + \frac{D_{m-1,b}\bar{D}_{m-1}l_d}{EA_d} +$$

$$+ \frac{(V_{m-1,b}\bar{V}_{m-1} + V_{mb}\bar{V}_m)\,h}{EA_v} = \frac{Pl\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{2EA_s}\,m(p-m) -$$

$$- \frac{Pl\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{2EA_i}\,(m-1)(p+1-m) + \frac{Pl_d}{EA_d\sin\alpha}\left(\frac{p+1}{2} - m\right) +$$

$$+ \frac{Ph\sin\alpha}{EA_v}\,(p-2m).$$

Ţinînd seama şi de factorul $-\dfrac{EA_v}{h\sin^2\alpha}$, termenul liber din ecuaţia (7) ia forma

$$L(m) = C_1m^2 + C_2m + C_3, \tag{10a}$$

în care

$$C_1 = P\,\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha}{2\sin\alpha}\left(\frac{A_v}{A_s} - \frac{A_v}{A_i}\right),$$

$$C_2 = P\left\{\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha}{2\sin\alpha}\left[-\frac{A_v}{A_s}p + \frac{A_v}{A_i}(p+2)\right] + \frac{A_v}{A_d\sin^4\alpha} + \frac{2}{\sin\alpha}\right\}, \tag{10b}$$

$$C_3 = P\left[-\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha}{2\sin\alpha}\,\frac{A_v}{A_i}(p+1) + \frac{A_v}{A_d\sin^4\alpha}\,\frac{p+1}{2} - \frac{1}{\sin\alpha}\right].$$

Astfel, ecuaţia cu diferenţe (7) capătă forma finală

$$X_{m-1} + 2(1+\lambda)\,X_m + X_{m+1} = C_1m^2 + C_2m + C_3, \tag{11}$$

cu soluţia generală

$$X_m = \frac{1}{2(\lambda+2)}\left(C_1m^2 + C_2m + C_3 - \frac{C_1}{\lambda+2}\right) + c_1\beta_1^m + c_2\beta_2^m, \tag{12}$$

unde c_1 şi c_2 reprezintă constante de integrare. Acestea se determină din condiţiile la limită.

Presupunînd că cele două constante de integrare au fost determinate, și deci eforturile X_m sînt complet determinate de relația (12), eforturile finale în bare au expresiile :

$$S_m = S_{mb} + \bar{S}_m X_{m+1}; \quad I_m = I_{mb} + \bar{I}_m X_{m+1}, \tag{13}$$

$$D_m = D_{mb} + \bar{D}_m X_{m+1}; \quad V_m = V_{mb} + \bar{V}_m (X_m + X_{m+1}).$$

Pentru cazul de încărcare considerat, relațiile (13) capătă forma

$$S_m = -\frac{1}{2} P \operatorname{ctg}\alpha (m+1)(p-1-m) - X_{m+1}\cos\alpha,$$

$$I_m = +\frac{1}{2} P \operatorname{ctg}\alpha m(p-m) - X_{m+1}\cos\alpha,$$

$$D_m = \frac{P}{\sin\alpha}\left(\frac{p-1}{2} - m\right) + X_{m+1}, \tag{14}$$

$$V_m = -P\left(\frac{p-1}{2} - m\right) - (X_m + X_{m+1})\sin\alpha.$$

Putem trece acum la stabilirea condițiilor la limită necesare determinării constantelor c_1 și c_2. Admițînd că grinda cu zăbrele de bază este prelungită, dincolo de extremități cu două panouri fictive (fig. 1*e*), eforturile în diagonalele care concură la nodurile superioare vor trebui să fie nule, adică $X_0 = 0$ (pentru $m = 0$), respectiv $D_p = 0$ (pentru $m = p$).

Deoarece

$$D_p = D_{pb} + X_{p+1},$$

a doua condiție ne dă $X_{p+1} = -D_{pb}$.

Ținînd seama de (12), cele două condiții devin :

$$c_1 + c_2 = -\frac{1}{2(\lambda+2)}\left(C_3 - \frac{C_1}{\lambda+2}\right),$$

$$\beta_1^{p+1} c_1 + \beta_2^{p+1} c_2 = -\frac{1}{2(\lambda+2)}\left[C_1(p+1)^2 + C_2(p+1) + C_3 - \frac{C_1}{\lambda+2}\right] + \frac{P}{\sin\alpha}\frac{p+1}{2}. \tag{15}$$

Deoarece β_1^{p+1} reprezintă o valoare numerică foarte mică, în timp ce β_2^{p+1} are o valoare numerică foarte mare, trebuie dată atenție calculului concret ; acesta va fi cel mai bine lămurit prin aplicația numerică ce urmează.

★

Aplicație numerică. Vom considera o grindă cu zăbrele cu diagonale încrucișate, având următoarele date numerice :

— numărul panourilor, $p = 10$,
— lungimea unui panou, $l = 0{,}6a$,
— înălțimea grinzii, $h = 0{,}8a$,
— lungimea diagonalelor, $l_d = a$,
— aria secțiunilor barelor din talpa superioară, $A_s = 1{,}5A_0$,
— aria secțiunilor barelor din talpa inferioară, $A_i = A_0$,
— aria secțiunilor transversale ale diagonalelor, $A_d = 0{,}4A_0$,
— aria secțiunilor transversale ale montanților, $A_v = 0{,}3A_0$.

Încărcarea constă din sarcini egale P aplicate în toate nodurile tălpii inferioare.

Unghiul de înclinare a diagonalelor față de tălpi rezultă din relația

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{l} = \frac{0{,}8a}{0{,}6a} = \frac{4}{3}, \quad \sin\alpha = 0{,}8, \quad \cos\alpha = 0{,}6, \operatorname{cotg}\alpha = 0{,}75.$$

Ținînd seama de datele problemei avem, succesiv,
— eforturile în sistemul de bază (vezi relațiile (9))

$$S_{mb} = -\frac{1}{2} P0{,}75(m+1)(10-1-m) = -0{,}375P(m+1)(9-m)$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots, 9),$$

$$I_{mb} = +0{,}375Pm(10-m) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, 9),$$

$$D_{mb} = \frac{P}{0{,}8}\left(\frac{10-1}{2} - m\right) = 1{,}25P\,(4{,}5-m) \quad (m = 0, 1, 2 \ldots, 9),$$

$$V_{mb} = -P(4{,}5-m) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, 9, 10);$$

— eforturile în barele din panoul $m-1$, m datorită acțiunii unei necunoscute $X_m = 1$

$$\bar{S}_m = \bar{I}_m = -0{,}6\,; \; \bar{D}_m = X_m = +1\,; \; \bar{V}_{m-1} = \bar{V}_m = -0{,}8\,;$$

— valoarea constantei λ(vezi relația (6))

$$\lambda = \frac{0{,}3A_0 \cdot (0{,}75)^3}{2 \times 1{,}5A_0} + \frac{0{,}3A_0 \cdot (0{,}75)^3}{2A_0} + \frac{0{,}3A_0}{0{,}4A_0 \cdot 0{,}8^3} = 1{,}5703125$$

— rădăcinile β_1 și β_2 :

$$\beta_1,\beta_2 = -(1 + 1{,}5703125) \pm \sqrt{1{,}5703125(1{,}5703125 + 2)} =$$

$$= -2{,}5703125 \pm 2{,}3678062$$

sau

$$\beta_1 = -0{,}2025063\,; \quad \beta_2 = -4{,}9381187\,;$$

— constantele C_1, C_2, C_3 (vezi relațiile (10b))

$$C_1 = \frac{P \times 0{,}75^3}{2 \cdot 0{,}8}\left(\frac{0{,}3A_0}{1{,}5A_0} - \frac{0{,}3A_0}{A_0}\right) = -0{,}0263671P,$$

$$C_2 = P\left[\frac{0{,}75^3}{2 \cdot 0{,}8}\left(-10 \cdot \frac{0{,}3}{1{,}5} + 12 \cdot \frac{0{,}3}{1}\right) + \frac{0{,}3}{0{,}4 \cdot 0{,}8^4} + \frac{2}{0{,}8}\right] =$$

$$= + 4{,}7529296\ P,$$

$$C_3 = P\left(-\frac{0{,}75^3}{2 \cdot 0{,}8} \cdot 0{,}3 \cdot 11 + \frac{0{,}3}{0{,}4 \cdot 0{,}8^4} \cdot 5{,}5 - \frac{1}{0{,}8}\right) =$$

$$= + 7{,}9506836\ P\ ;$$

— scrierea sistemului (15) care determină constantele c_1 și c_2

$$c_1 + c_2 = -\frac{1}{2 \cdot 3{,}5703125}\left(7{,}9506836 + \frac{0{,}0263671}{3{,}5703125)}\right)P,$$

$$(-0{,}2025062)^{11}\, c_1 + (-4{,}9381187)^{11}\, c_2 =$$

$$= -\frac{1}{2 \cdot 3{,}5703125}\left(-11^2 \cdot 0{,}0263671 + 11 \cdot 4{,}7529296 + \right.$$

$$\left. + 7{,}9506836 + \frac{0{,}0263671}{3{,}5703125}\right)P + \frac{5{,}5}{0{,}8}\ P,$$

sau, după efectuarea tuturor calculelor

$$c_1 + c_2 = -1{,}1144778\ P,$$

$$2{,}34866 \cdot 10^{-8} c_1 + 42577168\ c_2 = -1{,}1144791\ P.$$

Rădăcinile sistemului precedent sînt :

$$c_1 = -1{,}1144778P\,; \quad c_2 = + 0{,}0261755 \cdot 10^{-6} P$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1949

(se observă că, din cauza coeficienților necunoscutelor c_1 și c_2 din ecuația a doua, pot fi reținuți doar termenii de pe diagonala principală).

Cu valorile obținute, expresia lui X_m, dată de (12), se scrie numeric :

$$X_m/P = -0{,}00369254m^2 + 0{,}6656181m + 1{,}1144778 -$$
$$- 1{,}1144778(-0{,}2025063)^m + 0{,}0261755\cdot 10^{-6}(-4{,}9381187)^m.$$

Calculul numeric al lui X_m pentru $m = 1, 2, \ldots, 10$ este redat în tabelul 2 pentru a se vedea influența diferiților termeni.

O dată cunoscute valorile X_m, cu ajutorul relațiilor (14) pot fi calculate eforturile în toate barele grinzii cu zăbrele. Valorile au fost trecute în figura 2. Se va observa că în bare dispuse simetric față de mijlocul grinzii, rezultă valori egale. De exemplu,

$$S_1 = -\frac{1}{2}0{,}75\cdot 2(9-1)P - 0{,}6X_2 = -(6+0{,}6\cdot 2{,}385241)P = -7{,}431145P,$$

$$S_8 = -\frac{1}{2}0{,}75\cdot 9(9-8)P - 0{,}6X_9 = -(3{,}375 + 0{,}6\cdot 6{,}760245)P =$$
$$= -7{,}431145P.$$

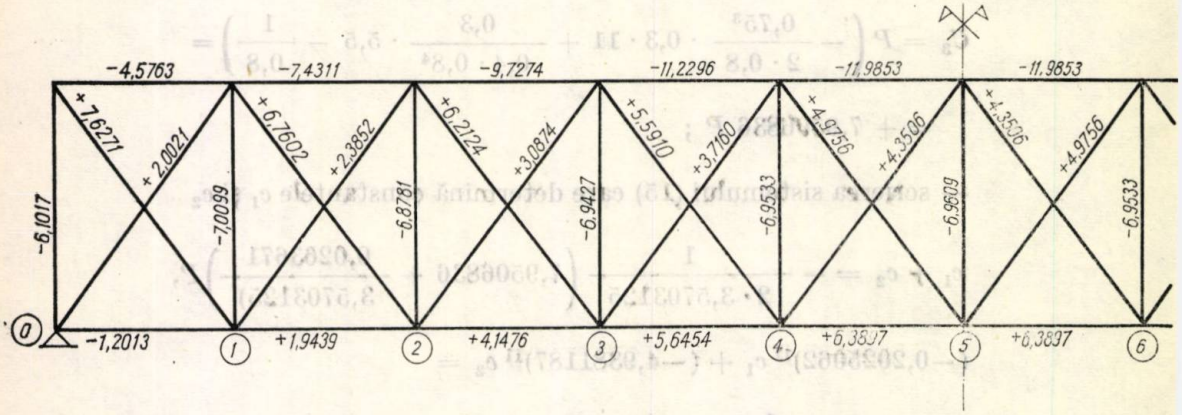


Fig. 2. — Eforturile finale în grinda cu zăbrele cu diagonale încrucișate (multiplicator P).

Primită la redacție la 28 martie 1983

BIBLIOGRAFIE

1. AL. GHEORGHIU, *Statica construcțiilor*. II. *Structuri static nedeterminate*, Edit. tehnică, București, 1965, p. 349.
2. P. MAZILU, *Statica construcțiilor*. II. *Sisteme static nedeterminate*, Edit. tehnică, București, 1959, p. 723.
3. J. D. RENTON, *Behaviour of Howe, Pratt and Warren Trusses*, Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. **95**, No. ST2, February 1969, 183—202.
4. M. V. SOARE, *Structuri discrete și structuri continui în mecanica construcțiilor. Probleme unidimensionale* (în manuscris).

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 42 1983

INDEX ALFABETIC

	Nr.	Pg.
ALEXA, PAVEL, GEORGE BÂRSAN, Teoreme variaţionale în analiza elastoplastică geometric neliniară a structurilor din bare	5	464
ALEXE, GH., Studiul efectului cîmpului magnetic indus într-un generator MHD prin metoda elementului finit	1	3
ALEXE, GH., Studiul mişcării MHD în conducte cu metoda elementului finit	4	331
ANGHEL, AL., v. POSEA, N.	4	367
BÂRSAN, GEORGE v. ALEXA, PAVEL	5	464
BERBENTEA, I., Unde de şoc în tuburi	3	265
BORŞ, I. v. ILLE, V.	4	348
BRATOSIN, D., O metodă de evaluare a oboselii rocilor	5	522
BUCUR, GR. v. CÎRTOAJE, V	1	58
BUZDUGAN, GH., I. MINCĂ, D. CRĂIFĂLEANU, N. CONSTANTIN, B. IONESCU, Vibratorul mecanic VMME-250 kN	2	181
CĂPITANU, LUCIAN, Metodă de calcul al uzurii la cuple superioare de frecare	1	54
CĂPITANU, LUCIAN, Stand pentru studiul anduranţei unor elemente de etanşare	3	325
CÎRTOAJE, V., CR. BUCUR, N. PARASCHIV, Sisteme automate de avans al sapei de foraj cu dispozitiv de frînare tip pompă volumică rotativă cu plungere axiale	1	58
CODOBAN, ALEXANDRU, Determinarea comenzilor necesare pentru mişcarea unei rachete pe o traiectorie rectilinie dată în atmosferă	3	223
CONSTANTIN, N., v. BUZDUGAN, GH.	2	181
CONSTANTIN, N., v. CONSTANTINESCU, I.	3	284
CONSTANTINESCU, I., N. CONSTANTIN, M. AL. SANDU, Utilizarea modelării în biomecanica sistemului osteo-articular	3	283
CRĂIFĂLEANU, Dv. BUZDUGAN, GH.	2	181
CRĂCIUN, CORNELIU, DOREL HOMENTCOVSCHI, Soluţii ale problemei la limită cu racordări pentru viteze în curgerea stratificată prin conducta circulară	2	91
CREŢU, ION, Drenajul gravitaţional unidimensional nestaţionar al petrolului	1	12
DĂRVĂREANU, ŞT., v. POSEA, N.	4	367
DOBRE, GEORGE, Asupra calculului deformaţiei danturii la angrenajele paralele cilindrice cu dinţi drepţi în condiţiile angrenării reale	4	407
DRĂGĂNOIU, GH., v. ROŞCA, ION	1	35
DUMITRU, ROZICA, Asupra efectului cîmpului magnetic indus într-un generator MHD	3	259
ENE, HORIA I., ELENA UNGUREANU-DAVID, Asupra mişcării cu suprafaţa liberă într-un mediu poros	2	104
ERHAN, M., v. SETEANU, I.	3	251
ERHAN, M., v. SETEANU, I.	4	337
ERHAN, M., v. SETEANU, I.	6	535
GĂLETUŞE, S., Asupra unor particularităţi privind utilizarea metodei cu element finit în lubrificaţia visco-inerţială	1	48

GEORGESCU, ADELINA, Stabilitatea și ramificarea în contextul sinergeticei . . 2 174
GIUȘCĂ, MARIA, v. VLĂDĂIANU, DECEBAL 2 192
GOGU, GR. I., v. MUNTEANU, M. GH. 6 569
GRIGORE, VIRGIL, O nouă corelație a factorului de frecare la curgerea amestecurilor bifazice în coloana țevilor de extracție din sondele eruptive . 5 485
GROSU, FLORIN, Element finit dreptunghiular de placă plană structural ortotropă 2 121
GYÉRESI, ȘTEFAN, Cilindru circular, infinit, polarizabil, magnetizabil, încărcat electric, într-un cîmp gravitațional 4 343
HOMENTCOVSCHI, DOREL, v. CRĂCIUN, CORNELIU 2 91
ILIESCU, N., v. MIRIȚĂ, ELENA 4 436
ILLE, V., I. BORȘ, Acțiuni concentrate asupra barelor și plăcilor 4 348
IONESCU, B., v. BUZDUGAN, GH. 2 181
IORDACHE, D., v. SOARE, MIRCEA V. 2 130
IRIMESCU, B. R., Stabilirea pragului de nepropagare a fisurilor de oboseală . . . 2 160
MARINESCU, AL., Largarea forțată a rezervoarelor acroșate 1 21
MIHĂILESCU, LUCIA, Model de element finit și program de calcul pentru analiza stabilității plăcilor plane 3 299
MINCĂ, MIHAI, Mecanism hidraulic de avans folosit pe instalațiile de prelucrat electrochimic 4 419
MINCĂ, I., v. BUZDUGAN, GH 2 181
MINESCU, Fl., v. STAN, AL. D. 6 547
MIRIȚĂ, ELENA, NICOLAE ILIESCU, Simularea pe model fotoelastic a tensiunilor remanente de natură termică, din dinții roților dințate 4 436
MUNTEANU, MIRCEA GH., GRIGORE I. GOGU, GHEORGHE N. RADU, Contribuții la studiul rigidității, stabilității elastice și vibrațiilor plăcilor circulare 6 569
NAHLIK, ADALBERT, ALEXANDRU PASTIA, Calculul de rezistență al unui rotor de suflantă cu ajutorul metodei elementelor finite 3 307
NAHLIK, ADALBERT, Analiza statică și dinamică a unei palete de ventilator axial cu ajutorul metodei elementului finit 5 472
NIȚĂ, M.M., A. M. C. RALAITSIZAFY, Unele considerații privind optimizarea zborului avioanelor de transport 3 209
ONU, G., Includerea efectului forțelor tăietoare în matricele elementului de placă rectangulată 2 143
PARASCHIV, AL., v. CÎRTOAJE, V. 1 58
PASCOVICI, MIRCEA D., Calculul capacității portante hidrodinamice a inelelor de etanșare excentrice sau ovale 1 41
PASTIA, Al., v. NAHLIK, ADALBERT 3 307
PAVEL, Al., Calculul de rezistență al structurilor tubulare presurizate la exterior I. 4 389
PAVEL, AL., Calculul de rezistență al structurilor tubulare presurizate la exterior. II 5 503
PAVEL, AL., Efectele abaterilor de la rectilinitatea generatoarei în cazul mantalelor recipientelor cilindrice presurizate la interior 6 595
POPESCU, FELICIA, Asupra jeturilor la viteză critică 3 245
POPESCU, IULIAN, Legi de mișcare realizabile de mecanismul manivelă-piston 2 109
POPESCU, IULIAN, Legi de mișcare realizabile de mecanismul cu culisă oscilantă 3 279
POPESCU, IULIAN, Legi de mișcare realizabile de mecanismul patrulater articulat 6 559
POSEA, N., AL. ANGHEL, ȘT. DĂRVĂREANU, I. DUMITRU, Algoritm și program pentru calculul dinamic la încovoiere al arborilor 4 307
RADU, GH., N., v. MUNTEANU, M. GH. 6 569
RALAITSIZAFY, A. M. C., v. NIȚĂ, M.M. 3 209
ROȘCA, ION, GH. DRĂGĂNOIU, Metodă de calcul numeric al caracteristicilor distribuției de masă pentru elemente și subansamble de mașini 1 35
SANDU, M. Al., v. CONSTANTINESCU, I. 3 284
SETEANU, I., M. ERHAN, Dinamica curgerii turbulente în bieful aval al C.H.E. de joasă cădere 3 251
SETEANU, I., M. ERHAN, Stabilirea configurației de echilibru a albiei unui riu cu granulometrie determinată 4 337

SETEANU, I., M. ERHAN, Transportul aluviunilor în regim nepermanent. V. Colmatarea albiilor naturale în regim de viitură 6 535
SOARE, CORINA, O metodă de rezolvare a grinzilor cu zăbrele static nedeterminate 6 611
SOARE, MIRCEA V., O extindere a utilizării funcţiilor fundamentale . . . 1 73
SOARE, MIRCEA V., D. IORDACHE, Aplicarea metodei parametrilor iniţiali la calculul plăcilor plane dreptunghiulare 2 130
SOÓS, E., Termoelastoviscoplasticitatea metalelor 5 445
SPULBER, I., C. SPULBER, Asupra unor condiţii de regim hidrodinamic la prelucrarea prin eroziune electrochimică 3 319
SPULBER, C., v. SPULBER, I. 3 319
STAN, AL. D., FL. MINESCU, Scurgerile gazelor prin mediile poroase superficiale 6 547
UNGUREANU-DAVID, ELENA, Mişcări automodelice ale fluidelor în medii poroase 3 240
UNGUREANU, DAVID, ELENA, v. ENE, HORIA I. 2 104
VLĂDĂIANU, DECEBAL, MARIA GIUŞCĂ, Citeva observaţii asupra funcţionării unor pompe de apă de răcire de tip MV—1002 (radial-axiale) . . 2 192

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).
- Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţi, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitatea, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii, şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, 70701, str. Const. Mille nr. 15. sectorul 1.